УДК 532.61.096

ДВУХСЛОЙНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЗУЩЕЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРЕХМЕРНОМ КАНАЛЕ

В. К. Андреев, Е. Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия
E-mails: andr@icm.krasn.ru, elena_cher@icm.krasn.ru

Исследуется задача о трехмерном стационарном ползущем течении двух несмешивающихся жидкостей в канале с твердыми параллельными стенками, на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая является теплоизолированной. На плоской поверхности раздела действуют термокапиллярные силы. Температура в жидкостях квадратично зависит от горизонтальных координат, а поле скоростей имеет специальный вид. Возникающая сопряженная задача для модели Обербека — Буссинеска является обратной и сводится к системе 10 интегродифференциальных уравнений. На поверхности раздела учитывается полное энергетическое условие. Рассматриваемая задача может иметь два решения, а в случае равенства потоков тепла — одно. Для каждого решения приведены примеры характерных течений. Исследовано влияние безразмерных физических и геометрических параметров на возникающие течения.

Ключевые слова: поверхность раздела, термокапиллярность, обратная задача.

DOI: 10.15372/PMTF20220113

Введение и постановка задачи. Течения типа течений Хименца [1] можно наблюдать как в макромасштабах (технологии гидроразрыва пласта в нефтедобывающей промышленности), так и в микромасштабах (жидкостные биочипы в медицине). Такие течения, известные также как течения вблизи критической точки, характеризуются наличием зон с более высокими, чем в окружающей области, давлением и температурой. Изучение характеристик подобных течений необходимо для оценки технологических параметров, а также для прогнозирования динамики и эволюции жидкого слоя. Наиболее эффективным способом исследования процессов в жидкости и получения оценочных характеристик являются точные решения определяющих уравнений. В настоящее время в литературе представлены решения задач, описывающих течения типа течений Хименца в различной геометрии: осесимметричный [2] и трехмерный [3, 4] аналоги решения Хименца, в том числе для течений в цилиндрической геометрии [5, 6]. Краткий обзор точных решений, близких к решению Хименца, приведен в [7]. В настоящей работе в рамках модельной задачи рассматривается трехмерное течение двух вязких несжимаемых теплопроводных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-01-00234) и Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2020-1631).

жидкостей с полем скоростей типа поля Хименца. На внутренней границе раздела задается условие баланса энергии, учитывающее изменение внутренней энергии поверхности раздела. Как показано в работе [8], учет расхода энергии на деформацию поверхности может оказать существенное влияние на характеристики течений жидкостей с малыми вязкостями или в условиях микроконвекции. В настоящей работе для оценки этого влияния на возникающие течения изучена модельная линейная задача, в которой единственным нелинейным членом является слагаемое в условии баланса энергии на границе раздела.

Рассматривается трехмерное плоское стационарное течение двух вязких теплопроводных жидкостей в слое, где $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $0 < z < l_2$. Жидкости контактируют через общую поверхность раздела $z = l_1 < l_2$ (l_j — постоянные). Жидкость 1 занимает слой $0 < z < l_1$, жидкость 2 — слой $l_1 < z < l_2$. Плоскости $z = 0$, $z = l_2$ представляют собой твердые неподвижные стенки, сила тяжести направлена перпендикулярно слоям. В качестве математической модели движения жидкостей используются уравнения Обербека — Буссинеска, решения которых находятся в виде (здесь и далее $j = 1, 2$)

$$
\begin{gathered}
u_j(x,z) = (f_j(z) + h_j(z))x, \quad v_j(y,z) = (f_j(z) - h_j(z))y, \quad w_j(z) = -2\int\limits_{z_0}^{z} f_j(\xi)\,d\xi,\\
\frac{1}{\rho_j}\,p_j(x,y,z) = b_j(z)x^2 + d_j(z)y^2 + q_j(z), \quad T_j(x,y,z) = a_j(z)x^2 + c_j(z)y^2 + \theta_j(z),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $u_j(x,z)$, $v_j(y,z)$, $w_j(z)$ — проекции векторов скоростей на оси x, y, z соответственно; $p_j(x,y,z)$ — давления; $T_j(x,y,z)$ — абсолютные температуры; ρ_j — постоянные плотности. Течения (в том числе нестационарные) с таким полем скоростей для системы Навье — Стокса предложено рассматривать в [9, 10]. Однако идея искать точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных, по-видимому, принадлежит К. Линю [11].

Подставляя решение (1) в систему уравнений Обербека — Буссинеска, запишем полученные уравнения в безразмерном виде

$$
\operatorname{Mn}\Big(F_j^2 + H_j^2 - 2F_{j\xi}\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi} F_j(\zeta)\,d\zeta\Big) + \operatorname{Gr}_j\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi}(A_j(\zeta) + C_j(\zeta))\,d\zeta = \operatorname{Pr}_j l^2\varepsilon_j F_{j\xi\xi} + N_{j1}; \tag{2}
$$

$$
2\operatorname{Mn}\Big(F_jH_j - H_{j\xi}\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi} F_j(\zeta)\,d\zeta\Big) + \operatorname{Gr}_j\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi}(A_j(\zeta) - C_j(\zeta))\,d\zeta = \operatorname{Pr}_j l^2\varepsilon_j H_{j\xi\xi} + N_{j2}; \tag{3}
$$

$$
2\operatorname{Mn}\Big(A_j(F_j + H_j) - A_{j\xi}\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi} F_j(\zeta)\,d\zeta\Big) = l^2\varepsilon_j A_{j\xi\xi}; \tag{4}
$$

$$
2\operatorname{Mn}\Big(C_j(F_j - H_j) - C_{j\xi}\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi} F_j(\zeta)\,d\zeta\Big) = l^2\varepsilon_j C_{j\xi\xi}; \tag{5}
$$

$$
-2\operatorname{Mn}Q_{j\xi}\int\limits_{z_0/l_2}^{\xi} F_j(\zeta)\,d\zeta = l^2\varepsilon_j Q_{j\xi\xi} + 2\varepsilon_j(A_j + C_j), \tag{6}
$$

где Pr_j, Gr_j — числа Прандтля и Грасгофа; Mn — число Марангони. В интегральных выражениях при $j=1$ $z_0=0$, при $j=2$ $z_0=l_1$, следовательно, $0<\xi<l$ в первом слое и $l<\xi<1$ во втором слое. В уравнениях (2), (3) N_{j1}, N_{j2} — произвольные постоянные.

На твердых границах выполнены условия прилипания для скоростей, вследствие чего получаем равенства

$$F_1(0)=H_1(0)=0, \qquad F_2(1)=H_2(1)=\int\limits_l^1 F_2(\xi)\,d\xi=0. \tag{7}$$

На нижней твердой стенке задана температура, а верхняя твердая стенка является теплоизолированной:

$$A_1(0)=A_1^s, \quad C_1(0)=C_1^s, \quad Q_1(0)=Q_1^s, \quad A_{2\xi}(1)=C_{2\xi}(1)=Q_{2\xi}(1)=0. \tag{8}$$

На границе раздела $z=l$ имеют место равенства скоростей и температур:

$$F_1(l)=F_2(l), \quad H_1(l)=H_2(l), \quad Q_1(l)=Q_2(l), \quad A_1(l)=A_2(l), \quad C_1(l)=C_2(l). \tag{9}$$

Предположим, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры: $\sigma(T)=\sigma_0-\varkappa(T-T_0)$, σ_0, $\varkappa$, T_0 — заданные положительные постоянные, $T(x,y,l_1)$ — температура на этой границе. Тогда условие для касательных напряжений сводится к двум соотношениям

$$F_{2\xi}(l)-\mu F_{1\xi}(l)=-\mathrm{Mn}\,(A_1(l)+C_1(l)), \quad H_{2\xi}(l)-\mu H_{1\xi}(l)=-\mathrm{Mn}\,(A_1(l)-C_1(l)). \tag{10}$$

Кинематическое условие для неподвижной недеформируемой границы раздела эквивалентно интегральному равенству

$$\int\limits_0^l F_1(\xi)\,d\xi=0. \tag{11}$$

Полное энергетическое условие с учетом (1) сводится к соотношениям

$$\begin{gathered} A_{2\xi}(l)-kA_{1\xi}(l)=2EA_1(l)F_1(l), \qquad C_{2\xi}(l)-kC_{1\xi}(l)=2EC_1(l)F_1(l), \\ Q_{2\xi}(l)-kQ_{1\xi}(l)=2EQ_1(l)F_1(l). \end{gathered} \tag{12}$$

В уравнениях (2)–(6) и граничных условиях (7)–(12) введены следующие безразмерные переменные и параметры ($k=1,2$):

$$\xi=\frac{z}{l_2}, \quad \chi=\frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad \mu=\frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad k=\frac{k_1}{k_2}, \quad l=\frac{l_1}{l_2}<1, \quad \varepsilon_j=\frac{\chi_j}{\chi_1}, \quad \mathrm{Pr}_j=\frac{\nu_j}{\chi_j},$$

$$N_{jk}=\frac{l_1^4 n_{jk}}{\chi_1^2\,\mathrm{Mn}}, \quad F_j(\xi)=\frac{l_1^2}{\chi_1\,\mathrm{Mn}}\,f_j(z), \quad H_j(\xi)=\frac{l_1^2}{\chi_1\,\mathrm{Mn}}\,h_j(z), \quad A_j(\xi)=\frac{a_j(z)}{a^*\,\mathrm{Mn}},$$

$$C_j(\xi)=\frac{c_j(z)}{a^*\,\mathrm{Mn}}, \quad Q_j(\xi)=\frac{\theta_j(z)}{a^* l_1^2\,\mathrm{Mn}}, \quad \mathrm{Gr}_j=\frac{a^* l_2 l_1^4 g\beta_j}{\chi_1^2}, \quad \mathrm{Mn}=\frac{\varkappa a^* l_1^2 l_2}{\mu_2\chi_1}, \quad E=\frac{\varkappa^2 a^* l_2^2}{\mu_2 k_2}.$$

Здесь ν_j, μ_j, χ_j, k_j, β_j — постоянные кинематические и динамические вязкости, температуропроводности, теплопроводности и коэффициенты объемного расширения соответственно; N_{jk} — безразмерные градиенты давлений вдоль горизонтальных координат; $j=1,2$, $k=1,2$; E — энергетический параметр, характеризующий энергию, затрачиваемую на деформацию границы раздела термокапиллярными силами. В предположении, что $a^*=\max\{|a_1(0)|,|c_1(0)|\}>0$ и характерная температура на границе раздела равна

$\theta^* = a^* l_1^2$, Gr_j, Mn, E являются положительными числами. Заметим, что локальное изменение внутренней энергии границы раздела за счет поглощения (высвобождения) теплоты порождает неоднородность температурного поля (термокапиллярный эффект). Влияние теплоты образования межфазной поверхности на возникновение градиентов температуры и дополнительных потоков тепла в задаче о движении пузырьков выявлено в [8].

Замечание 1. Поставленная начально-краевая задача (2)–(12) является обратной, так как постоянные N_{j1}, N_{j2} следует находить вместе с ее решением. Для полной определенности этой задачи необходимо задать еще два условия

$$\int\limits_0^l H_1(\xi)\,d\xi = 0, \qquad \int\limits_l^1 H_2(\xi)\,d\xi = 0, \tag{13}$$

означающие наряду с интегральными равенствами (7), (11) замкнутость течений в слоях [12].

Замечание 2. С использованием известных размерных функций a_j, c_j функции b_j, d_j определяются квадратурами

$$b_j(z) = g\beta_j \int\limits_{z_0}^{z} a_j(\xi)\,d\xi - n_{j1}, \qquad d_j(z) = g\beta_j \int\limits_{z_0}^{z} c_j(\xi)\,d\xi - n_{j2},$$

а давления в жидкостях определяются следующим образом:

$$\frac{1}{\rho_j}\,p_j = \Big(g\beta_j \int\limits_{z_0}^{z} a_j(\xi)\,d\xi - n_{j1}\Big)x^2 + \Big(g\beta_j \int\limits_{z_0}^{z} c_j(\xi)\,d\xi - n_{j2}\Big)y^2 - 2\nu_j f_j - gz + {} + g\beta_j \int\limits_{z_0}^{z} \theta_j(\xi)\,d\xi - 2\Big(\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi, t)\,d\xi\Big)^2 + q_{j0}$$

(q_{j0} — произвольные постоянные).

Решение модельной задачи для ползущих течений. Течения при малых числах Марангони принято называть ползущими. Малость параметра может достигаться за счет как физических параметров жидкости, так и толщины канала [13, 14]. Пусть $\mathrm{Mn} \to 0$, тогда уравнения (2)–(6) являются линейными, а правые части граничных условий (10) равны нулю. Однако соотношения (12) остаются нелинейными. Проведя несложные, но достаточно громоздкие преобразования, получаем

$$\begin{gathered} A_1^0(\xi) = \alpha_1\xi + A_1^s, \qquad A_2^0(\xi) = \alpha_2 \equiv \alpha_1 l + A_1^s, \\ C_1^0(\xi) = \gamma_1\xi + C_1^s, \qquad C_2^0(\xi) = \gamma_2 \equiv \gamma_1 l + C_1^s, \\ Q_1^0(\xi) = -\frac{2}{l^2}\Big(\frac{\alpha_1+\gamma_1}{6}\,\xi^3 + \frac{A_1^s + C_1^s}{2}\,\xi^2\Big) + R_1\xi + Q_1^s, \\ Q_2^0(\xi) = -(\alpha_2+\gamma_2)l^{-2}\xi^2 + R_2\xi + R_3; \end{gathered} \tag{14}$$

$$F_1^0(\xi) = \frac{1}{\mathrm{Pr}_1\, l^2}\Big[\,\mathrm{Gr}_1\,\Big(\frac{\alpha_1+\gamma_1}{24}\,\xi^4 + \frac{A_1^s + C_1^s}{6}\,\xi^3\Big) - \frac{N_{11}\xi^2}{2}\Big] + D_1\xi,$$

$$
\begin{gathered}
F_2^0(\xi)=\frac{\chi}{\Pr_2 l^2}\Big[\,\mathrm{Gr}_2\,(\alpha_2+\gamma_2)\Big(\frac{\xi^3-1}{6}-\frac{l}{2}\,(\xi^2-1)\Big)-\frac{N_{21}}{2}\,(\xi^2-1)\Big]+D_2(\xi-1),\\
H_1^0(\xi)=\frac{1}{\Pr_1 l^2}\,\Big[\,\mathrm{Gr}_1\,\Big(\frac{\alpha_1-\gamma_1}{24}\,\xi^4+\frac{A_1^s-C_1^s}{6}\,\xi^3\Big)-\frac{N_{12}\xi^2}{2}\Big]+D_3\xi, \qquad (15)\\
H_2^0(\xi)=\frac{\chi}{\Pr_2 l^2}\,\Big[\,\mathrm{Gr}_2\,(\alpha_2-\gamma_2)\Big(\frac{\xi^3-1}{6}-\frac{l}{2}\,(\xi^2-1)\Big)-\frac{N_{22}}{2}\,(\xi^2-1)\Big]+D_4(\xi-1).
\end{gathered}
$$

Постоянные $D_1,\dots,D_4$ находятся из интегральных равенств (7), (11), (13). В силу (14) $\alpha_2+\gamma_2=(\alpha_1+\gamma_1)l+A_1^s+C_1^s$, $\alpha_2-\gamma_2=(\alpha_1-\gamma_1)l+A_1^s-C_1^s$. Для определения неизвестных α_1, γ_1, R_1, R_2, R_3, N_{11}, N_{21}, N_{12}, N_{22} использовались последнее условие (8), первые три условия (9), условия (10), (12). Вид постоянных α_1, γ_1, R_1, R_2, R_3, N_{11}, N_{21}, N_{12}, N_{22} не приводится вследствие их громоздкости. Заметим, что неизвестный параметр α_1 удовлетворяет квадратному уравнению. Следовательно, задача о ползущем течении может иметь два решения. Очевидно, что при $E=0$ существует единственное решение. Анализ полученных решений (14), (15) позволяет сделать следующие выводы: при $A_1^s=C_1^s=0$ единственным решением рассматриваемой задачи является решение, соответствующее состоянию покоя; при $A_1^s=C_1^s$ $N_{12}=N_{22}=0$, $N_{11}\neq 0$, $N_{21}\neq 0$; при $A_1^s=0$, $C_1^s\neq 0$ $N_{12}=-N_{11}$, $N_{22}=-N_{21}$; при $A_1^s\neq 0$, $C_1^s=0$ $N_{12}=N_{11}$, $N_{22}=N_{21}$.

Расчеты проводились для системы трансформаторное масло — муравьиная кислота с безразмерными параметрами $\mu=11{,}4$, $\chi=0{,}71$, $k=0{,}41$, $\beta=\beta_1\beta_2^{-1}=1{,}46$, $\Pr_1=308{,}2$, $\Pr_2=14{,}2$. На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов для случая $E=0$, т. е. когда отсутствует влияние изменения межфазной энергии и существует единственное решение задачи о ползущем течении. На рис. 1 приведены поля температур и скоростей в слоях различной толщины в плоскости (y,ξ) $(y,\xi,T$ — безразмерные переменные). При значении $l\leqslant 0{,}4$ в каждом слое возникает один вихрь, причем во втором слое имеет место возвратное течение (жидкость движется в направлении, противоположном направлению оси z). При $l=0{,}5$ в первом слое течение становится двухвихревым, а с увеличением l — полностью возвратным. Во втором слое структура течения также меняется: при $l>0{,}8$ возникает один вихрь — жидкость движется в положительном направлении оси z. С изменением толщины слоев меняется также температурное поле: при $l=0{,}4$ в нижнем слое формируется термоклин, при $l>0{,}8$ температура в слоях распределена одинаково.

На рис. 2 представлены профили скоростей $W(\xi)$ в слоях при различных значениях C_1^s (ситуация для A_1^s аналогична). Здесь и далее функция $W(\xi)$ совпадает с функциями $W_j(\xi)$, $j=1,2$ в своих областях определения. Заметим, что для случая $A_1^s=-C_1^s$ единственным решением задачи является решение, соответствующее состоянию покоя. Также исследовалось влияние чисел Грасгофа Gr_j на возникающее течение: с ростом Gr_j значение модуля безразмерной скорости $W(\xi)$ увеличивается.

Для случая $E\neq 0$ найдено два решения. На рис. 3 показаны профили скоростей $W^1(\xi)$ и $W^2(\xi)$, соответствующие каждому решению при $E=0{,}5$ (верхний индекс — номер решения). Профиль скорости $W^1(\xi)$ аналогичен профилю скорости $W(\xi)$ при $E=0$, $\big|\max\limits_{\xi\in[0,1]}|W^1(\xi)|-\max\limits_{\xi\in[0,1]}|W(\xi)|\big|\approx 10^{-5}$ и влияние параметра E на возникающее течение, соответствующее первому решению, незначительно. На рис. 4 приведены профили скоростей $W^2(\xi)$ в слоях при различных значениях безразмерного параметра E. Видно, что при увеличении E значение безразмерной скорости $W^2(\xi)$ уменьшается.

Заключение. В работе решена задача о трехмерном двухслойном движении со специальным полем скоростей, которая сведена к сопряженной задаче для системы одномерных интегродифференциальных уравнений. Полученная задача является обратной относительно градиентов давлений вдоль горизонтальных координат. В случае стационарного течения при малых числах Марангони решение найдено в аналитическом виде. Показано, что в

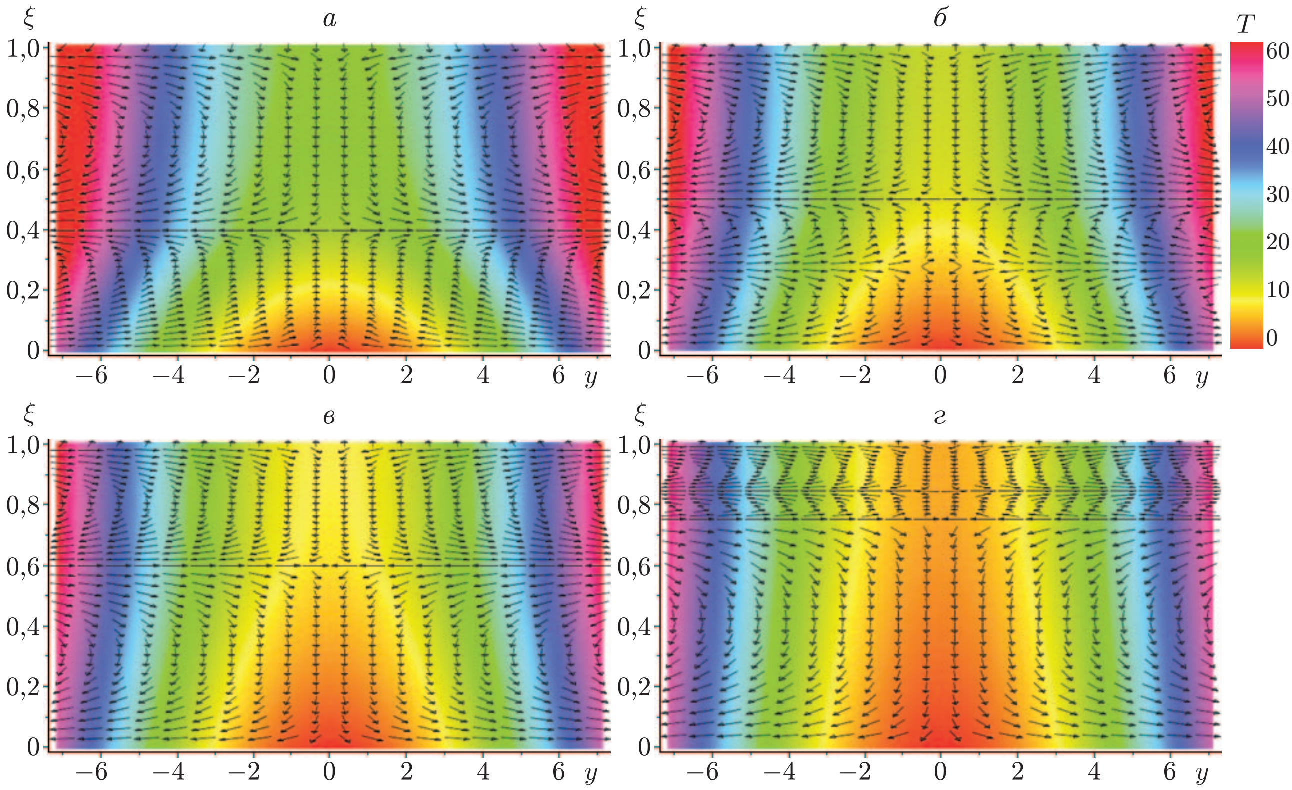

Рис. 1. Поля температур и скоростей в слоях при различных значениях толщины: *а* — $l = 0{,}4$, *б* — $l = 0{,}5$, *в* — $l = 0{,}6$, *г* — $l = 0{,}75$

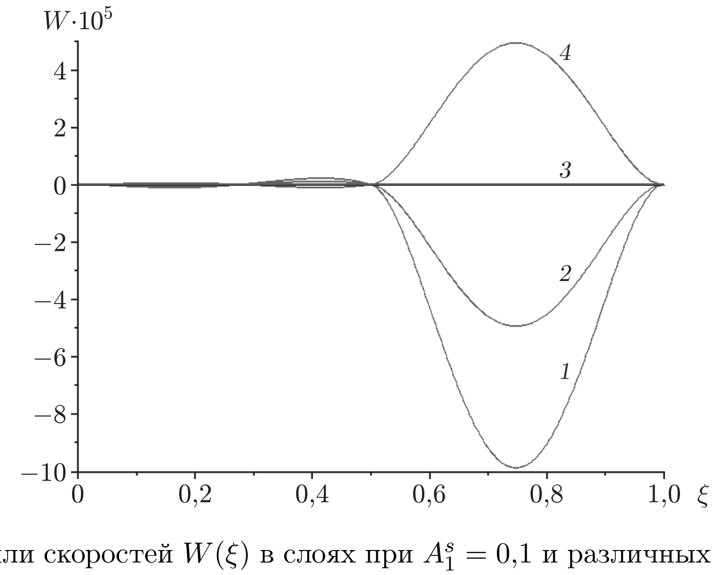

Рис. 2. Профили скоростей $W(\xi)$ в слоях при $A_1^s = 0{,}1$ и различных значениях C_1^s: *1* — $C_1^s = 0$, *2* — $C_1^s = -0{,}05$, *3* — $C_1^s = -0{,}1$, *4* — $C_1^s = -0{,}15$

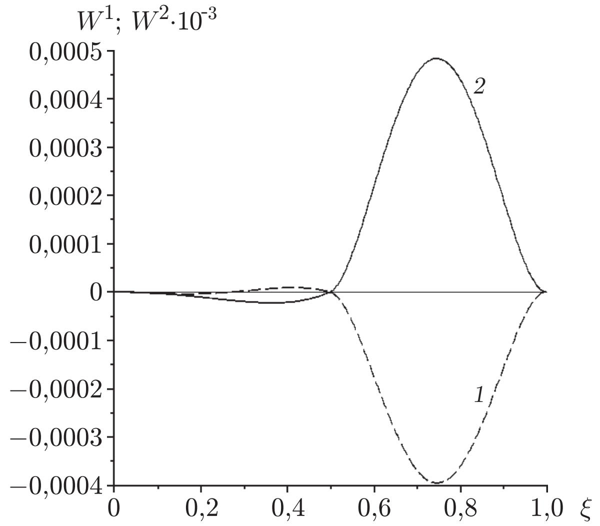

Рис. 3

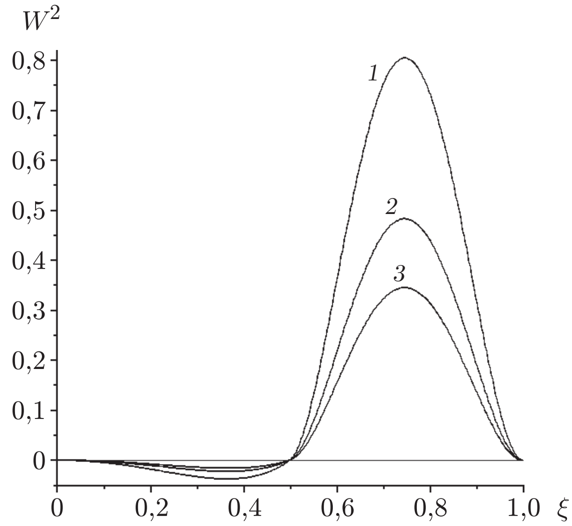

Рис. 4

Рис. 3. Профили скоростей $W^1(\xi)$ (*1*) и $W^2(\xi)$ (*2*) в слоях при $E = 0{,}5$

Рис. 4. Профили скоростей $W^2(\xi)$ в слоях при различных значениях безразмерного параметра E:
1 — $E = 0{,}3$, *2* — $E = 0{,}5$, *3* — $E = 0{,}7$

зависимости от значений физических параметров может существовать до двух стационарных режимов. Для системы трансформаторное масло — муравьиная кислота исследовано влияние безразмерных физических и геометрических параметров на возникающие течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hiemenz K.** Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // Dinglers Poliytech. J. 1911. V. 326. P. 321–440.
2. **Howann F.** Der einfluss grosser zahigkeit bei der stromung um den zylinder und um die kugel // Z. angew. Math. Mech. 1936. Bd 16. S. 153–164.
3. **Howarth L.** The boundary layer in three-dimensional flow. 2. The flow near a stagnation point // Philos. Mag.: Ser. 7. 1951. V. 42, N 335. P. 1433–1440.
4. **Davey A.** Boundary-layer flow at a saddle point of attachment // J. Fluid Mech. 1961. V. 10, N 4. P. 593–610.
5. **Wang C. Y.** Axisymmetric stagnation flow on a cylinder // Quart. Appl. Math. 1974. V. 32, N 2. P. 207–213.
6. **Gorla R. S. R.** Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder // Develop. Mech. 1977. V. 9. P. 286–288.
7. **Bekezhanova V. B., Andreev V. K., Shefer I. A.** Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // Interfacial Phenomena Heat Transfer. 2019. V. 7, iss. 4. P. 345–364.
8. **Torres F. E., Helborzheimer E.** Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, iss. 3. P. 537–549.
9. **Andreev V. K.** Mathematical models of convection / V. K. Andreev, Yu. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. Berlin; Boston: De Gruyter, 2020.

10. **Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д.** Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
11. **Lin C. C.** Note on a class of exact solutions in magneto hydrodynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 391–395.
12. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
13. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 59–64.
14. **Адмаев О. В., Андреев В. К.** Нестационарное движение пузырька под действием термокапиллярных сил // Математическое моделирование в механике / Вычисл. центр СО РАН в г. Красноярске. Красноярск, 1997. С. 4–9. Деп. в ВИНИТИ 12.02.97, № 446-В97.

Поступила в редакцию 6/X 2020 г.,
после доработки — 28/XII 2020 г.
Принята к публикации 25/I 2021 г.