УДК 517:621.777:669.2

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. Зверев, А. Г. Залазинский*, В. И. Новожонов**, А. П. Поляков*

Уральский государственный технический университет, 620002 Екатеринбург
* Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург
** Институт физики металлов УрО РАН, 620219 Екатеринбург

Предложена методика экспериментального исследования структуры поверхностей материалов, основанная на использовании вейвлетного анализа. Приведены основные теоретические положения локально-частотного и вейвлетного анализа. Рассмотрены примеры применения вейвлетного анализа к исследованию модельных изображений. С использованием вейвлетного анализа определена структура брикетов, полученных компактированием титановой губки.

Представляет интерес исследование зависимости физико-механических свойств существенно неоднородных деформируемых материалов (композитов, порошковых материалов и др.) от их макро- и микроструктуры. При этом часто бывает важна информация о таких интегральных характеристиках исследуемой структуры, как пространственная частота повторяемости элементов (например, зерен, пор, трещин), статистическая характеристика их распределения, наличие масштабной инвариантности и др. [1]. Ниже рассматриваются основные положения разрабатываемой авторами методики экспериментального исследования структуры материала с применением вейвлетного анализа, активно развиваемого в последнее десятилетие XX в. [2–8]. По нашему мнению, такая методика позволяет идентифицировать деформируемый материал, выявить периодичность его структуры на макро- и микроуровнях и дать оценку размеров представительных элементарных объемов для определения эффективных механических характеристик при решении задач механики деформируемых структурно-неоднородных материалов.

Методы вейвлетного анализа позволяют находить локальные и интегральные характеристики изображений в рамках единой процедуры разложения в вейвлет-спектры, определять структуру существенно неоднородного объема и изучать его локальные скейлинговые (масштабно-инвариантные) свойства, так как вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала (при этом частота и координата рассматриваются как независимые переменные). В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (пространство, время) и частотном пространствах [4]. Вейвлетный анализ может быть использован для изучения как временных последовательностей, так и пространственных распределений [7].

Известные в настоящее время математические подходы, позволяющие выполнять локально-частотный анализ распределений, тесно связаны с положениями квантовой механики, допускающими установление квантово-классического соответствия. Так, в квантовой теории гамильтоновых систем наряду с координатным и импульсным представлениями широко применяется непрерывное (c-числовое) представление Вейля [9, 10], в котором вместо статистического оператора используется функция Вигнера [11, 12], заданная на c-числовом координатно-импульсном (фазовом) пространстве и переходящая в пределе $\hbar \to 0$ в обычную функцию распределения, определяемую в классической статистической механике. Поскольку переход от координатного представления к импульсному есть интегральное преобразование Фурье (разложение в непрерывный спектр частот), математический аппарат представления Вейля может быть распространен на широкий круг задач спектрального анализа.

Приведем некоторые соотношения процедуры замены статистического оператора $\hat\rho = \sum\limits_{ij} w_{ij} |i\rangle\langle j|$, $\operatorname{sp}\hat\rho = \sum\limits_{i} w_{ii} = 1$ функцией Вигнера [11, 12] (используются стандартные обозначения Дирака). Вводя координатное и импульсное представления (одномерная модель), получим

$$\rho_x(x,x') \equiv \langle x|\hat\rho|x'\rangle = \sum_{ij} w_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j^*(x'), \qquad \varphi_i(x) = \langle x|i\rangle,$$

$$\rho_p(p,p') \equiv \langle p|\hat\rho|p'\rangle = \sum_{ij} w_{ij}\varphi_i(p)\varphi_j^*(p') = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_x(x,x') \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(px - p'x')\Big]\,dx\,dx'.$$

Правила перехода от матричного элемента статистического оператора в координатном представлении к функции Вигнера, а также правила обратного перехода к координатному и импульсному представлениям имеют вид

$$f_w(p,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_x\Big(x + \frac{1}{2}\eta, x - \frac{1}{2}\eta\Big) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}p\eta\Big)d\eta; \tag{1}$$

$$\rho_x(x,x') = (2\pi\hbar)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_w\Big(p, \frac{1}{2}(x + x')\Big) \exp\Big[\frac{i}{\hbar}p(x - x')\Big]dp; \tag{2}$$

$$\rho_p(p,p') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_w\Big(\frac{1}{2}(p + p'), x\Big) \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}x(p - p')\Big]dx. \tag{3}$$

Свойства функции Вигнера и обычной функции распределения во многом сходны. Так, формулы для вычисления средних от произвольных функций, зависящих только от координаты или импульса, имеют такой же вид, как и в классической теории:

$$\operatorname{sp}(\hat\rho g(\hat x)) = \sum_{ij} w_{ij}\langle i|g(\hat x)|j\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_w(x,p)g(x)\,\frac{dp\,dx}{2\pi\hbar},$$

$$\operatorname{sp}(\hat\rho g(\hat p)) = \sum_{ij} w_{ij}\langle i|g(\hat p)|j\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_w(x,p)g(p)\,\frac{dp\,dx}{2\pi\hbar}.$$

В случае, если статистический оператор описывает "чистое" квантово-механическое состояние, формулы (1)–(3) принимают вид

$$\rho(x,x') = \varphi(x)\varphi^*(x'), \quad f_w(p,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\Big(x + \frac{1}{2}\eta\Big)\varphi^*\Big(x - \frac{1}{2}\eta\Big) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}p\eta\Big)d\eta. \tag{4}$$

Сходная структура правых частей в выражениях (2) и (3) отражает тот факт, что представление Вейля занимает промежуточное положение между координатным и импульсным представлениями. Если в координатном представлении значение импульса, а в импульсном представлении значение координаты являются полностью неопределенными, в представлении Вейля достигается “компромисс”, и неопределенность каждой из указанных переменных сводится к минимуму в той степени, насколько это допускается соотношением неопределенностей. Если с помощью преобразования Фурье выполняется спектральный анализ последовательности данных, использование преобразований (1)–(3) позволяет рассматривать локально-частотные характеристики таких последовательностей (в частности, нестационарных сигналов или пространственных распределений, полученных в эксперименте).

Рассмотрим возможные обобщения представления Вейля, ориентированные на общие задачи спектрального анализа, следуя в основном работам [6, 8]. Для определенности будем считать, что исходные функции зависят от времени. Пусть интегральное преобразование Фурье имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega.$$

Предположим, что $f(t)$ и $g(t)$ — некоторые комплексные сигналы. По аналогии с функцией Вигнера (4) введем функции

$$R_{f,g}(\tau, \xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(t + \frac{1}{2}\tau\Big) g^*\Big(t - \frac{1}{2}\tau\Big) \exp(-i\xi t)\, dt; \tag{5}$$

$$E_{f,g}(b, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\Big(b + \frac{1}{2}\tau\Big) g^*\Big(b - \frac{1}{2}\tau\Big) \exp(-i\omega\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Последнее выражение с учетом замены $b + \tau/2 = q$ перепишем в виде

$$E_{f,g}(b, \omega) = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(q) g^*(2b - q) \exp[-i\omega(q - b)]\, dq. \tag{7}$$

Функции (5) и (6), названные в [8] соответственно перекрестной функцией неопределенности и перекрестной функцией Вигнера — Вилле, связаны симплектическим преобразованием Фурье:

$$R_{f,g}(\tau, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E_{f,g}(b, \omega) \exp[-i(\xi b - \omega\tau)]\, db\, d\omega,$$

$$E_{f,g}(b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{f,g}(\tau, \xi) \exp[i(\xi b - \omega\tau)]\, d\tau\, d\xi.$$

Для иллюстрации применения частотно-временного анализа с помощью функции (6) рассмотрим задачу обработки радарного сигнала в идеализированной постановке. Пусть “радар” посылает короткий радиоимпульс $f(t)$ с дельтаобразной огибающей и высокочастотным заполнением с частотой Ω. Отраженный импульс $g(t)$ имеет временную задержку, а частота заполнения изменяется на ω_0 (вследствие эффекта Доплера). Полагая, что отраженный сигнал представляется в виде $g(t) = A \exp[i\omega_0(t - t_0)] f(t - t_0)$ (для простоты

функцию формы огибающей считаем прежней), вычислим приближенно модуль функции Вигнера — Вилле
$$|E_{f,g}(b,\omega)| \approx k|A|\,|\hat{f}(\Omega)|^2\delta(2\omega - 2\Omega - \omega_0)\delta(2b - t_0). \tag{8}$$
В правой части выражения (8) дельтаобразные функции записаны как дельта-функции, константа k зависит от формы огибающей. Функция (8) имеет узкий пик при $b \approx t_0/2$ и $\omega \approx \omega_0/2$. Таким образом, сравнивая посланный и вернувшийся сигналы, находим задержку по времени и величину частотного сдвига, т. е. выполняем частотно-временной анализ.

Рассмотрим формулу (7). При фиксированной функции $g(t)$ выражение (7) представляет собой некоторое интегральное преобразование на множестве функций $f(t)$. Определим преобразование, называемое непрерывным преобразованием Габора или “оконным” преобразованием Фурье [8]:
$$G_f(b,\omega) = \langle f, g_{b,\omega}\rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*_{b,\omega}(t)\,dt,$$
где $g_{b,\omega}(t) = \exp{[i\omega(t-b)]}g(t-b)$ — функция Габора. Функция $g_{b,\omega}$ является произведением осциллирующей экспоненты и “оконной” функции $g(t)$; в качестве последней может быть выбрана, например, гауссова функция или функция типа прямоугольного импульса. Формула обращения преобразования Габора имеет вид
$$f(t) = (2\pi\|g\|^2\,)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_f(b,\omega) g_{b,\omega}(t)\,db\,d\omega, \qquad \|g\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} db|g(b)|^2.$$
Покажем, что преобразование Габора позволяет улавливать медленное изменение частоты заполнения в пределах изменения импульса огибающей. Пусть $f(t) = A(t)\exp{[i\varphi(t)]}$, где $\varphi(t) = \omega(t)t$ и $t\omega'(t) \ll \omega(t)$ для всех t, при которых функция формы огибающей $A(t)$ существенно отлична от нуля (т. е. в пределах окна частота меняется незначительно). В этом случае $\varphi'(t) \approx \omega(t)$. Считая $\varphi(t) \approx \varphi(b) + \varphi'(b)(t-b)$, после выполнения преобразований получим
$$|G_f(b,\omega)| = \langle f, g_{b,\omega}\rangle \approx |A(b)|\,|\hat{g}(\varphi'(b) - \omega)|. \tag{9}$$
Из выражения (9) следует, что, меняя значение b, можно найти (с некоторой погрешностью) форму огибающей $|A(b)|$; фиксируя b и меняя значение ω, можно также определить локальное значение частоты, находя положение максимума фурье-образа “оконной” функции: $\omega_{\max} \approx \varphi'(b) \approx \omega(b)$.

“Оконное” преобразование Фурье является эффективным средством обработки сложных сигналов. К его недостаткам следует отнести большое число переменных, от которых зависит функция-образ. Даже в одномерном случае таких переменных должно быть три: положение середины окна, его ширина и частота осцилляций, заполняющих окно, причем последние две не могут быть выбраны независимо. Можно упростить описанный выше подход, фиксируя число осцилляций, заполняющих окно, например, поддерживая постоянным отношение ширины окна к периоду осцилляций. В этом случае число переменных сокращается до двух, а необходимое изменение параметров окна сводится к его масштабированию вместе с “заполнением”. Эта идея положена в основу новой модификации частотно-временного анализа, получившей название кратно-разрешающего (вейвлетного) анализа.

Выберем вейвлет-функцию $\psi(t)$, ее график должен иметь вид окна, заполненного осцилляциями (термин “вейвлет” означает “маленькая волна”, “всплеск”). Построим базис, выполняя непрерывные масштабные преобразования и трансляции этой функции:
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\,\psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big), \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Определим непрерывное вейвлет-преобразование произвольной функции $f(t)$:

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*_{a,b}(t)\,dt. \tag{10}$$

Фурье-образ базисной функции связан с фурье-образом вейвлета соотношением $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = (a/\sqrt{|a|})\exp(-i\omega b)\hat{\psi}(a\omega)$. Используя равенство Парсеваля $2\pi\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$, можно найти правило обращения вейвлет-преобразования

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_f(a,b)\psi_{a,b}(x)\,\frac{da\,db}{a|a|}, \qquad C_\psi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi}\,|\hat{\psi}(\xi)|^2.$$

Покажем, что вейвлет-преобразование позволяет улавливать медленное изменение частоты заполнения в пределах огибающей радиоимпульса. Пусть $f(t) = A(t)\exp[i\varphi(t)]$ и $\varphi(t) = \omega(t)t$, $t\omega'(t) \ll \omega(t)$ для всех t в пределах огибающей импульса. Тогда $|W_f(a,b)| \approx \sqrt{|a|}\,|A(b)|\,|\hat{\psi}(a\varphi'(b))|$. Предположим, что фурье-образ вейвлет-функции $\hat{\psi}(\omega)$ имеет экстремум в точке $\omega_0 \neq 0$ на оси частот. Тогда, находя значение экстремума в зависимости от значения a (при фиксированном b), определим $\varphi'(b) \approx \omega(b)$, решая уравнение $a\varphi'(b) \approx \omega_0$. В логарифмической форме это уравнение имеет вид $\log_2 a \approx \log_2\omega_0 - \log_2\varphi'(b)$. Таким образом, изменение частоты сигнала в два раза приводит к смещению экстремума по оси $\log_2 a$ на единицу.

Вещественные вейвлет-функции удобно выбирать в виде производных функции Гаусса:

$$\psi(t) = (-1)^{m+1}\frac{d^m}{dt^m}\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big), \qquad m \geqslant 1. \tag{11}$$

Морле ввел другой тип вейвлет-функций [3]: $\psi(t) = \exp(i\omega_0 t)\exp(-t^2/2)$. Вейвлет-преобразование Морле аналогично оконному преобразованию Фурье, так как вейвлет-функция представляет собой гауссово окно, заполненное синусоидальными осцилляциями. Функция (11) при $m = 2$ используется наиболее часто и называется “мексиканская шляпа” или “сомбреро”. Другие примеры часто используемых вейвлет-функций приведены в обзоре [4].

Применим вейвлетный анализ к ряду искусственно созданных изображений. Построим растр с масштабной инвариантностью (самоподобием) в виде системы черных полос (рис. 1,a) по алгоритму построения множества Кантора. Черный прямоугольник разобьем отрезками, параллельными боковым сторонам, на три равные части и удалим среднюю часть. Затем эту процедуру применим к каждой из оставшихся частей, и так далее. В качестве функции $f(t)$ используем одномерное распределение, полученное при сканировании растра вдоль горизонтальной прямой от $t = 0$ (левая граница изображения) до $t = 1$ (правая граница изображения). Значение функции пропорционально степени зачернения изображения. На вейвлетограмме, представленной на рис. 1,$б$ (вейвлет “сомбреро”), в системе координат $\{b, \log_2(1/a)\}$ (b — параметр трансляции, a — параметр масштабирования) построено соответствующее вейвлет-спектральное распределение: интенсивность зачернения пропорциональна квадрату модуля функции (10). Неоднородность зачернения в нижней, средней и верхней частях изображения на рис. 1,$б$ свидетельствует о существовании структурных элементов соответственно мелкого, среднего и крупного масштабов на исходном изображении (рис. 1,a). Иными словами, по виду нижней, средней и верхней частей вейвлетограммы можно судить о наличии мелко-, средне- и крупномасштабной

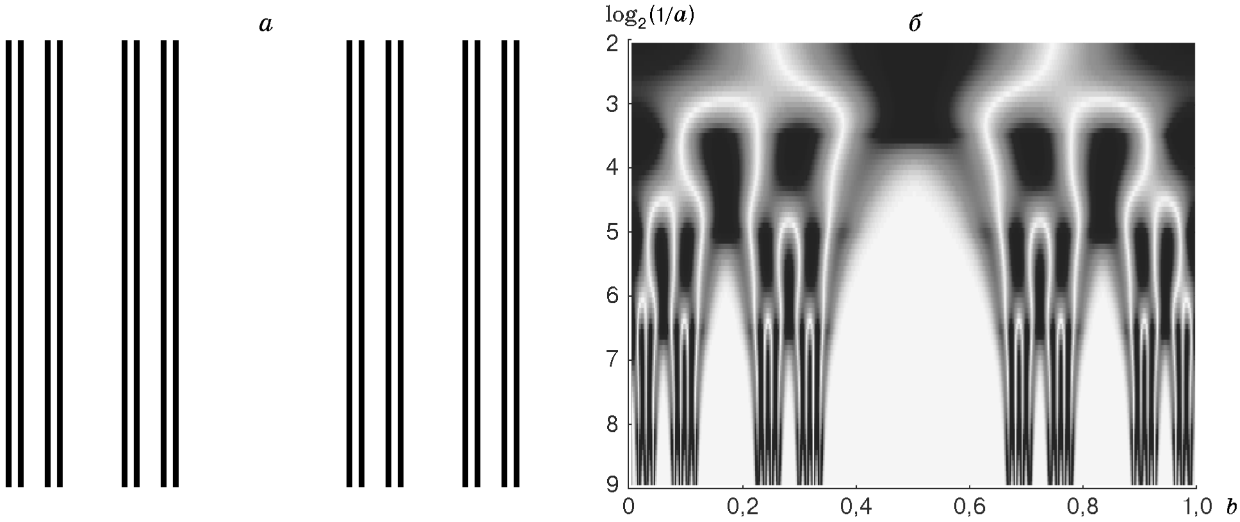

Рис. 1. Масштабно-инвариантный растр (*а*) и его вейвлетограмма (*б*)

структур. Особенность вейвлетограммы, представленной на рис. 1,*б*, состоит в повторяемости с некоторым нецелым шагом однотипных структурных элементов (светлых "арок" с темной сердцевиной) при движении по вертикали, что свидетельствует о наличии у растра самоподобия. Размер шага, который можно определить, измеряя, например, расстояния по вертикали между горизонтальными уровнями, на которых находятся вершины "арок", связан с дробной размерностью соответствующей фрактальной структуры. В нашем модельном примере (канторовское множество) шаг равен $\log_2 3$.

Рассмотрим двумерные изображения идеализированных кусочно-регулярных структур, являющихся моделями изображений реальных объектов. Процедура вейвлет-спектрального анализа позволяет выявить закономерности их строения.

На рис. 2,*а* изображена структура, состоящая из черных и белых квадратов, расположенных в шахматном порядке. Линейные размеры квадратов в правой половине структуры в четыре раза меньше, чем в левой. Одномерное распределение $f(t)$ получено путем

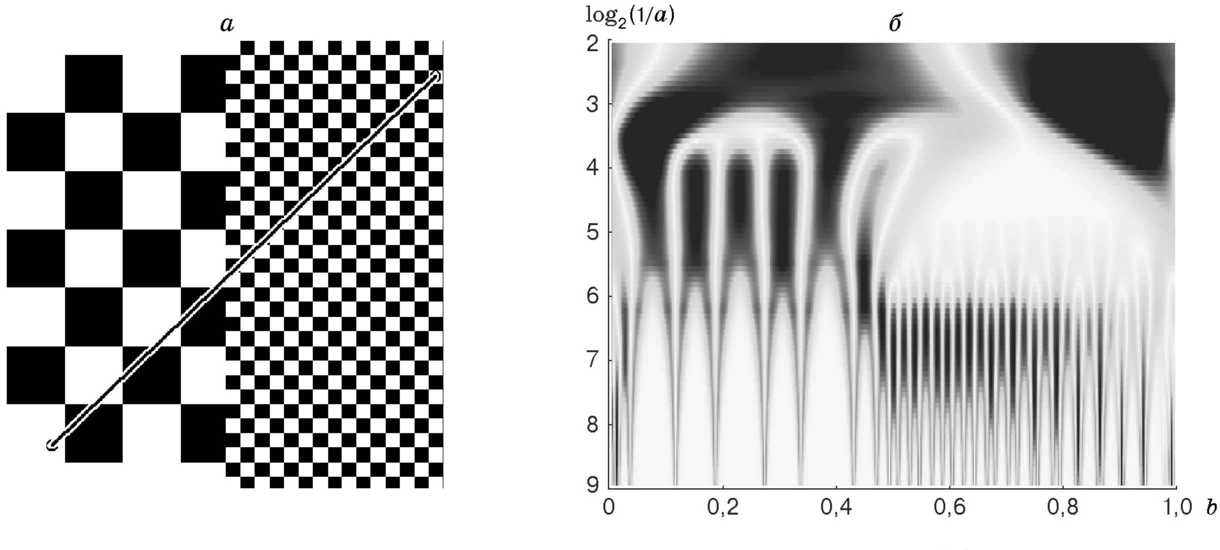

Рис. 2. Регулярная структура с отношением размеров элементов 1 : 4 (*а*) и ее вейвлетограмма (*б*)

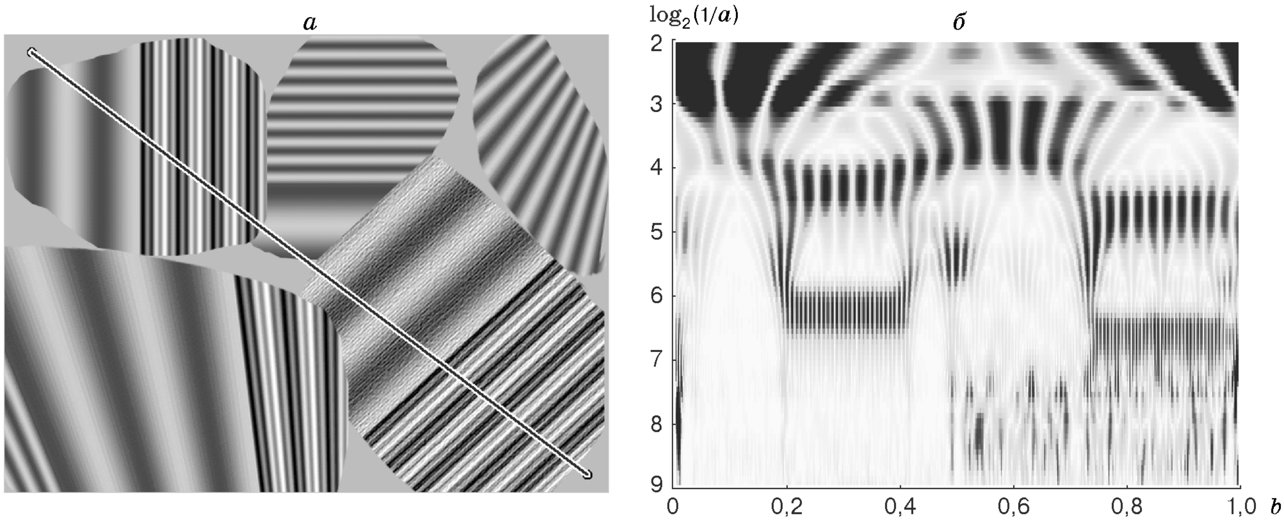

Рис. 3. Существенно двумерная модельная структура (*а*) и ее вейвлетограмма (*б*)

сканирования вдоль наклонного отрезка, показанного на рис. 2,*а*, от $t = 0$ (левый конец отрезка) до $t = 1$ (правый конец отрезка). На вейвлетограмме, построенной с помощью вейвлета “сомбреро” (рис. 2,*б*), границы горизонтальных полос, состоящих из чередующихся темных и светлых вертикальных столбцов, определяются условиями $4 < \log_2(1/a) < 6$ и $6 < \log_2(1/a) < 8$ соответственно для левой и правой половин изображения. Наличие горизонтальной полосы (или нескольких полос на разных уровнях) свидетельствует о периодической повторяемости элементов структуры с некоторым характерным периодом (или с несколькими периодами). В данном случае смещение полосы на две единицы вниз по логарифмической шкале масштабов при переходе из левой половины вейвлетограммы в правую показывает, что структура, представленная на рис. 2,*а* справа, может быть получена из структуры, представленной на рис. 2,*а* слева, путем пропорционального сжатия в $2^2 = 4$ раза.

Существенно двумерная структура, изображенная на рис. 3,*а*, состоит из ряда доменов, заполненных модельными текстурами. Расшифровка вейвлетограммы, построенной по результатам сканирования вдоль наклонного отрезка слева направо (использовался вейвлет Морле) (рис. 3,*б*), позволяет выявить следующие структурные особенности изображения:

— структура является периодической при $0 < b < 0{,}19$ (горизонтальная полоса $2 < \log_2(1/a) < 3{,}3$) и $0{,}52 < b < 0{,}73$ (горизонтальная полоса $3 < \log_2(1/a) < 4{,}1$);

— структура двоякопериодическая при $0{,}19 < b < 0{,}41$ (горизонтальные полосы $4 < \log_2(1/a) < 4{,}7$ и $6 < \log_2(1/a) < 6{,}7$, периоды различаются примерно в четыре раза), а также при $0{,}73 < b < 1$ (горизонтальные полосы $4{,}4 < \log_2(1/a) < 5{,}3$ и $6{,}4 < \log_2(1/a) < 7{,}3$);

— в области $0{,}5 < b < 1$ имеется высокочастотный шум (о его наличии свидетельствует неоднородность изображения на рис. 3,*б* при $7{,}5 < \log_2(1/a) < 9$).

С помощью вейвлетного анализа определим структуру брикетов, полученных холодным компактированием титановой губки в закрытой пресс-форме при давлениях 400 МПа (рис. 4,*а*) и 800 МПа (рис. 5,*а*). Результаты математического и натурного моделирования, исследования структуры и механических свойств полуфабрикатов, полученных брикетированием титановой губки и последующим выдавливанием прутков, приведены в работах [13, 14]. Эти исследования выполнены с учетом того, что полуфабрикаты и изделия из технически чистого титана с химическим составом, соответствующим составу губки,

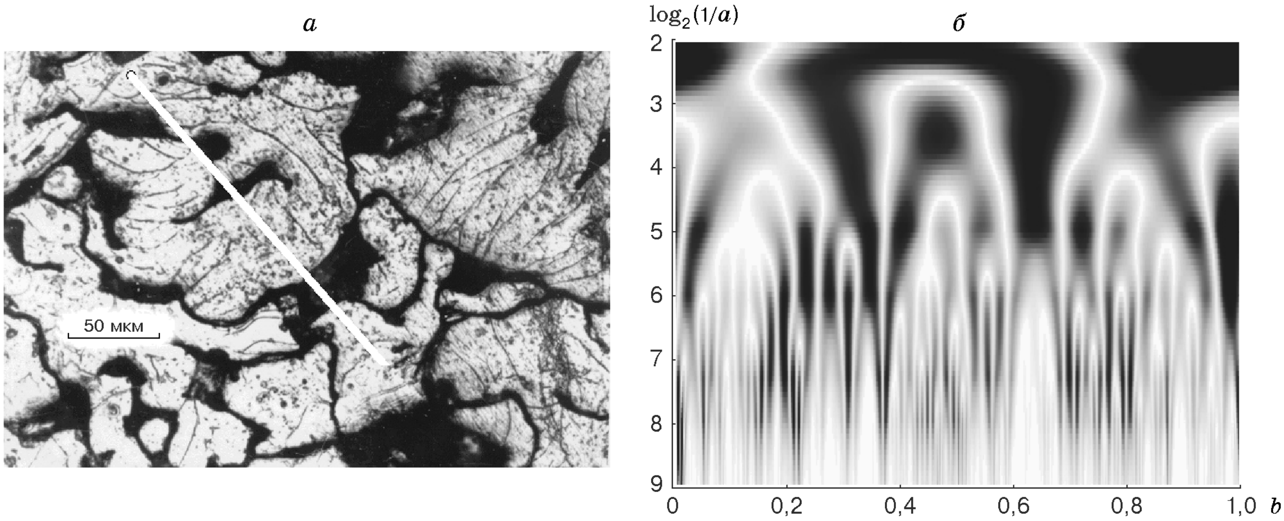

Рис. 4. Структура титановой губки, спрессованной под давлением 400 МПа (*а*), и ее вейвлетограмма (*б*)

не регламентируемые специальными требованиями, можно получить непосредственно из титановой губки по бесслитковой технологии с существенной экономией энергетических, материальных и трудовых затрат.

На рис. 4,*б* и 5,*б* представлены результаты вейвлет-преобразований (вейвлет "сомбреро") анализируемых сигналов вдоль выбранных направлений (белая линия длиной 200 и 290 мкм на рис. 4,*а* и 5,*а* соответственно). Следует отметить, что изображение вейвлет-спектра на рис. 4,*б* свидетельствует о наличии на уровне пяти единиц периодичности структуры титанового брикета с шагом 55 мкм, на рис. 5,*б* — о наличии на уровне четырех единиц периодичности структуры титанового брикета с шагом 115 мкм. Можно утверждать, что более пористый брикет (рис. 4,*а*) на уровне пяти единиц (среднемасштабный уровень) имеет периодичность структуры с расстоянием между структурными образованиями порядка 55 мкм, а более плотный брикет (рис. 5,*а*) на уровне четырех единиц

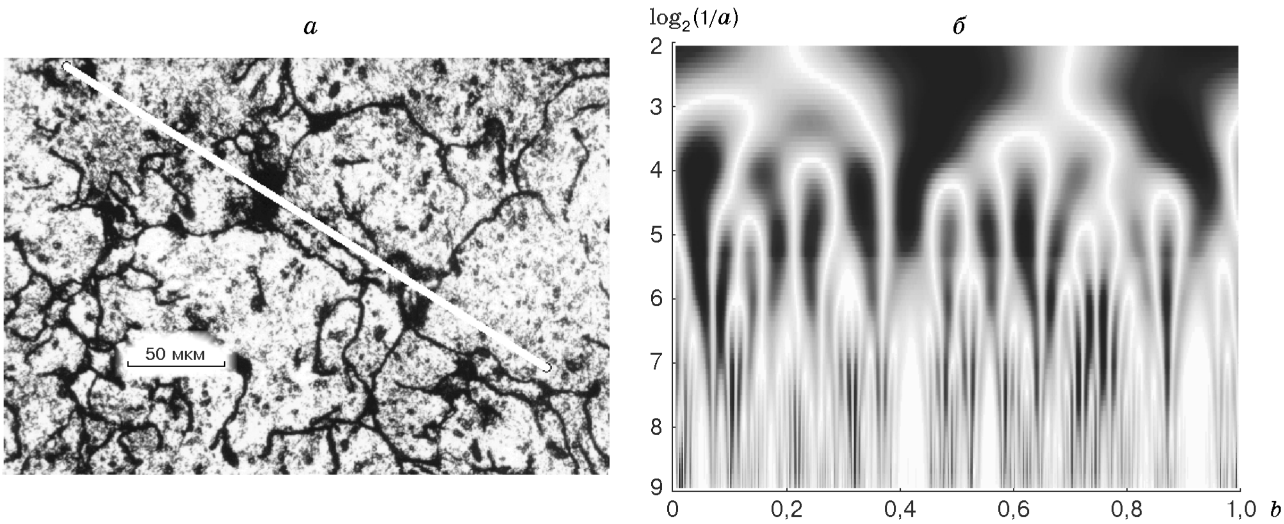

Рис. 5. Структура титановой губки, спрессованной под давлением 800 МПа (*а*), и ее вейвлетограмма (*б*)

(маломасштабный уровень) имеет периодическое строение структуры с шагом 115 мкм. При построении на уровне мезомеханики определяющих соотношений для структурно-неоднородных материалов (кривых упрочнения или уравнений состояния) и определении эффективных характеристик [1, 15] целесообразно учитывать масштабы структурных периодических образований.

Таким образом, вейвлет-анализ может быть использован для идентификации структурно-неоднородных деформируемых материалов. В частности, он позволяет определять наличие или отсутствие периодичности внешне хаотичных структур и масштабные уровни представительных объемов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Богачев И. Н., Вайнштейн А. А., Волков С. Д.** Статистическое металловедение. М.: Металлургия, 1984.
2. **Daubechies I.** The wavelets and filter banks: theory and design // IEEE Trans. Signal Process. 1989. V. 36, N 5. P. 674–693.
3. **Grossmann A., Morlet J.** Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 723–736.
4. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145–1170.
5. **Wu Y., Du R.** Feature extraction and assesment using wavelet packets for monitoring of machining processes // Mech. Syst. Signal Process. 1996. V. 10, N 1. P. 29–53.
6. **Walker J. S.** Fourier analysis and wavelet analysis // Notices Amer. Math. Soc. 1997. V. 44. P. 658.
7. **Bowman C., Passot T., Assenheimer M., Newell A. C.** A wavelet based algorithm for pattern analysis // Physica D. 1998. V. 119. P. 250–282.
8. **Torresani B.** An overwiev of wavelet analysis and time-frequency analysis (a minicourse) // Proc. of the Intern. workshop “Self-similar systems”, Dubna, Russia, July 30 — Aug. 7, 1998. Dubna: JINR, 1999. P. 9–34.
9. **Вейль Г.** Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
10. **Мойел Дж.** Квантовая механика как статистическая теория // Вопросы причинности в квантовой механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 208–243.
11. **Wigner E.** On the quantum corrections for thermodynamic eqiulibrium // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749–759.
12. **Татарский В. И.** Вигнеровское представление квантовой механики // Успехи физ. наук. 1983. Т. 139, № 4. С. 587–619.
13. **Залазинский А. Г., Новожонов В. И., Колмыков В. Л., Соколов М. В.** Моделирование прессования брикетов и выдавливания прутков из титановой губки // Металлы. 1997. № 6. С. 64–68.
14. **Новожонов В. И., Залазинский А. Г., Давыдова Л. С. и др.** Исследование возможности получения прутков из титановой губки // Цв. металлы. 1999. № 3. С. 91, 92.
15. **Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А.** Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 23/VIII 2000 г.