

УДК 536.33:536.244

**Численный анализ термогравитационной  
турбулентной конвекции  
в замкнутой прямоугольной области  
с радиационным источником энергии \***

**Г.В. Кузнецов, А.Э. Ни**

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*

E-mail: nee\_alexander@mail.ru

Проведено математическое моделирование сопряженного теплопереноса в замкнутой прямоугольной области в условиях радиационного подвода энергии. Полученные по результатам моделирования поля температур и функций тока иллюстрируют существенно нестационарный характер исследуемого процесса сопряженного теплообмена. Анализ распределений температур в характерных сечениях области решения показал значительную неоднородность температурного поля. Установлено, что увеличение числа Рэлея приводит к существенным модификациям полей температур и функций тока. Показано влияние распределения радиационных потоков по внутренним поверхностям раздела сред на температурные поля и характер течения воздуха. Проведена оценка влияния турбулизации на интенсивность теплопереноса вблизи границ раздела сред. Сравнение полученных численных результатов с экспериментальными данными показало их хорошее соответствие.

**Ключевые слова:** сопряженный теплоперенос, численное моделирование, естественная конвекция, турбулентность, модель Болдуина–Ломакса, газовый инфракрасный излучатель.

**Введение**

Для исследования тепловых режимов областей, заполненных газом и ограниченных твердыми теплопроводными стенками конечной толщины, с локальными источниками тепловыделения в условиях термогравитационного теплопереноса был разработан подход [1, 2], основанный на численном решении системы уравнений Навье–Стокса (в преобразованных переменных) и энергии. Позднее он был развит на режимы смешанной конвекции при решении задач зажигания жидких топлив [3, 4]. Однако предложенный метод [1, 2], так же как и дальнейшие его модификации [5, 6], применим для режимов нагрева воздуха локальным источником с заданной (постоянной или изменяющейся во времени) температурой. В реальных же технических системах и технологических процессах достаточно часто источником энергии являются разного рода излучатели [7, 8]. Наиболее интересными для дальнейшего исследования и применения являются газовые инфракрасные излучатели (ГИИ) [8].

---

\* Работа выполнена в рамках НИР Госзадания «Наука» №13.1339.2014/К (шифр Федеральной целевой научно-технической программы 2.1410.2014).

Известны математические модели сопряженного теплопереноса в областях с работающими ГИИ [7, 9], но эти исследования проведены только для ламинарных режимов течения воздуха. При описании же турбулентной естественной конвекции [10] предполагалось, что поступающая от ГИИ теплота равномерно распределена только по нижней горизонтальной границе области нагрева. Влияние теплопроводных объектов в газовой области на характер теплопереноса при радиационном нагреве исследовалось в работе [11], но, так же как и в [7], в рамках модели ламинарного течения.

Следует отметить, что экспериментальное исследование совместно протекающих нестационарных процессов кондукции, конвекции и излучения при нагреве радиационными потоками представляется далеко не всегда возможным по ряду объективных причин, к которым относятся большие размеры областей, значительные затраты на проведение эксперимента и др.

Целью настоящей работы является численное моделирование нестационарного процесса сопряженного теплопереноса в газовой полости, ограниченной теплопроводными стенками конечной толщины, в условиях радиационного подвода энергии.

### Постановка задачи

Рассматривается краевая задача сопряженного теплопереноса за счет конвекции для газа и кондукции для твердых теплопроводных стенок конечной толщины. Область решения состоит из пяти подобных по форме прямоугольников разных размеров (рис. 1). На внешних границах приняты условия теплоизоляции, на внутренних (зоны контакта воздуха со стенками) — задавались равенства температур и тепловых потоков.

При решении задачи принимались следующие допущения: теплофизические свойства воздуха и материалов стенок не зависят от температуры; воздух является диатермической вязкой несжимаемой ньютоновской теплопроводной жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска; источник лучистого нагрева не выделялся — считалось, что его толщина бесконечно мала по сравнению с характерными размерами области. Распределение лучистых потоков по отдельным участкам рассчитывалось с использованием зонального метода [12].

Рассматриваемый процесс турбулентного теплопереноса описывается осредненными уравнениями Рейнольдса и энергии для воздуха, а также уравнениями теплопроводности для горизонтальных и вертикальных стенок в безразмерных переменных «вихрь скорости  $\Omega$  — функция тока  $\Psi$  — температура  $\Theta$ ». Эти уравнения имеют вид [10, 13]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \left( \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} + \nu_t \right) \Omega \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \left( \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} + \nu_t \right) \Omega \right] + \frac{\partial \Theta_1}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\Omega, \quad (2)$$

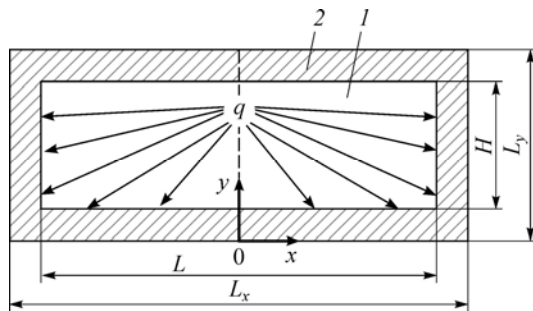


Рис. 1. Область решения задачи. Воздух (1), ограждающие конструкции (2);  $L_x$  — размер области решения по оси  $x$ , м,  $L$  — характерный размер газовой полости по оси  $x$ , м,  $H$  — размер газовой полости по оси  $y$ , м,  $L_y$  — размер области решения по оси  $y$ , м.

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \Theta_1 \right] + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \Theta_1 \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \text{Fo}_2} = \nabla^2 \Theta_2, \quad (4)$$

здесь  $q_1, q_2, q_3$  — тепловые потоки, поступающие к соответствующим зонам, 1, 2 — элементы конструкции. При решении уравнений (1)–(3) использована алгебраическая модель турбулентности Болдуина–Ломакса [13]. Турбулентная вязкость вычислялась по формуле, аналогично [14]:

$$v_t = l_m^2 |\Omega|, \quad l_m = k \cdot \sqrt{hx^2 + hy^2},$$

где  $l_m$  — путь смешения,  $k$  — постоянная Кармана ( $k \approx 0,4$ ),  $h_x, h_y$  — шаги по координатной сетке в направлениях осей  $x, y$ .

Начальные условия для уравнений (1)–(4) имели вид:

$$\Psi(X, Y, 0) = 0, \quad \Omega(X, Y, 0) = 0, \quad U(X, Y, 0) = 0, \quad V(X, Y, 0) = 0, \\ \Theta_1(X, Y, 0) = \Theta_2(X, Y, 0) = 0.$$

Граничные условия для уравнений (1)–(4) записывались следующим образом:

– на внешних границах и в плоскости симметрии области решения:

$$X = 0, \quad X = 0,6, \quad 0 < Y \leq 1: \quad \partial \Theta_2(X, Y, \tau) / \partial X = 0, \\ Y = 0, \quad Y = 1, \quad 0 < X \leq 0,6: \quad \partial \Theta_2(X, Y, \tau) / \partial Y = 0;$$

– на границах раздела «твердая стенка–воздух», параллельных оси  $OX$ :

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \begin{cases} \Theta_i = \Theta_j, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial Y} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial Y} + Ki_{q_k}, \end{cases} \quad \text{где } \begin{cases} i = \overline{1,2}, \\ j = \overline{1,2}, \\ k = \overline{1,2}; \end{cases}$$

– на границах раздела «твердая стенка–воздух», параллельных оси  $OY$ :

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \begin{cases} \Theta_i = \Theta_j, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} + Ki_{q_3}, \end{cases} \quad \text{где } \begin{cases} i = \overline{1,2}, \\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Уравнения (1)–(4) с соответствующими начальными и граничными условиями решались методом конечных разностей [15, 16] на равномерной сетке ( $301 \times 251$ ). Используемые метод и алгоритм решения были протестированы на модельной задаче естественной конвекции в замкнутой квадратной полости с вертикальными изотермическими и горизонтальными адиабатическими стенками [14, 17]. Результаты тестирования (поля температур и средние числа Нуссельта  $\text{Nu}_{av}$ ) приведены на рис. 2, 3 и в таблице.

Проведенное сравнение позволяет сделать вывод о возможности использования алгебраической модели Болдуина–Ломакса для описания процесса турбулентной естественной конвекции.

### Результаты численного моделирования

Задача решена в осесимметричной постановке. Численное исследование проведено при следующих значениях безразмерных критериев:  $10^7 \leq \text{Ra} \leq 10^{10}$ ,  $\text{Pr}_t = 1$ ,  $\text{Pr} = 0,71$ ,  $Ki_{q1} = 30$ ,  $Ki_{q2} = 8$ ,  $Ki_{q3} = 2$ . Такой диапазон изменения числа Рэлея соответствует наиболее

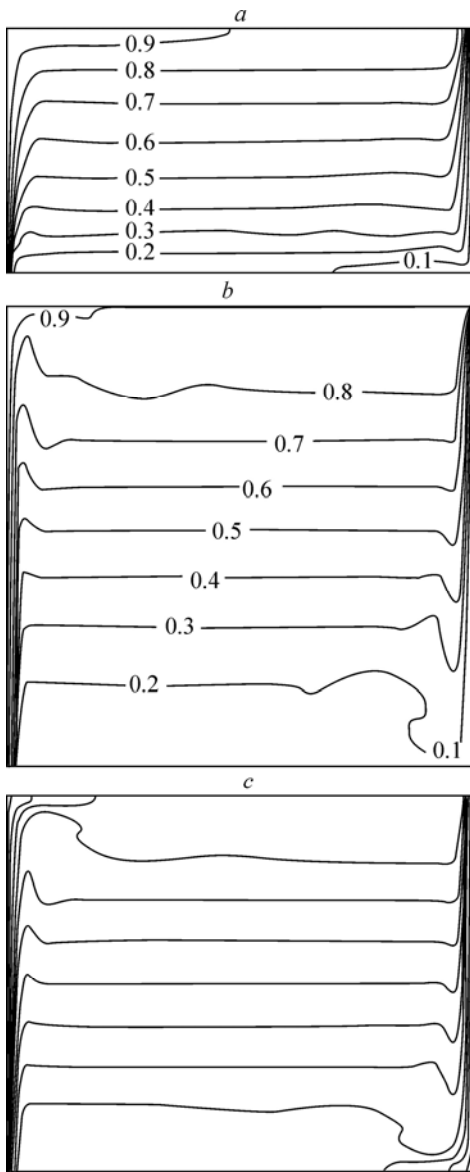


Рис. 2. Поля температур при  $Ra = 10^8$ .  
*a* — результаты решения рассматриваемой задачи,  
*b* — данные работы [16], *c* — данные работы [17].

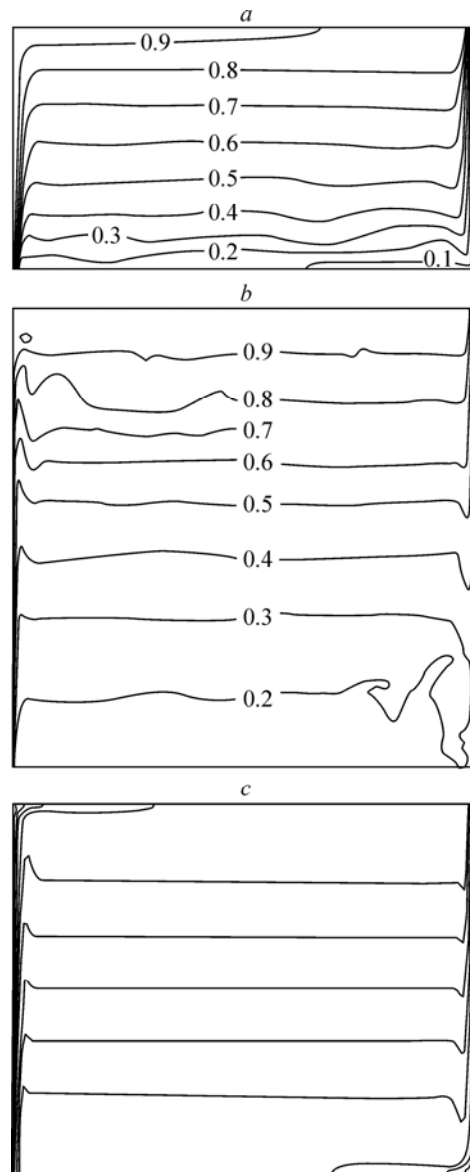


Рис. 3. Поля температур при  $Ra = 10^9$ .  
*a* — результаты решения рассматриваемой задачи,  
*b* — данные работы [16], *c* — данные работы [17].

типичным условиям работы систем радиационного нагрева [8], остальные характеристики и исходные данные выбирались также на основании приведенных в публикации [8] сведений о работе систем генерации энергии на базе газовых инфракрасных излучателей. Для наглядности типичные результаты решения сформулированной краевой задачи представлены во всей области и приведены на рис. 4.

Таблица  
 Сравнение средних чисел Нуссельта

| Число Рэлея | Сетка            | $Nu_{av}$ | $Nu_{av}$ [16] | $Nu_{av}$ [17] |
|-------------|------------------|-----------|----------------|----------------|
| $Ra = 10^8$ | $151 \times 151$ | 33,92     | 30,32          | 31,2           |
| $Ra = 10^9$ | $151 \times 151$ | 56,21     | 49,52          | 58,1           |

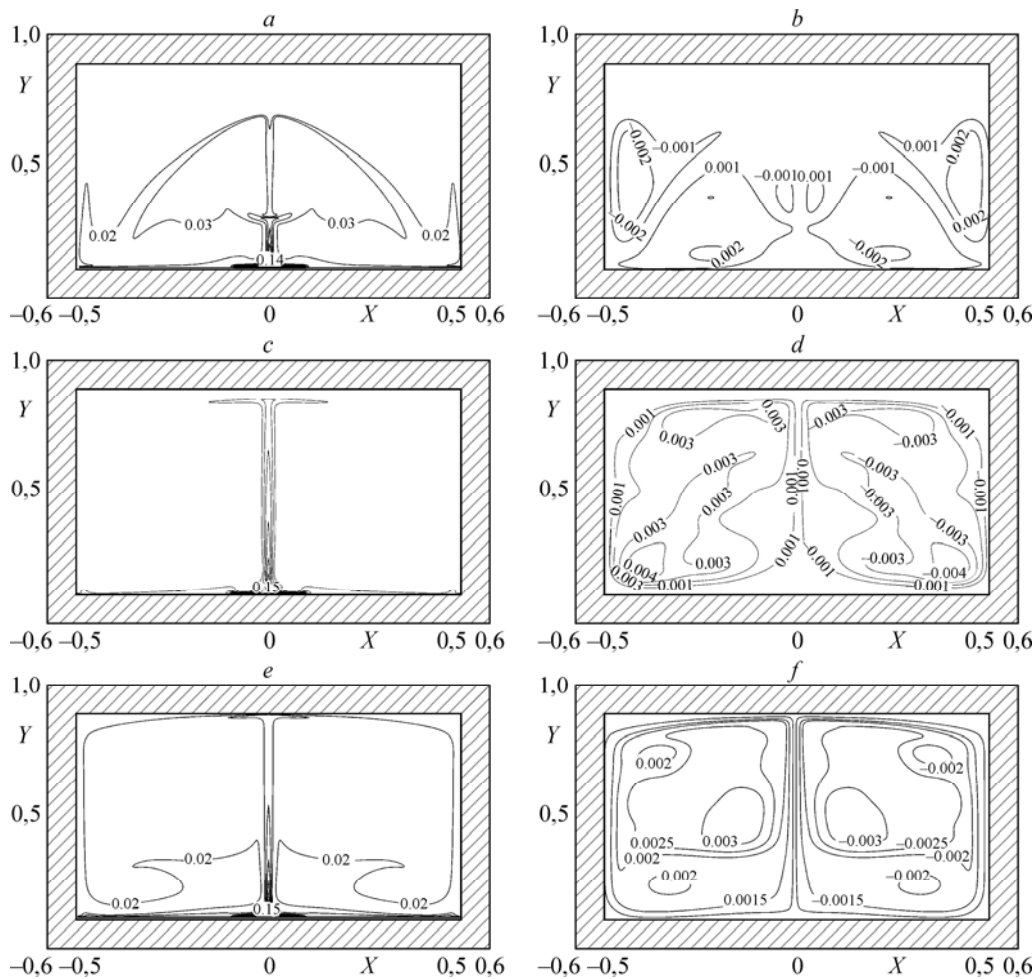


Рис. 4. Изолинии температур (a, c, e) и функций тока (b, d, f) при  $Ra = 10^{10}$ .  
 $\tau = 300$  (a, b), 600 (c, d), 1200 (e, f).

Анализ распределений температур показывает, что к моменту времени  $\tau = 300$  формируется прогретый слой воздуха у границы  $Y = 0,1$ ,  $-0,1 < X < 0,1$ . Образующийся при этом термический факел в сечении  $X = 0$  достигает высоты  $Y = 0,28$ . Лучистый поток, поступающий к поверхностям вертикальных стенок, инициирует повышение их температуры. В результате происходит прогрев воздуха и образуются две вихревые структуры, ориентированные по направлению оси  $Y$ . С увеличением времени вертикальный размер термического факела растет. Теплый воздух достигает условной границы  $Y = 0,9$ ,  $-0,5 < X < 0,5$  и остывает в результате теплоотвода в стенки. Образуются два крупных вихря, симметричных относительно оси  $X = 0$ . Распад циркуляционных течений у вертикальных ограждающих конструкций объясняется тем, что поток воздуха, нисходящий вдоль стенок, имеет существенно меньшую температуру по сравнению с восходящим. Дальнейший рост  $\tau$  проявляется в увеличении средней температуры в газовой полости (рис. 4e). Течения воздуха в окрестности оси симметрии приобретают более выраженный циркуляционный характер. Следует отметить, что образование вторичных вихрей вызвано большими размерами области решения, соответствующими турбулентному режиму термогравитационной конвекции.

На рис. 5 представлены поля температур и функций тока при  $\tau = 1200$ , соответствующие различным числам Рэлея. Изолинии тока со знаком « $\leftarrow$ » ориентированы по часовой стрелке, со знаком « $\rightarrow$ » — против.

При  $Ra = 10^7$  в газовой полости образуются четыре вихревые структуры. Появление нескольких циркуляционных течений воздуха, отличающихся как по размерам, так и по направлениям движения, обусловлено, с одной стороны, непрерывным подводом тепла к нижней горизонтальной границе, с другой стороны, большими размерами области анализа. Увеличение числа Рэлея приводит к росту подъемной силы, что отражается на размерах термического факела (рис. 5а, 5с, 5е). Происходит повышение температуры (рис. 6) в окрестности оси симметрии ( $X = 0, 0,87 < Y < 0,96$ ) и трансформация вихревой структуры (рис. 5b, 5d, 5f). При  $Ra = 10^9$  образуются две крупномасштабные конвективные ячейки, симметричные относительно сечения  $X = 0$ . Толщина прогретого слоя воздуха у границы  $Y = 0,1, -0,1 < X < 0,1$  уменьшается, что обусловлено ростом подъемной силы.

Распределения температур по оси  $Y$  в сечении  $X = 0$  (рис. 6) наглядно иллюстрируют неоднородность температурного поля по высоте области решения краевой задачи. При этом хорошо видно, что турбулизация течения с ростом  $Ra$  незначительно изменяет

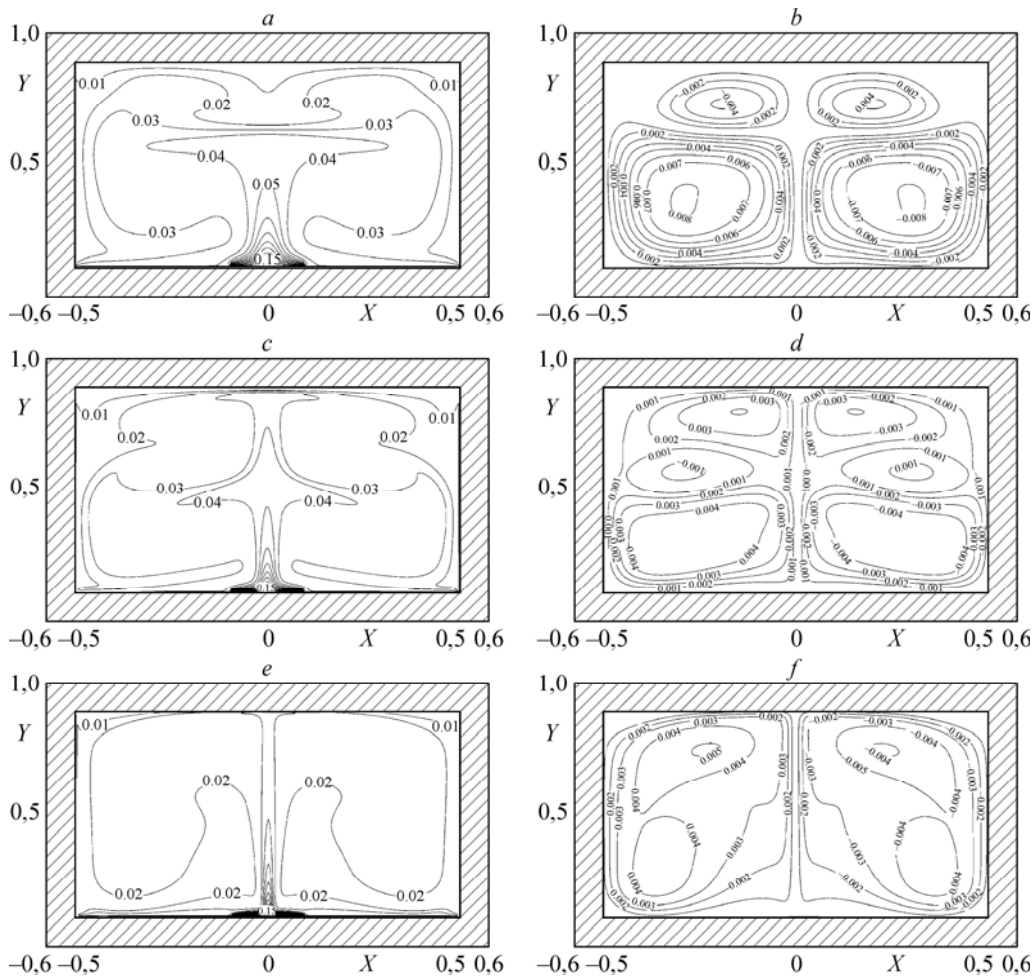


Рис. 5. Изолинии температур (a, c, e) и функций тока (b, d, f) при  $\tau = 1200$ .  
 $Ra = 10^7$  (a, b),  $10^8$  (c, d),  $10^9$  (e, f).

абсолютные значения  $\Theta$ : отклонения на участке  $0,05 < Y < 0,85$  не превышают 28 % в диапазоне изменения  $Ra$  от  $10^7$  до  $10^{10}$ .

Принято использовать в качестве основной характеристики теплообмена в режиме естественной конвекции среднее число Нуссельта [1, 2]. На границе раздела  $Y = 0,1$ ,  $-0,5 < X < 0,5$  средний безразмерный коэффициент теплоотдачи определяется [2] как:

$$Nu_{av} = \int_{0,1}^{1,1} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0,08} dX.$$

На рис. 7 представлены достаточно наглядные зависимости  $Nu_{av}$  от  $Ra$  ( $\tau = 1200$ ) при различном представлении о распределении лучистого потока по поверхностям нагрева. С повышением числа Рэлея увеличивается интенсивность свободноконвективного теплопереноса, что приводит к росту числа Нуссельта. Для случая равномерного распределения лучистого потока только по нижнему основанию области решения, безразмерный коэффициент теплоотдачи на этой границе выходит почти в шесть раз больше, чем в случае распределения теплового потока и по вертикальным ограждающим конструкциям. На основании анализа зависимостей  $Nu_{av} = f(Ra)$  можно сделать вывод о целесообразности использования моделей распределения лучистой энергии при анализе закономерностей теплопереноса в системах с локальными радиационными источниками энергии.

Проведено численное моделирование исследуемого процесса при значениях параметров, соответствующих экспериментам [18]. Дана оценка достоверности полученных результатов путем сравнения их с данными [18]. Экспериментальные исследования [18] проводилось на модельных одноэтажных объектах с лучистой системой отопления. Излучатели располагались в верхней зоне на определенной высоте (непосредственно под перекрытием). На рис. 8 представлено сравнение распределений температур по оси  $Y$  при  $X = 0$ .

Из рис. 8 видно, что максимальная разница расчетного и экспериментального значений температуры составляет 1,6 К на высоте  $y = 1,5$  м. Можно предположить, что меньшие значения температур, полученные при теоретическом анализе в области  $0,5 < y < 2$ , объясняются тем, что при моделировании не учитывалась толщина излучателя, на поверхности которого в зависимости от типа ГИИ температура достигает 600 К.

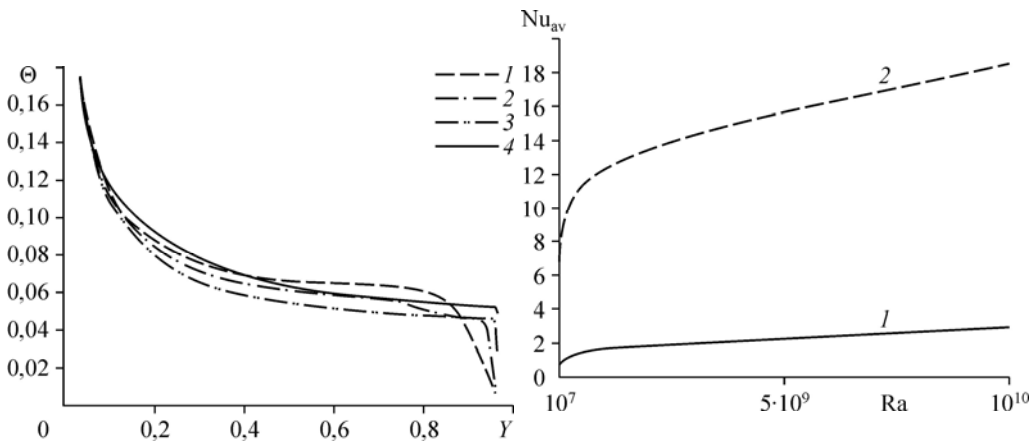


Рис. 6. Распределения температур по направлению  $Y$  в сечении  $X = 0$ .  
 $Ra = 10^7$  (1),  $10^8$  (2),  $10^9$  (3),  $10^{10}$  (4).

Рис. 7. Зависимости  $Nu_{av}$  от  $Ra$  при  $\tau = 1200$ .

1 — равномерное распределение лучистого потока по нижней горизонтальной границе [9],  
2 — распределение лучистого потока по горизонтальной и вертикальным границам.

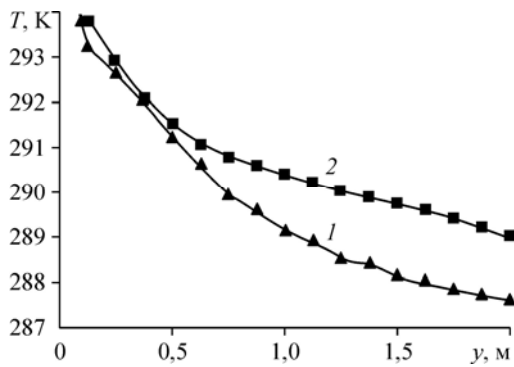


Рис. 8. Распределения температур по направлению  $Y$  в сечении  $X = 0$ .  
1 — результаты численного моделирования,  
2 — эксперимент [18].

На основании выполненного сравнения можно отметить, что использование простой алгебраической модели турбулентности Болдуина–Ломакса [13] при описании сложного теплопереноса приводит к удовлетворительному соответствию экспериментальных данных [18] и результатов численного моделирования.

### Заключение

На основании анализа влияния числа Рэлея на характер теплопереноса в рассматриваемой области решения установлено, что увеличение подъемной силы приводит к существенным модификациям полей температур и функций тока. Полученные зависимости  $Nu_{av} = f(Ra)$  позволяют сделать вывод о целесообразности применения моделей распределения радиационной энергии при описании лучистого теплообмена в условиях свободной конвекции, основной движущей силой которой является энергия излучения, аккумулированная в нижней горизонтальной теплопроводной стенке конечной толщины. Также результаты исследования показали возможность применения простой алгебраической модели турбулентности (Болдуина–Ломакса) при описании сопряженного теплопереноса в замкнутых областях с теплопроводными стенками конечной толщины в условиях свободной конвекции.

### Обозначения

$Fo = a \cdot t_0 / L^2$  — число Фурье,  
 $Ra = g \cdot \beta L^3 (T_h - T_0) / (\nu a)$  — число Рэлея,  
 $Ki = q \cdot L / (\lambda (T_h - T_0))$  — число Кирпичёва,  
 $Pr = \nu / a$  — число Прандтля,  
 $Pr = \nu_t / a_t$  — турбулентное число Прандтля,  
 $a$  — коэффициент температуропроводности,  $m^2/s$ ,  
 $a_t$  — турбулентный коэффициент температуропроводности,  $m^2/s$ ,  
 $g$  — ускорение свободного падения,  $m^2/s$ ,  
 $\beta$  — коэффициент объемного расширения,  $1/K$ ,  
 $\nu$  — кинематическая вязкость,  $m^2/s$ ,

$q$  — плотность теплового потока,  $Вт/м^2$ ,  
 $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $Вт/(м \cdot К)$ ,  
 $X, Y$  — безразмерные координаты, соответствующие  $x, y$ ,  
 $L$  — характерный размер газовой полости по оси  $x$ ,  $m$ ,  
 $t_0$  — масштаб времени,  $s$ ,  
 $\tau$  — безразмерное время,  
 $U, V$  — безразмерные скорости, соответствующие  $u, v$ ,  
 $\Theta$  — безразмерная температура,  
 $T_0$  — температура воздуха и стенок в начальный момент времени,  $К$ ,  
 $T_h$  — температура на поверхности излучателя,  $К$ .

### Индексы

$h$  — источник тепловыделения, 1 — газ, 2 — стенка.

### Список литературы

1. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Двумерная задача естественной конвекции в прямоугольной области при локальном нагреве и теплопроводных границах конечной толщины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 6. С. 29–39.
2. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Математическое моделирование сложного теплопереноса в замкнутой прямоугольной области // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16, № 1. С. 123–133.
3. Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Heat and mass transfer at ignition of liquid substance by a single «hot» particle // J. of Engng Thermophysics. 2008. Vol. 17, No. 3. P. 244–252.



4. **Высокоморная О.В., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А.** Моделирование зажигания жидкого топлива локальным источником нагрева в условиях выгорания жидкости // Химическая физика. 2011. № 8. С. 62–67.
5. **Sheremet M.A.** Combined natural convection heat and mass transfer in an enclosure having finite thickness walls // Meccanica. 2013. Vol. 48. No. 4. P. 851–862.
6. **Martyushev S.G., Miroshnichenko I.V., Sheremet M.A.** Numerical analysis of spatial unsteady regimes of conjugate convective-radiative heat transfer in a closed volume with an energy source // J. of Engng Thermophysics. 2014. Vol. 87, No. 1. P. 124–134.
7. **Кузнецов Г.В., Нагорнова Т.А., Ни А.Э.** Численное моделирование сопряженного теплопереноса в замкнутой прямоугольной области в условиях радиационного подвода теплоты к горизонтальной и вертикальным поверхностям ограждающих конструкций // Инж.-физ. журн. 2015. № 1. С. 165–174.
8. **Seyam Sh., Huzayyin A., El-Batsh H., Nada S.** Experimental and numerical investigation of the radiant panel heating system using scale room model // Energy and Building. 2014. No. 8. P. 120–141.
9. **Nee A.E.** Numerical modelling the unsteady process of closed rectangular area radiant heating in conjugate formulation with accounting energy distribution along horizontal and vertical enclosure structures // EPJ Web of conferences. 2014. Vol. 76. P. 1–6.
10. **Кузнецов Г.В., Куриленко Н.И., Максимов В.И., Мамонтов Г.Я., Нагорнова Т.А.** Теплоперенос при нагреве локальной области крупногабаритного производственного помещения газовыми инфракрасными излучателями // Инж.-физ. журн. 2013. № 3. С. 489–494.
11. **Nee A., Nagornova T.** Numerical investigation of conjugate heat transfer in a local working area in conditions of its radiant heating // IOP Conf. Series: Materials Sci. and Engng. 2014. Vol. 66, No. 1. P. 1–5.
12. **Рубцов Н.А.** Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, 1984. 287с.
13. **Sebeci T.** Analysis of turbulent flows with computer programs. Elsevier. 2013. 450 p.
14. **Sajjadi H., Kefayatib R.** Lattice Boltzman simulation of turbulent natural convection in tall enclosure // Thermal Sci. 2015. Vol. 19, No. 1. P. 155–166.
15. **Роуч П. Дж.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
16. **Пасконов В. М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
17. **Chen Sh., Huang X., Yang Ch., Liu G., Ding C., Han B.** Simple lattice Boltzmann approach for turbulent buoyant flow simulation // Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 34, No. 1. P. 1339–1348.
18. **Куриленко Н.И., Максимов В.И., Мамонтов Г.Я., Нагорнова Т.А.** Газовые инфракрасные излучатели: эксперимент, теория, практика. Томск: Томский политехнический университет, 2014. 134 с.

*Статья поступила в редакцию 6 апреля 2015 г.,  
после доработки — 25 мая 2015 г.*