

**ИССЛЕДОВАНИЕ $1/z^2$ -ФИЛЬТРАЦИИ
В АЛГОРИТМАХ ТОМОГРАФИИ***

А. В. Лихачев

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: ipm1@iae.nsk.su*

Исследована фильтрация проекций в томографических алгоритмах, основанная на регуляризации обобщенной функции $1/z^2$. В процессе вычислительного эксперимента показано, что, меняя размер носителя фильтра, можно существенно улучшить качество томограмм. Из сравнения результатов реконструкции с помощью алгоритма $1/z^2$ -фильтрации и алгоритма Шеппа – Логана видно, что последний уступает по точности реконструкции при небольшом числе ракурсов наблюдения и наличии высокого уровня шума в проекционных данных.

Введение. В настоящее время широко распространены методы томографической реконструкции внутренней структуры объектов. Обзор областей их применения, а также изложение математического аппарата (основы томографии) можно найти, например, в монографиях [1–4]. Одной из важнейших задач томографии является восстановление внутренней структуры твердых тел путем зондирования их проникающим излучением. Классический подход к ее решению состоит в следующем. Измерения производятся в одной плоскости, и по данным этих измерений реконструируется слой объекта. Система регистрации смещается вдоль некоторой оси, что позволяет последовательно восстанавливать слои, перпендикулярные ей.

Обычно относительно процесса измерения данных для томографической реконструкции делается ряд предположений, в результате чего с математической точки зрения задача сводится к определению функции по набору интегралов от нее вдоль некоторого множества прямых. В частности, в классической задаче томографии восстанавливается функция двух переменных по ее интегралам вдоль прямых. Это является известной в интегральной гео-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-81000).

метрии задачей обращения двумерного преобразования Радона [2]:

$$f(\varphi, l) \equiv \mathbf{R}g(\varphi, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sqrt{l^2 + p^2}, \varphi + \arctg(p/l)) dp, \quad (1)$$

где $l, p \in R^1$; $\varphi \in [0; 2\pi[$. При фиксированном угловом параметре φ выражение (1) обычно называют одномерной проекцией. Далее она будет обозначаться как $f_\varphi(l)$. Значения проекции $f_\varphi(l)$ представляют собой интегралы от функции $g(p, \psi)$ вдоль семейства параллельных прямых, заданного углом наклона φ , при этом переменная l является расстоянием от прямой до начала координат. В случае когда данные регистрируются с помощью, например, линейки детекторов, для того чтобы получить проекцию, источник должен быть унесен на бесконечность. В реальной ситуации расстояние от источника до объекта всегда конечно. Тем не менее это не умаляет практического значения формулы обращения [1]

$$g(p, \psi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p \cos(\varphi - \psi) - l} \frac{\partial}{\partial l} f_\varphi(l) dl d\varphi \quad (2)$$

для двумерного преобразования Радона (1). Во-первых, при достаточно большом удалении источника от объекта погрешность, обусловленная непараллельностью лучей, вдоль которых производятся измерения, незначительна. Во-вторых, может быть проведена параллелизация проекционных данных [5].

Внешний интеграл по углу в выражении (2) называется обратным проецированием, внутренний – представляет собой фильтрацию одномерных проекций. При численной реализации последней операции возникают затруднения: производная проекции сворачивается с сингулярной функцией, при этом внутренний интеграл в (2) понимается в своем главном значении. Различные способы решения этой проблемы приводят к различным алгоритмам томографической реконструкции. В данной работе исследуется один из таких алгоритмов, предложенный в [4], будем называть его алгоритмом $1/z^2$ -фильтрации. Путем вычислительного эксперимента показано, что $1/z^2$ -фильтрация обладает рядом свойств, которые обеспечивают ей преимущества по сравнению с другими алгоритмами, например с широко распространенным алгоритмом Шеппа – Логана [6].

$1/z^2$ -фильтрация проекций. В работе [4] приведена формула обращения двумерного преобразования Радона, полученная в результате регуляризации обобщенной функции $1/z^2$:

$$g(p, \psi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\varphi(z(p, \psi) + l) + f_\varphi(z(p, \psi) - l) - 2f_\varphi(z(p, \psi))}{l^2} dl d\varphi, \quad (3)$$

где $z(p, \psi) = p \cos(\varphi - \psi)$. На основе выражения (3) в [4] был построен численный алгоритм, в котором внутренний интеграл (фильтрация) вычислялся

как свертка проекции со следующим ядром:

$$K(p_i) = \begin{cases} -\frac{8}{h\pi^2} \ln(0,5), & p_i = 0, \\ -\frac{1}{h\pi^2} (-9,5 \ln(h) + 20 \ln(2h) - 10,5 \ln(3h)), & p_i = \pm h, \\ -\frac{1}{h\pi^2} (8 \ln(h) - 36 \ln(2h) + 48 \ln(3h) - 20 \ln(4h)), & p_i = \pm 2h, \\ -\frac{1}{h^3 \pi} (2(3p_i + 2h)(p_i + h) \ln |p_i + h| + 2(3p_i - 2h)(p_i - h) \ln |p_i - h| - \\ - 9p_i^2 \ln |p_i| - 0,5(3p_i + 4h)(p_i + 2h) \ln |p_i + 2h| - \\ - 0,5(3p_i - 4h)(p_i - 2h) \ln |p_i - 2h|), & p_i \neq 0, \pm h, \pm 2h, \\ 0, & |i| > L/2, \end{cases} \quad (4)$$

где h – шаг сетки, задаваемой на проекции; L – число узлов на носителе фильтра.

В данной работе алгоритм $1/z^2$ -фильтрации сравнивается с одним из наиболее часто употребляемых в томографии алгоритмов, который был предложен Шеппом и Логаном [6]. В алгоритме Шеппа – Логана фильтрация проекций в формуле обращения двумерного преобразования Радона осуществляется как свертка с ядром

$$K(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 h^2} \frac{1}{1 - 4i^2}, & i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0, & |i| > L/2. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть имеется проекция $f(p_i)$, заданная в N узлах равномерной сетки с шагом h . Ее свертка в дискретном виде с ядром $K(p_i)$, отличным от нуля, в L узлах сетки с таким же шагом записывается следующим образом:

$$\tilde{f}_\varphi(p_i) = h \sum_{j=1}^L f_\varphi(p_j) K(p_{i-j}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

В формуле (6) свертка $\tilde{f}(p_i)$ вычисляется в узлах, в которых известна проекция $f(p_i)$. При этом обязательно выполнение равенства $N = L$. На практике носитель проекции всегда ограничен, поэтому в случае $N < L$ получается тот же результат, что и при $N = L$. Однако при $N > L$ он будет иным. Фильтр Шеппа – Логана (5) построен таким образом, что чем больше его носитель, тем более точно он удовлетворяет свойствам, которыми обладает сингулярное ядро свертки в формуле (2). В связи с этим наилучшей томографической реконструкции с помощью алгоритма Шеппа – Логана следует ожидать при

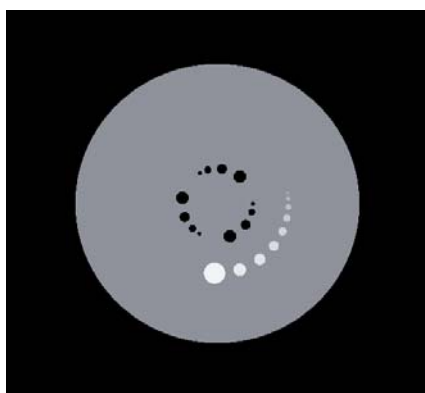


Рис. 1

$N = L$, именно это равенство и используется в классической его реализации. Несколько расчетов, проведенных в предлагаемой работе, также подтвердили правильность такого выбора. При $N > L$ качество томографической реконструкции этим алгоритмом значительно хуже. Фильтр (4) в отличие от фильтра Шеппа – Логана строится исходя из других принципов, поэтому влияние размера его носителя на качество томографического восстановления может быть иным. В данной работе это влияние изучается посредством численного моделирования.

Вычислительный эксперимент. Алгоритм $1/z^2$ -фильтрации исследовался путем вычислительного эксперимента. Для этого использовался двумерный математический фантом, представляющий собой круг с несколькими отверстиями и областями с большей амплитудой, которые также имеют круглую форму. Изображение фантома в градациях серого цвета представлено на рис. 1. Контраст маленьких кругов на фоне большого составляет от 20 до 2 %. Расчеты производились на квадратной сетке 1025×1025 узлов. Проекционные данные моделировались как набор одномерных проекций в параллельных лучах, которые были распределены равномерно по углу φ в интервале от 0 до 360° . На каждой проекции задавалась сетка в $N = 1025$ узлов. В расчетах варьировалось число проекций M , а также уровень шумов. Результаты реконструкции, полученные с помощью алгоритма Шеппа – Логана и алгоритма $1/z^2$ -фильтрации, сравнивались между собой.

Для контроля точности реконструкции использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение Δ между математическим фантомом и восстановленной функцией. Величина Δ вычисляется по формуле

$$\Delta = \|g_M - g\| / \|g_M\|, \quad (7)$$

где g_M – точная модель (математический фантом); g – восстановленное решение; $\|\cdot\|$ – евклидова норма в конечномерном векторном пространстве.

В процессе вычислительного эксперимента было показано, что влияние размера носителя фильтра hL на качество томографической реконструкции алгоритмом $1/z^2$ -фильтрации действительно имеет место. Зависимости ошибки Δ от L представлены на рис. 2. Кривые 1–3 соответствуют числу проекций M , равному 15, 25 и 50. Из рисунка видно, что при малом количестве ракурсов наблюдения зависимости $\Delta(L)$ имеют минимум, который сдвигается в сторону больших L при увеличении их числа. Из проведенных вычислений следует, что для $M \geq 50$ минимум $\Delta(L)$ достигается при $N = L$.

Зависимости ошибки Δ от числа проекций M показаны на рис. 3. Кривые 1 и 2 относятся к $1/z^2$ -фильтрации и фильтрации Шеппа – Логана соответственно. Значения ошибки Δ для алгоритма $1/z^2$ -фильтрации приводятся в минимуме зависимости $\Delta(L)$. Как следует из рисунка, при небольшом числе

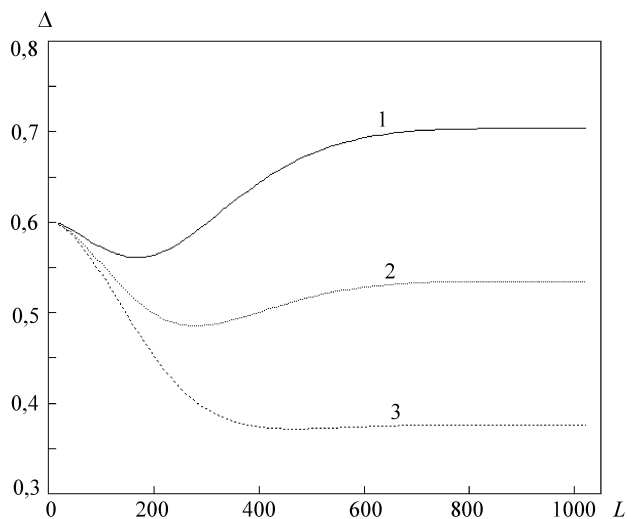


Рис. 2

проекций ($M < 30$) алгоритм $1/z^2$ -фильтрации имеет значительное преимущество перед алгоритмом Шеппа – Логана. Однако при $M \geq 30$ точность реконструкции с использованием обоих алгоритмов примерно одинакова. Для всех результатов, представленных на рис. 2 и 3, реконструкция производилась по незашумленным данным.

Путем численного моделирования было исследовано также влияние случайного шума в проекционных данных на качество томографической реконструкции алгоритмом $1/z^2$ -фильтрации. Шум предполагался гауссовским со средним, равным нулю, и постоянной для каждой проекции дисперсией, составляющей ξ процентов от ее (проекции) максимального значения. Полу-

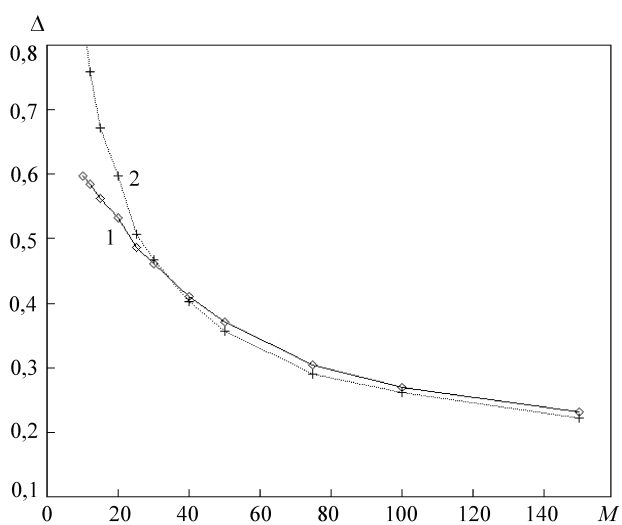


Рис. 3

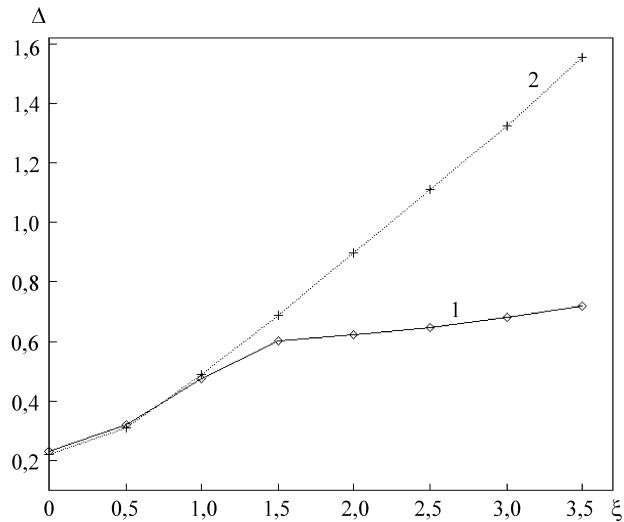


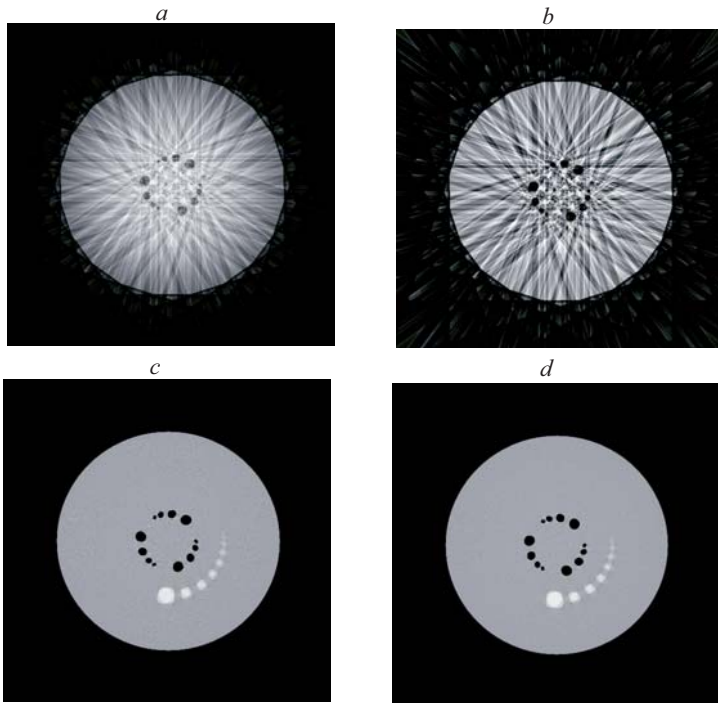
Рис. 4

ченные результаты показали, что при наличии шумов зависимости $\Delta(L)$ также имеют минимум, как и в случае их отсутствия. При фиксированном числе проекций этот минимум сдвигается в сторону меньших L с увеличением уровня шума ξ .

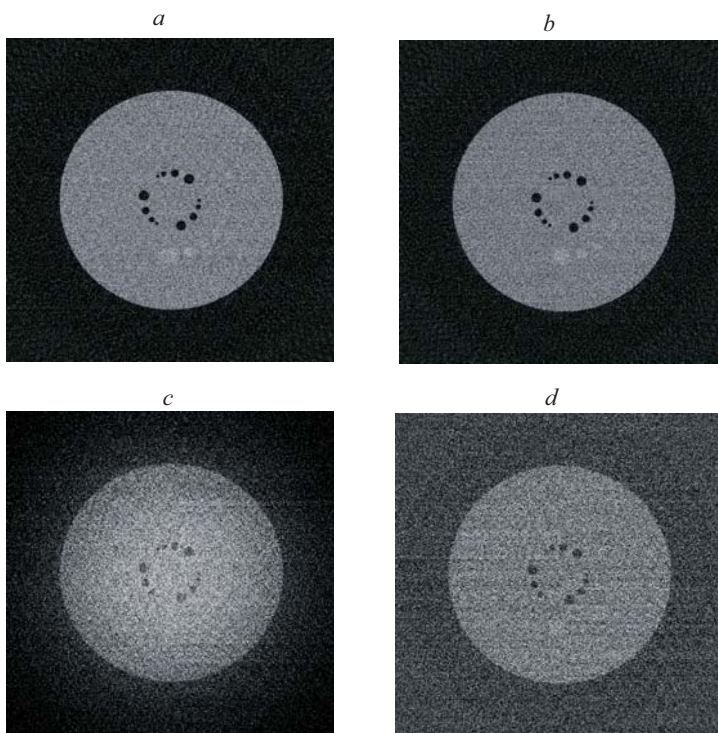
Зависимости погрешности реконструкции от уровня шумов даны на рис. 4. Количество проекций 150. Кривые 1 и 2 (как и на рис. 3) соответствуют алгоритму $1/z^2$ -фильтрации и алгоритму Шеппа – Логана. Из рисунка видно, что при невысоком уровне шумов ошибка Δ для этих алгоритмов различается незначительно. При возрастании же шума алгоритм $1/z^2$ -фильтрации дает существенно меньшую величину Δ .

Томограммы, по которым можно визуально судить о качестве реконструкции, показаны на рис. 5 и 6. Результаты реконструкции для различного числа проекций, не искаженных шумом, приведены на рис. 5. На рис. 5, *a, c* даны томограммы, реконструированные с помощью алгоритма $1/z^2$ -фильтрации, а на рис. 5, *b, d* – с помощью алгоритма Шеппа – Логана. Восстановление томограмм, представленное на рис. 5, *a, b*, производилось по 20 проекциям, а на рис. 5, *c, d* – по 1000 проекциям. Обе томограммы, восстановленные по 20 ракурсам наблюдения, невысокого качества. Тем не менее результат, полученный с использованием алгоритма $1/z^2$ -фильтрации, выглядит предпочтительнее, в частности, потому что круг на рис. 5, *a* более однородный, а количество артефактов вне его значительно меньше, чем на рис. 5, *b*. При 1000 проекций томограммы, полученные обоими алгоритмами, практически не различаются. Ошибка Δ для них также близка: $\Delta = 0,183$ для рис. 5, *c* и $\Delta = 0,181$ для рис. 5, *d*.

Результаты реконструкции при наличии шумов показаны на рис. 6. Число проекций 150. Рис. 6, *a, c* относятся к алгоритму $1/z^2$ -фильтрации, а рис. 6, *b, d* – к алгоритму Шеппа – Логана. Уровень шума на рис. 6, *a, b* составляет 1 %, а на рис. 6, *c, d* – 3%. Видно, что при низком уровне шума алгоритмы дают сходные томограммы. При $\xi = 3\%$ качество реконструкции



Puc. 5



Puc. 6

алгоритмом $1/z^2$ -фильтрации лучше, что также подтверждается величиной ошибки Δ , которая для алгоритма Шеппа – Логана примерно вдвое больше (см. рис. 4). Отметим, что на томограмме, восстановленной алгоритмом Шеппа – Логана, шум вне объекта имеет всюду одинаковую интенсивность. В то же время на томограмме, полученной с помощью алгоритма $1/z^2$ -фильтрации, интенсивность шума выше вблизи объекта.

Заключение. В данной работе исследован один из видов фильтрации проекционных данных в алгоритмах томографической реконструкции. Эта фильтрация основана на регуляризации обобщенной функции $1/z^2$. Путем вычислительного эксперимента установлено, что размер носителя фильтра существенно влияет на качество получаемых томограмм, а именно при недостаточном количестве проекционных данных наилучшая точность реконструкции при использовании $1/z^2$ -фильтра достигается при размерах его носителя, меньших, чем размер носителя проекции. Причем чем меньше количество ракурсов наблюдения, тем при меньшем размере носителя фильтра достигается минимум ошибки. Аналогичные результаты получены для реконструкции по проекционным данным, искаженным случайными шумами. В этом случае минимум ошибки также достигается, когда размер носителя фильтра меньше размера носителя проекции. При увеличении уровня шума этот минимум смещается в сторону уменьшения размера носителя.

В процессе численного моделирования производилось сравнение томограмм, полученных с помощью алгоритма $1/z^2$ -фильтрации и известного алгоритма Шеппа – Логана. Было показано, что последний уступает по точности при небольшом числе проекций (менее 50), а также при наличии высокого уровня шума в исходных данных.

Автор выражает благодарность О. Е. Трофимову за руководство работой, а также ряд ценных замечаний при ее обсуждении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Herman G. T.** Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. N. Y.: Academic Press, 1980.
2. **Natterer F.** The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: John Willey & Sons, 1986.
3. **Пикалов В. В., Мельникова Т. С.** Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
4. **Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.** Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.
5. **Лихачев А. В.** Сравнение алгоритма Фельдкампа с алгоритмом синтеза Фурье для трехмерной томографии // Автометрия. 2006. **42**, № 1. С. 88.
6. **Shepp L. A., Logan B. F.** The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, N 3. P. 21.

Поступила в редакцию 31 мая 2006 г.