

**НЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОСПЛАМЕНЕНИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ
И ЕГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ**

*С. А. Бостанджиян
(Черноголовка)*

В работе [1] на примере неизотермического диссипативного течения в бесконечной круглой трубе инертной жидкости с сильной экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры показано существование критического значения некоторого безразмерного комплекса, включающего градиент давления, при переходе через которое прогрессивно увеличиваются температура и расход. Ввиду наличия аналогии с тепловым взрывом это явление названо гидродинамическим тепловым взрывом. Исследование куэттовского течения такой же жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами [2] показало, что при фиксированной скорости пластины стационарное решение существует при всех ее значениях. В [3] рассмотрено куэттовское течение в нестационарной постановке с осреднением температуры по сечению и показано, что если на подвижной пластине задается не скорость, а касательное напряжение, то существуют критические условия теплового режима течения. Сжато задача о несимметричном воспламенении плоского слоя изложена в [4], где рассмотрен случай нагретой нижней пластины и более холодной верхней пластины.

В данной работе подробно исследуется несимметричное воспламенение при нагретой нижней или более нагретой верхней пластине. Выводятся трансцендентные уравнения, из которых определяется критическое значение параметра Франк-Каменецкого, а также устанавливается аналогия между несимметричным воспламенением плоского слоя и куэттовским течением инертной жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры, когда пластины поддерживаются при постоянных, по разным температурах и к подвижной пластине приложено постоянное касательное напряжение.

В [4] подчеркивается необходимость разложения экспоненты около температуры горячей поверхности, так как при большой разности температур скорость реакции у холодной стенки пренебрежимо мала. Поэтому рассмотрение ограничено одним случаем, тем более, что основное внимание в [4] уделено предельному локальному зажиганию, где перепады температур действительно велики. Нами рассматриваются оба случая, поскольку при небольших перепадах температур на стенках пригодны результаты, полученные при разложении экспоненты около меньшей температуры, но самое главное в исследуемой ниже термогидродинамической задаче зависимость вязкости от температуры принята в такой форме, что не возникает необходимости в разложении экспоненты. При химическом тепловом взрыве с большим основанием могут быть использованы результаты, относящиеся к случаю более горячей верхней пластины, где проводится разложение экспоненты.

Пусть пространство между двумя параллельными пластинами, отстоящими одна от другой на расстоянии $2h$, заполнено реакционноспособной массой, в которой протекает химическая реакция нулевого по-

рядка. На верхней пластине поддерживается температура T_0 , на нижней — T_1 . Поместим начало координат на средней плоскости. Рассматриваем случаи $T_1 > T_0$ и $T_1 < T_0$.

Если ввести безразмерные переменные и параметры

$$\Theta = \frac{E}{RT_0^2}(T - T_0), \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad \delta = \frac{Qk_0}{\lambda} \frac{E}{RT_0^2} h^2 e^{-E/RT_0}, \quad \Theta_0 = \frac{E}{RT_0^2}(T_1 - T_0) \quad (1)$$

и применить разложение экспоненты в законе Аррениуса по Франк-Каменецкому, то можно записать уравнение теплового баланса и граничные условия [4]:

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \delta e^\Theta = 0, \quad (2)$$

$$\eta = 1: \Theta = 0; \quad \eta = -1: \Theta = \Theta_0. \quad (3)$$

Обозначения: Q — тепловой эффект реакции; E — энергия активации; k_0 — предэкспонент; λ — коэффициент теплопроводности реакционной массы; R — универсальная газовая постоянная; y — поперечная координата. Условия задачи для $T_1 > T_0$ и $T_1 < T_0$ отражены на рис. 1.

Общее решение уравнения (2) записывается в форме [4]

$$\Theta(\eta) = \ln \frac{a}{\text{ch}^2 [b + (a\delta/2)^{1/2} \eta]}, \quad (4)$$

где a и b — постоянные интегрирования, которые определяются из системы трансцендентных уравнений

$$\text{ch}^2 [b + (a\delta/2)^{1/2}] = a, \quad \text{ch}^2 [b - (a\delta/2)^{1/2}] = a e^{-\Theta_0}, \quad (5)$$

получающейся при удовлетворении решения (4) граничным условиям (3).

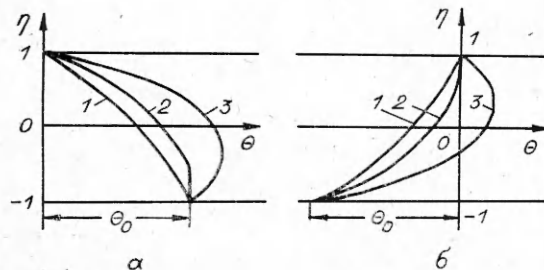
Следует рассмотреть отдельно варианты $\Theta_0 > 0$ и $\Theta_0 < 0$. Если $\Theta_0 > 0$, то в силу четности гиперболического косинуса $|b + (a\delta/2)^{1/2}| > |b - (a\delta/2)^{1/2}|$, что возможно при $b > 0$. Из (5) имеем

$$b + (a\delta/2)^{1/2} = \ln [a^{1/2} + (a-1)^{1/2}], \quad b - (a\delta/2)^{1/2} = \pm \ln [(ae^{-\Theta_0})^{1/2} + (ae^{-\Theta_0} - 1)^{1/2}]. \quad (6)$$

Выбор знака во втором уравнении зависит от знака градиента температуры на нижней пластине. Продифференцировав (4), получим

$$\frac{d\Theta}{d\eta} = -(2a\delta)^{1/2} \text{th} [b + (a\delta/2)^{1/2} \eta]. \quad (7)$$

Левые части уравнений (6) — значения аргумента гиперболического тангенса соответственно на верхней и нижней пластинах. Из второго уравнения системы видно, что минимальное значение постоянной интегрирования a определяется из условия $ae^{-\Theta_0} = 1$, т. е. $a_{\min} = e^{\Theta_0} \geq 1$. Отсюда видно, что логарифм во втором уравнении (6) всегда положительный и обращается в нуль при $a = a_{\min}$. Как видно из (7), одновременно обращается в нуль градиент температуры на нижней пластине. Знак в



правой части (6) должен быть противоположным знаку градиента температуры на нижней пластине. Минимальное значение a достигается для профиля 2 на рис. 1, a с нулевым градиентом температуры на ниж-

Рис. 1. Схематическое изображение условия задачи.

ней пластине. Положив в (6) $a = e^{\Theta_0}$ и разрешив систему относительно δ , получим значение δ_1 , которому соответствует профиль 2:

$$\delta_1 = \frac{\ln^2 [e^{\Theta_0/2} + (e^{\Theta_0} - 1)^{1/2}]}{2e^{\Theta_0}}. \quad (8)$$

Параметр δ характеризует интенсивность химических источников тепла. При $\delta < \delta_1$ профиль температур меняется монотонно (см. рис. 1, 1), градиент температуры на нижней пластине отрицательный, поэтому в (6) нужно брать верхний знак. При $\delta > \delta_1$ профиль имеет максимум (см. рис. 1, 2), градиент на нижней пластине положительный, в (6) следует брать нижний знак.

Систему уравнений (6) можно переписать в виде

$$a = 1/2\delta \cdot (\ln p + \ln q)^2, \quad b = 1/2 \cdot (\ln p \pm \ln q), \quad (9)$$

где для краткости записи введены обозначения

$$p = a^{1/2} + (a - 1)^{1/2}, \quad q = (ae^{-\Theta_0})^{1/2} + (ae^{-\Theta_0} - 1)^{1/2}. \quad (10)$$

В (9) верхние знаки берутся при $\delta < \delta_1$, нижние — при $\delta > \delta_1$. При фиксированном значении δ из первого трансцендентного уравнения (9) вычисляется постоянная a , затем по второму выражению — постоянная b . Профили температур в подкритическом режиме этим определяются полностью.

Пусть теперь $\Theta_0 < 0$. Из (5) вытекает, что $|b - (a\delta/2)^{1/2}| > |b + (a\delta/2)^{1/2}|$, что возможно при $b < 0$. Градиент температуры на нижней пластине всегда положительный, на верхней он может менять знак (см. (7)). Переходя к обратному гиперболическому косинусу в (5), получим

$$\begin{aligned} b + (a\delta/2)^{1/2} &= \pm \ln [a^{1/2} + (a - 1)^{1/2}], \\ b - (a\delta/2)^{1/2} &= -\ln [(ae^{-\Theta_0})^{1/2} + (ae^{-\Theta_0} - 1)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое выражение показывает, что $a_{\min} = 1$ и от Θ_0 не зависит. Из (7) и (11) видно, что минимальному значению a соответствует профиль 2 на рис. 1, b с нулевым градиентом температуры на верхней пластине. Решая совместно систему (11) при $a = 1$, получим соответствующее этому профилю значение

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \ln^2 [e^{-\Theta_0/2} + (e^{-\Theta_0} - 1)^{1/2}]. \quad (12)$$

При $\delta < \delta_2$ профиль 1 монотонный, следует брать знак минус, при $\delta > \delta_2$ он имеет максимум, следует брать знак плюс. Систему (11) можно переписать в виде

$$a = \frac{1}{2\delta} (\pm \ln p + \ln q)^2, \quad b = \frac{1}{2} (\pm \ln p - \ln q). \quad (13)$$

Верхние знаки берутся при $\delta < \delta_2$, нижние при $\delta > \delta_2$. При фиксированном δ , меньшем критического значения, постоянная a определяется из первого трансцендентного уравнения (13), постоянная b вычисляется по второму выражению.

Определим теперь критическое значение параметра Франк-Каменецкого. Для этого необходимо выразить δ как функцию от a и найти максимальное значение δ , являющееся критическим. Нетрудно показать, что монотонно изменяющегося предвзрывного профиля температур не может быть. Разрешая системы (6) и (11) относительно δ при $\delta < \delta_1$ и $\delta < \delta_2$, получим единое выражение

$$\delta(a) = \frac{1}{2a} \left(\ln \frac{p}{q} \right)^2. \quad (14)$$

При увеличении a от минимальных значений e^{Θ_0} и 1 до бесконечности величины δ монотонно убывают от δ_1 и δ_2 до нуля, следовательно, критического монотонного профиля быть не может. Физически этот факт очевидный. Если профиль монотонный, то в плоский слой через пластину с большей температурой от окружающей среды поступает некоторое количество тепла, которое вместе с выделяющимся теплом от химической реакции уходит через пластину с меньшей температурой.

При $\delta > \delta_1$ и $\delta > \delta_2$ имеем

$$\delta(a) = \frac{1}{2a} (\ln pq)^2. \quad (15)$$

Приравняв к нулю производную этой функции, получим трансцендентное уравнение

$$\ln pq = \frac{a^{1/2}}{(a-1)^{1/2}} + \frac{a^{1/2}}{(a-e^{\Theta_0})^{1/2}} \quad (16)$$

для определения a_0 , при котором δ принимает максимальное значение.

Если обе пластины имеют одинаковую температуру, $\Theta_0 = 0$, $p = q$. Тогда функция (15) и уравнение (16) примут вид

$$\delta = \frac{2}{a} \ln^2 [a^{1/2} + (a-1)^{1/2}], \quad \ln [a^{1/2} + (a-1)^{1/2}] = a^{1/2}/(a-1)^{1/2}. \quad (17)$$

Корень уравнения (17) $a_0 = 3,2767$. Исключая из двух выражений логарифм, получим

$$\delta_{кр} = 2/(a_0 - 1).$$

Подставляя значение a_0 , находим $\delta_{кр} = 0,878$ — известное критическое значение параметра Франк-Каменецкого для симметричного воспламенения плоского слоя [4].

Решим задачу для верхней термостатированной и нижней теплоизолированной пластин. Из (7) вытекает, что условие равенства нулю градиента температуры на нижней пластине дает $b = (a\delta/2)^{1/2}$. Тогда из (6) имеем

$$\delta(a) = \frac{1}{2a} \ln^2 [a^{1/2} + (a-1)^{1/2}]. \quad (18)$$

Сравнение (18) с (17) показывает, что δ_{max} достигается при том же значении a_0 , только оно в 4 раза меньше, чем при симметричном воспламенении.

На рис. 2, 1 приведена зависимость $\delta(a)$ при $\Theta_0 = 0$. Максимум этой кривой определяет $\delta_{кр}$. Из (17) и (18) видно, что эта же кривая дает зависимость $\delta(a)$ для одной теплоизолированной пластины, если масштаб по оси ординат увеличить в 4 раза. При $\Theta_0 > 0$ кривая $\delta(a)$ имеет вид петли и состоит из двух частей. Для $\Theta_0 = 1$ кривые 2 и 3 сопрягаются в точке с координатами $a = e^{\Theta_0}$ и $\delta = \delta_1$ и определяются соответственно формулами (15) и (14). У линии 2 реализуется только участок до максимума, участок за максимумом соответствует высокотемпературной неустойчивой ветви решения. На рис. 3 изображены профили температур при $\delta_1 = 0,2166$ и $\delta_{кр} = 0,5185$.

По уравнению (16) проведены расчеты, и в результате обработки полученных данных подобрана аппроксимирующая функция

$$\delta_{кр} = (0,0156\Theta_0^2 - 0,228\Theta_0 + 0,937)^2, \quad (19)$$

описывающая зависимость $\delta_{кр}$ от безразмерного перепада температур Θ_0 . При вычислении $\delta_{кр}$ по приближенной формуле (19) в представляющем интерес для практики диапазоне $-3 < \Theta_0 < 3$ относительная ошибка не превышает 1 %.

Рассмотрим теперь установившееся неизотермическое диссипативное течение жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от темпе-

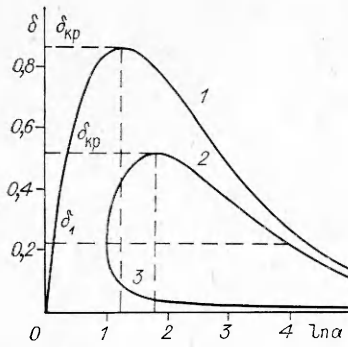


Рис. 2. Зависимость δ от $\ln a$.

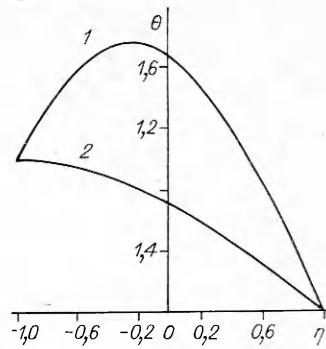


Рис. 3. Профили температур ($\Theta_0 = 1$).
1 — $\delta = \delta_{кр}$, 2 — $\delta = \delta_1$.

ратуры между двумя параллельными пластинами $y = -h$ и $y = h$ под действием постоянного напряжения τ_0 , приложенного к верхней пластине. На нижней и верхней пластинах заданы температуры T_1 и T_0 . Начало координат поместим на средней плоскости, ось y направим перпендикулярно к пластинам, ось x — по направлению движения пластины. Коэффициент динамической вязкости от температуры зависит по закону Рейнольдса

$$\mu(T) = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)}. \quad (20)$$

Уравнения движения в напряжениях и энергии записываются в виде

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0; \quad \lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu(T) \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = 0, \quad (21)$$

где τ_{xy} — сдвиговое напряжение; λ — коэффициент теплопроводности жидкости. Из первого выражения видно, что в куэттовском течении напряжение постоянно по сечению и равно задаваемому напряжению τ_0 . Согласно связи между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформации,

$$\mu(T) \frac{dv_x}{dy} = \tau_0. \quad (22)$$

Если ввести безразмерные переменные и параметры

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad \Theta = \beta(T - T_0), \quad v = \frac{\mu_0}{h\tau_0} v_x, \quad \delta = \frac{\beta h^2 \tau_0^2}{\lambda \mu_0}, \quad \Theta_0 = \beta(T_1 - T_0) \quad (23)$$

и исключить из (21) и (22) градиент скорости, то систему (21), (22) можно записать

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \delta e^{\Theta} = 0, \quad \frac{dv}{d\eta} = e^{\Theta}, \quad (24)$$

она решается при следующих граничных условиях:

$$\eta = -1: \Theta = \Theta_0, \quad v = 0; \quad \eta = 1: \Theta = 0. \quad (25)$$

Сравнение (24), (25) с (2), (3) показывает, что уравнение теплового баланса и граничные условия для него такие же, как для рассмотренного выше случая несимметричного воспламенения плоского слоя. Поэтому тепловая сторона данной гидродинамической задачи решается так же и сделанные там выводы справедливы и здесь. В частности, существует значение $\delta_{кр}$ (напряжения на пластине), выше которого стационарного решения нет, происходит прогрессивное накопление тепла в системе и увеличение скорости пластины, т. е. имеет место гидродинамический тепловой взрыв.

Остается определить профили скоростей в подкритическом режиме течения. Если профиль температуры (4) подставить в (24) и провести

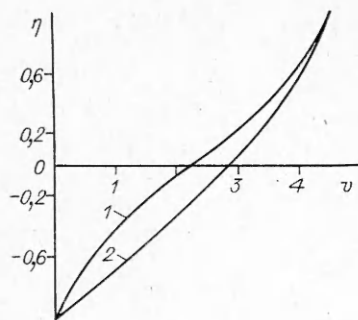


Рис. 4. Профили скоростей.

1 — пластины термостатированы при одинаковой температуре; 2 — верхняя пластина термостатирована, нижняя теплоизолирована.

интегрирование при граничном условии (25), то

$$v(\eta) = (2a/\delta)^{1/2} \{ \text{th} [b + (a\delta/2)^{1/2} \eta] - \text{th} [b - (a\delta/2)^{1/2} \eta] \}, \quad (26)$$

что справедливо при всех $\delta < \delta_{кр}$ при $\Theta_0 \leq 0$.

На рис. 4 приведены критические профили скоростей. Кривая 1 имеет характерную S-образную форму с точкой перегиба на средней плоскости, где температура максимальная. Для куэттовского течения это свойство общее — там, где температура достигает максимума, профиль скоростей имеет точку перегиба. В этом можно убедиться, продифференцировав второе уравнение системы (24). В точке максимума производная температуры равна нулю, следовательно, вторая производная от скорости равна нулю, т. е. на профиле скоростей имеется точка перегиба.

Из рис. 2 видно, что при $\delta < \delta_{кр}$ любая прямая $\delta = \text{const}$ пересекает кривые зависимости $\delta(a)$ в двух точках. Если $\Theta_0 > 0$, то при $\delta > \delta_1$ прямая пересекает в двух точках кривую 2, соответствующую профилю температур с максимумом внутри зазора, а при $\delta < \delta_1$ — в одной точке кривую 3 с монотонно изменяющимся профилем температур и линию 2 с максимумом профиля температур. При задании напряжения на пластине у кривых 1 и 2 реализуются участки левее максимума и вся кривая 3, а участки линий 1 и 2 правее максимума, соответствующие высокотемпературным профилям, не реализуются.

Интересно отметить, что эти же зависимости имеют место в задаче о куэттовском течении при задании скорости пластины, только теперь δ содержит определяемую из решения величину напряжения на пластине, а постоянная интегрирования a выражается через параметр задачи, включающий скорость пластины, т. е. фактически эти кривые определяют зависимость напряжения от скорости пластины. Отсюда видно, что зависимость напряжения на пластине от ее скорости носит немонотонный характер, двум различным скоростям пластины соответствуют два различных профиля температур (низкотемпературный и высокотемпературный) и одно и то же напряжение. При задании скорости пластины стационарное решение существует при всех значениях скорости, кривые на рис. 2 реализуются полностью, т. е. критических условий теплового режима течения в этом случае нет.

Таким образом, в работе определены критические условия несимметричного теплового воспламенения плоского слоя при произвольном перепаде температур на пластинах и при одной термостатированной и другой теплоизолированной пластинах. Установлена полная аналогия между несимметричным воспламенением и диссипативным куэттовским течением инертной вязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры при задании постоянного касательного напряжения на движущейся пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. П. Докл. АН СССР, 1965, 163, 1, 133.
2. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. П. ПМТФ, 1965, 5, 45.
3. Мержанов А. Г., Столнн А. М. Докл. АН СССР, 1971, 198, 6, 1291.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 10/X 1986,
после доработки — 26/III 1987