УДК 532.516
DOI: 10.15372/PMTF202415488

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБРАЗОВАНИИ ПАЛЬЦЕОБРАЗНОЙ СТРУКТУРЫ В ПОТОКЕ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

А. Тани, Х. Тани*

Университет Кэйо, Иокогама, Япония
*JANUS, Иокогама, Япония
E-mails: tani@math.keio.ac.jp, hisasitani@gmail.com

Ранее с использованием параболической регуляризации для некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n > 0$ доказано существование классического решения задачи об образовании пальцеобразной структуры в однофазной вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу при наличии поверхностного натяжения (исходной задачи). В данной работе доказывается единственность классического решения исходной задачи с использованием параболической регуляризации для полной последовательности параметра $\{\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Ключевые слова: радиальная пальцеобразная структура, поток вязких жидкостей, ячейка Хеле-Шоу, поверхностное натяжение, единственность классического решения

**Введение.** Вязкие пальцеобразные структуры могут возникать в потоке двух несмешивающихся вязких жидкостей в ячейке Хеле-Шоу [1]. Вследствие наличия градиента давления и (или) силы тяжести на первоначально плоской границе раздела двух жидкостей возникает неустойчивость Саффмана — Тейлора [2] и развивается пальцеобразная структура (см. работы [3, 4] и библиографию к ним).

В работах [5, 6] с использованием параболической регуляризации [7, 8] для задач о радиальных течениях двухфазных и однофазных вязких жидкостей в ячейке Хеле-Шоу с образованием пальцеобразной структуры без учета поверхностного натяжения доказано существование решений, принадлежащих стандартным пространствам Гельдера. Единственность решений подобных задач доказана в работе [9].

Пальцеобразная структура может образоваться в несжимаемой жидкости, находящейся в горизонтально расположенной ячейке Хеле-Шоу, вследствие наличия поверхностного натяжения (однофазная задача при наличии поверхностного натяжения). Существование решения указанной выше однофазной задачи в стандартных пространствах Гельдера доказано в работе [10]. Целью данной работы является доказательство единственности такого решения. Задача о течении двухфазной жидкости в ячейке Хеле-Шоу с учетом поверхностного натяжения изучена в работе [11]. Результаты исследования этой задачи приведены в работах [12, 13] (см. также [14–16]). Следует отметить, что в ряде работ исследовались такие же задачи с размерностью $n > 2$, представляющие интерес с точки зрения математики, но не имеющие практической значимости, поскольку потоки Хеле-Шоу, по сути, являются двумерными.

**1. Формулировка задачи и основная теорема.** Следует отметить, что некоторые обозначения, используемые в данной работе, отличаются от обозначений, использованных в [10].

Медленное замещение одной жидкости другой жидкостью в ячейке Хеле-Шоу описывается сдедующими уравнениями:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v} = -M\nabla p \quad \text{в} \quad \Omega(t),\ t > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости жидкости; $p$ — давление в жидкости; $M = b^2/(12\mu)$ — подвижность; $\mu$ — вязкость жидкости; $b$ — ширина пластин. В случае радиального течения в задаче об образовании пальцеобразных структур достаточно исследовать уравнения (1.1) при геометрических ограничениях

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \quad R_* < |x| < R(t) + \zeta(x/|x|, t)\},$$

где $R_*$ — радиус отверстия, через которое поступает замещающая жидкость с расходом $Q(t)$; $R(t)$ — радиус невозмущенной области:

$$\pi R(t)^2 = \pi R_0^2 + \int\limits_0^t Q(\tau)\, d\tau, \qquad R_0 \equiv R(0) > R_*,$$

$\zeta$ — радиус возмущенной области. Ставятся следующие начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} &= Q(t)/(2\pi R_*) \quad \text{на} \quad \Gamma_* = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x| = R_*\},\ t > 0, \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} &= V_n, \qquad p = p_e - \sigma(b/2 + H) \quad \text{на} \quad \Gamma(t),\ t > 0; \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$(\boldsymbol{v}, p)\big|_{t=0} = (\boldsymbol{v}^0, p^0) \quad \text{на} \quad \Omega(0) \equiv \Omega, \quad \zeta\big|_{t=0} = \zeta^0 \quad \text{на} \quad \Gamma(0) \equiv \Gamma \quad (\zeta^0 > R_* - R_0). \tag{1.3}$$

Здесь

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x| = R(t) + \zeta(x/|x|, t)\},$$

$V_n$ — нормальная скорость границы раздела $\Gamma(t)$; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к $\Gamma_*$ или $\Gamma(t)$; $p_e$ — давление в вытесненной жидкости; $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; $H$ — кривизна поверхности $\Gamma(t)$.

Задача (1.1)–(1.3) для определения $\boldsymbol{v}$, $p$, $\zeta$ сводится к задаче определения $p$, $\zeta$:

$$\begin{gathered} \Delta p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega(t),\ t > 0, \qquad -M\nabla p \cdot \boldsymbol{n} = Q(t)/(2\pi R_*) \quad \text{на} \quad \Gamma_*,\ t > 0, \\ -M\nabla p \cdot \boldsymbol{n} = V_n, \qquad p = p_e - \sigma(b/2 + H) \quad \text{на} \quad \Gamma(t),\ t > 0, \\ p\big|_{t=0} = p^0 \quad \text{на} \quad \Omega, \qquad \zeta\big|_{t=0} = \zeta^0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Давление $p^0$ должно удовлетворять условиям

$$\begin{gathered} \Delta p^0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad -M\nabla p^0 \cdot \boldsymbol{n} = Q(0)/(2\pi R_*) \quad \text{на} \quad \Gamma_*, \\ p^0 = p_e^0 - \sigma(b/2 + H^0) \equiv p_e - \sigma(b/2 + H)\big|_{t=0} \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{gathered} \tag{1.5}$$

В полярных координатах $(r, \theta)$ задача (1.4) записывается в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial p}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0, \qquad r \in (R_*, R(t) + \zeta(\theta, t)), \quad \theta \in J \equiv (0, 2\pi), \quad t > 0,$$

$$
\begin{gathered}
M\,\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q(t)}{2\pi R_*}, \qquad r = R_*, \quad \theta \in J, \quad t > 0, \\
M\Big(\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}\,(R(t) + \zeta), \qquad p = p_e - \sigma(b/2 + H), \\
r = R(t) + \zeta(\theta, t), \quad \theta \in J, \quad t > 0, \\
p\big|_{t=0} = p^0, \quad r \in (R_*, R_0 + \zeta^0(\theta)), \quad \theta \in J, \qquad \zeta\big|_{t=0} = \zeta^0, \quad \theta \in J,
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

где

$$
H = \frac{(R+\zeta)^2 + 2(\partial\zeta/\partial\theta)^2 - (R+\zeta)\,\partial^2\zeta/\partial\theta^2}{[(R+\zeta)^2 + (\partial\zeta/\partial\theta)^2]^{3/2}}.
$$

После преобразования области $\Omega(t) = \{(r, \theta)\colon r \in (R_*, R(t) + \zeta(\theta, t)),\ \theta \in J\}$ в область $\Omega = \{(r', \theta')\colon r' \in (R_*, R_0 + \zeta^0(\theta')),\ \theta' \in J\}$ путем замены переменных

$$
r' = \frac{R_0 + \zeta^0 - R_*}{R + \zeta - R_*}\,(r - R_*) + R_*, \quad \theta' = \theta, \quad t' = t, \quad p(r, \theta, t) = p'(r', \theta', t'), \quad \zeta(\theta, t) = \zeta'(\theta', t')
$$

задача (1.6) сводится к задаче (штрихи у безразмерных величин опущены)

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_\zeta p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\ t > 0, \\
\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q(t)}{2\pi R_* M}\,\frac{R + \zeta - R_*}{R_0 + \zeta^0 - R_*} \quad \text{на} \quad \Gamma_* \equiv \{r = R_*,\ \theta \in J\}, \quad t > 0, \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} + b_2(\zeta)\,\frac{\partial p}{\partial r} + b_1(\zeta)\,\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{Q(t)}{2\pi R}, \qquad p = p_e - \sigma\Big(\frac{b}{2} + H\Big) \\
\text{на} \quad \Gamma \equiv \{r = R_0 + \zeta^0(\theta),\ \theta \in J\}, \quad t > 0, \\
p\big|_{t=0} = p^0 \quad \text{на} \quad \Omega, \qquad \zeta\big|_{t=0} = \zeta^0 \quad \text{на} \quad J,
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\zeta \equiv \mathcal{L}_\zeta\Big(r, \theta; \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\Big) &= \frac{1}{\{R_* + [(R + \zeta - R_*)/(R_0 + \zeta^0 - R_*)](r - R_*)\}^2} \times \\
&\times \Big\{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\Big(\frac{1}{R_0 + \zeta^0 - R_*}\,\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R + \zeta - R_*}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\Big)(r - R_*)\,\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \theta} + \\
&+ \Big[\Big(R_* + \frac{R + \zeta - R_*}{R_0 + \zeta^0 - R_*}\,(r - R_*)\Big)^2\Big(\frac{R_0 + \zeta^0 - R_*}{R + \zeta - R_*}\Big)^2 + \\
&+ \Big(\frac{1}{R_0 + \zeta^0 - R_*}\,\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R + \zeta - R_*}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\Big)^2 (r - R_*)^2\Big]\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big\} + \\
&+ \Big\{\frac{1}{R_* + [(R + \zeta - R_*)/(R_0 + \zeta^0 - R_*)](r - R_*)}\,\frac{R_0 + \zeta^0 - R_*}{R + \zeta - R_*} + \\
&+ \frac{r - R_*}{\{R_* + [(R + \zeta - R_*)/(R_0 + \zeta^0 - R_*)](r - R_*)\}^2} \times \\
&\times \Big[\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{1}{R_0 + \zeta^0 - R_*}\,\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R + \zeta - R_*}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\Big) + \\
&+ \Big(\frac{1}{R_0 + \zeta^0 - R_*}\,\frac{d\zeta^0}{d\theta} - \frac{1}{R + \zeta - R_*}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\Big)^2\Big]\Big\}\,\frac{\partial}{\partial r},
\end{aligned}
$$

$$b_1(\zeta) = -M\,\frac{1}{(R+\zeta)^2}\,\frac{\partial\zeta}{\partial\theta},$$

$$b_2(\zeta) = M\Big\{\frac{R_0+\zeta^0-R_*}{R+\zeta-R_*}\Big[1+\frac{1}{(R+\zeta)^2}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\Big)^2\Big]-\frac{1}{(R+\zeta)^2}\,\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\,\frac{d\zeta^0}{d\theta}\Big\}.$$

В данной работе используются стандартные пространства Гельдера [17, 18]

$$C^{l+\alpha}(\bar\Omega) = \{u(x)\in C(\bar\Omega):\quad \|u\|^{(l+\alpha)}<\infty\},\qquad l=0,1,2,\dots,\quad \alpha\in(0,1),$$

$$C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}_{x,t}(\bar\Omega_T) = \{u(x,t)\in C_{x,t}(\bar Q_T):\quad \|u\|_T^{(l+\alpha)}<\infty\},\quad \bar Q_T\equiv\bar\Omega\times[0,T],$$

снабженные нормами

$$\|u\|^{(l+\alpha)} = \|u\|^{(l)}+\langle D^l_x u\rangle^{(\alpha)},\qquad D^l_x=\sum_{|j|=l}D^j_x,$$

$$\|u\|_T^{(l+\alpha)} = \|u\|_T^{(l)}+\sum_{k+2k'=l}\Big\langle\frac{\partial^{k'}}{\partial t^{k'}}\,D^k_x u\Big\rangle_T^{(\alpha)}+\sum_{k+2k'=l-1}^{l}\Big\langle\frac{\partial^{k'}}{\partial t^{k'}}\,D^k_x u\Big\rangle_{t,T}^{((l-k-2k'+\alpha)/2)}$$

соответственно. Здесь

$$\|u\|^{(l)}=\sum_{k=0}^{l}|D^k_x u|^{(0)},\qquad |u|^{(0)}=\sup_{x\in\bar\Omega}|u(x)|,\qquad \langle u\rangle^{(\alpha)}=\sup_{x,x'\in\bar\Omega,\ x\neq x'}\frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^\alpha},$$

$$\|u\|_T^{(l)}=\sum_{k+2k'=0}^{l}\Big|\frac{\partial^{k'}}{\partial t^{k'}}\,D^k_x u\Big|_T^{(0)},\quad |u|_T^{(0)}=\sup_{(x,t)\in\bar Q_T}|u(x,t)|,\quad \langle u\rangle_T^{(\alpha)}=\langle u\rangle_{x,T}^{(\alpha)}+\langle u\rangle_{t,T}^{(\alpha/2)},$$

$$\langle u\rangle_{x,T}^{(\alpha)}=\sup_{(x,t),(x',t)\in\bar Q_T,\ x\neq x'}\frac{|u(x,t)-u(x',t)|}{|x-x'|^\alpha},\quad \langle u\rangle_{t,T}^{(\alpha)}=\sup_{(x,t),(x,t')\in\bar Q_T,\ t\neq t'}\frac{|u(x,t)-u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha}.$$

Векторное пространство обозначается так же, как его компоненты, а норма этого пространства полагается равной сумме норм всех его компонент. Вводятся также полунормы

$$[u]_T^{(\alpha,\beta)}\equiv\sup_{x,y\in\bar\Omega,\ t,t'\in[0,T]}\frac{|u(x,t)-u(y,t)-u(x,t')+u(y,t')|}{|x-y|^\alpha|t-t'|^\beta},\quad \alpha,\beta\in(0,1),$$

банаховы пространства $E^{k+\alpha}(\bar Q_T)$ ($k=0,1,2,\ \alpha\in(0,1)$) бесконечно дифференцируемых функций с соответствующими нормами

$$\|u\|_{E^\alpha(\bar Q_T)}=\|u\|_T^{(\alpha)}+[u]_T^{(\alpha,\alpha/2)},\qquad \|u\|_{E^{1+\alpha}(\bar Q_T)}=\|D^1_x u\|_{E^\alpha(\bar Q_T)}+D^{\alpha,\alpha}[u]_T,$$

$$\|u\|_{E^{2+\alpha}(\bar Q_T)}=\|D^2_x u\|_{E^\alpha(\bar Q_T)}+\sum_{l=0}^{1}D^{\alpha,\alpha}[D^l_x u]_T,\qquad D^{\alpha,\alpha}[u]_T=|u|_T^{(0)}+\langle u\rangle_{x,T}^{(\alpha)}+\langle u\rangle_{t,T}^{(\alpha)}+[u]_T^{(\alpha,\alpha)},$$

а также пространства

$$\hat E^{2+\alpha}(\bar Q_T)=\Big\{u\in E^{2+\alpha}(\bar Q_T):\quad \frac{\partial u}{\partial t}\in E^{1+\alpha}(\bar Q_T),\quad \|u\|_{\hat E^{2+\alpha}(\bar Q_T)}<\infty\Big\},$$

$$\hat E^{4+\alpha}(\bar Q_T)=\Big\{u\in \hat E^{2+\alpha}(\bar Q_T):\quad D^2_x u\in E^{2+\alpha}(\bar Q_T),\quad \|u\|_{\hat E^{4+\alpha}(\bar Q_T)}<\infty\Big\},$$

$$\|u\|_{\hat{E}^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)} \equiv \|u\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{E^{1+\alpha}(\bar{Q}_T)},$$
$$\|u\|_{\hat{E}^{4+\alpha}(\bar{Q}_T)} \equiv \|u\|_{\hat{E}^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)} + \|D_x^2 u\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)}.$$

Обозначим через $E_0^{l+\alpha}(\bar{Q}_T)$, $\hat{E}_0^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)$, $\hat{E}_0^{4+\alpha}(\bar{Q}_T)$ пространства, элементы которых со всеми производными по $t$ равны нулю при $t = 0$. Пространства функций на гладком многообразии $\Gamma$ в $\mathbb{R}^n$ определяются с помощью разбиения единицы и локальных отображений.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $T > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что $(p^0, \zeta^0) \in C^{3+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{4+\alpha}(\bar{J})$ удовлетворяют* (1.5), *$\partial p^0/\partial r > 0$ на $\Gamma$, $p_e \in C_{\theta,t}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\bar{J}_T)$, $Q \in C^\alpha([0,T])$ и условиям совместности. Предположим также, что $(p,\zeta) \in E^{2+\alpha}(\bar{Q}_T) \times \hat{E}^{4+\alpha}(\bar{J}_T)$ является решением задачи* (1.7). *Тогда существует зависящее от условий задачи значение $T_* > 0$, такое что это решение единственное на $[0, T_*]$.*

Заметим, что в теореме помимо утверждения о существовании [10] решения $(p,\zeta)$ задачи (1.7) в $E^{2+\alpha}(\bar{Q}_{T^*}) \times \hat{E}^{4+\alpha}(\bar{J}_{T^*})$ для некоторого $T^* \in (0,T]$ содержится утверждение, что предельный процесс в [10] имеет место для полной последовательности, а не для подпоследовательности на $[0, \min\{T_*, T^*\}]$. Это означает, что результат, полученный в [10], уточнен.

**2. Доказательство единственности решения.** Значения $\partial\zeta/\partial t|_{t=0}$ и $\partial^2\zeta/\partial t^2|_{t=0}$ определяются первым краевым условием на $\Gamma$ (1.7) и их первыми производными по $t$ при $t = 0$ соответственно. Обозначим через $\bar{\zeta} \in \hat{E}^{4+\alpha}(\bar{J}_T)$ расширение $\zeta^0$, такое что $(\bar{\zeta}, \partial\bar{\zeta}/\partial t, \partial^2\bar{\zeta}/\partial t^2)|_{t=0} = (\zeta^0, \partial\zeta/\partial t, \partial^2\zeta/\partial t^2)|_{t=0}$, через $(p,\zeta)$ и $(p',\zeta')$ — два решения задачи (1.7) в виде

$$\begin{gathered}(p,\zeta) = \Big(p^* + p^0 + \frac{r - R_*}{R + \bar{\zeta} - R_*}\,\frac{\partial p^0}{\partial r}\,\zeta^*, \zeta^* + \bar{\zeta}\Big),\\ (p',\zeta') = \Big(p^{**} + p^0 + \frac{r - R_*}{R + \bar{\zeta} - R_*}\,\frac{\partial p^0}{\partial r}\,\zeta^{**}, \zeta^{**} + \bar{\zeta}\Big)\end{gathered} \tag{2.1}$$

с оценками

$$\|p^a\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)} + \|\zeta^a\|_{\hat{E}^{4+\alpha}(\bar{J}_T)} \leqslant C_1 \qquad (a = *, **). \tag{2.2}$$

Тогда задача (1.7) сводится к следующей задаче для $(\hat{p}, \hat{\zeta}) = (p^* - p^{**}, \zeta^* - \zeta^{**})$:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_*\hat{p} = \Phi(p^*,\zeta^*) - \Phi(p^{**},\zeta^{**}) \quad \text{в} \quad \Omega,\ t > 0,\\ \frac{\partial\hat{p}}{\partial r} = \Psi_*(\zeta^*) - \Psi_*(\zeta^{**}) \quad \text{на} \quad \Gamma_*,\ t > 0,\\ \frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial t} + b_2(\bar{\zeta})\,\frac{\partial\hat{p}}{\partial r} + b_1(\bar{\zeta})\,\frac{\partial\hat{p}}{\partial\theta} = \Psi_1(p^*,\zeta^*) - \Psi_1(p^{**},\zeta^{**}),\\ \hat{p} + d_1(\bar{\zeta})\hat{\zeta} - \sigma d_2(\bar{\zeta})\,\frac{\partial^2\hat{\zeta}}{\partial\theta^2} = \Psi_2(\zeta^*) - \Psi_2(\zeta^{**}) \quad \text{на} \quad \Gamma,\ t > 0,\\ \hat{p}\big|_{t=0} = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \qquad \hat{\zeta}\big|_{t=0} = 0 \quad \text{на} \quad J.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_* \equiv \mathcal{L}_*\Big(r,\theta; \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\Big) = \text{v.p. } \mathcal{L}_{\bar{\zeta}}, \qquad \Phi(p^*,\zeta^*) = -\mathcal{L}_{\zeta^*+\bar{\zeta}}p + \mathcal{L}_*p^*,$$

$$\Psi_*(\zeta^*) = -\frac{\partial}{\partial r}\Big(p^0 + \frac{r - R_*}{R + \bar{\zeta} - R_*}\,\frac{\partial p^0}{\partial r}\Big)\zeta^* - \frac{R + \zeta^* + \bar{\zeta} - R_*}{R_0 + \zeta^0 - R_*}\,\frac{Q(t)}{2\pi R_* M},$$

$$\Psi_1(p^*,\zeta^*) = -b_2(\zeta)\,\frac{\partial p}{\partial r} - b_1(\zeta)\,\frac{\partial p}{\partial\theta} + b_2(\bar{\zeta})\,\frac{\partial p^*}{\partial r} + b_1(\bar{\zeta})\,\frac{\partial p^*}{\partial\theta} - \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t} - \frac{Q}{2\pi R},$$

$$\Psi_2(\zeta^*) = p_e - p^0 - \frac{2\sigma}{b} - \sigma d_2(\bar\zeta)\,\frac{\partial^2\zeta^*}{\partial\theta^2} - \sigma\,\frac{(R+\zeta)^2 + 2(\partial\zeta/\partial\theta)^2 - (R+\zeta)\,\partial^2\zeta/\partial\theta^2}{((R+\zeta)^2 + (\partial\zeta/\partial\theta)^2)^{3/2}},$$

$$d_1(\bar\zeta) = \frac{R_0 + \zeta^0 - R_*}{R + \bar\zeta - R_*}\frac{\partial p^0}{\partial r}, \qquad d_2(\bar\zeta) = \frac{R + \bar\zeta}{((R+\bar\zeta)^2 + (\partial\bar\zeta/\partial\theta)^2)^{3/2}},$$

причем решение $(p, \zeta)$ определено в (2.1).

Заметим, что из допущения $\partial p^0/\partial r > 0$ на $\Gamma$ следует неравенство $d_1(\bar\zeta) > 0$ при $t = 0$, поэтому $d_2(\bar\zeta) > 0$ при $t = 0$.

Ниже аналогично тому, как это сделано в [9, 11], доказано, что решение задачи (2.3) тождественно равно нулю на некотором интервале времени $[0, T_*]$ $(0 < T_* \leqslant T)$.

2.1. *Вспомогательная задача.* Рассмотрим вспомогательную линейную задачу

$$\mathcal{L}_* u = \phi \quad \text{в} \quad \Omega,\ t > 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \psi_* \quad \text{на} \quad \Gamma_*,\ t > 0,$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + b_2(\bar\zeta)\,\frac{\partial u}{\partial r} = \psi_1, \quad u + d_1(\bar\zeta)\rho - \sigma d_2(\bar\zeta)\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2} = \psi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,\ t > 0, \tag{2.4}$$
$$u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \qquad \rho\big|_{t=0} = 0 \quad \text{на} \quad J$$

для заданных $\phi$, $\psi_*$, $\psi_1$, $\psi_2$, удовлетворяющих условиям совместности и неравенствам $b_2 > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Так же как и в работе [9], рассмотрим следующие три модельные задачи в пространстве и полупространстве:

$$\mathcal{L}\bar u = \bar f \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0), \qquad \bar u\big|_{t=0} = 0; \tag{2.5}$$

$$\mathcal{L}\bar u = \bar f \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+,\ t > 0), \qquad \frac{\partial\bar u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = \bar g_*, \qquad \bar u\big|_{t=0} = 0; \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L}\bar u = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad t > 0,$$
$$\frac{\partial\bar\rho}{\partial t} + \bar d\,\frac{\partial\bar u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = \bar g_1, \quad \bar u + \bar d_1\bar\rho - \sigma\bar d_2\,\frac{\partial^2\bar\rho}{\partial x_1^2}\Big|_{x_2=0} = \bar g_2, \quad (\bar u, \bar\rho)\big|_{t=0} = (0, 0). \tag{2.7}$$

В (2.6), (2.7) $\mathbb{R}^2_+ \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon x_2 > 0\}$. Пусть $\bar d$, $\bar d_1$, $\bar d_2$ — положительные константы и $\mathcal{L} = \Delta$ в результате замены независимых переменных без потери общности (см. [17]). В предположении, что во всех трех модельных задачах выполнены условия совместности и функции $\bar f$, $\bar g^*$, $\bar g_1$, $\bar g_2$ имеют требуемую гладкость и компактные носители, решения задач представляются в виде (2.5), (2.6):

$$\bar u(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Gamma(x - y)\bar f(y, t)\,dy; \tag{2.8}$$

$$\bar u(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} N(x - y)\bar f(y, t)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}} N(x_1 - y_1, x_2)\bar g_*(y_1, t)\,dy_1, \tag{2.9}$$

где

$$\Gamma(x) = -(2\pi)^{-1}\log|x|, \quad x = (x_1, x_2), \qquad N(x) = \Gamma(x_1, x_2) + \Gamma(x_1, -x_2).$$

Оценивая интегралы (2.8), (2.9) так же, как оценивались объемные интегралы уравнения теплопроводности (см. [17–19]), получаем следующие оценки:

$$\|\bar u\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_T)} \leqslant C_2\|\bar f\|_{E^\alpha(\mathbb{R}^2_T)}, \quad \|\bar u\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})} \leqslant C_2(\|\bar f\|_{E^\alpha(\mathbb{R}^2_{+,T})} + \|\bar g_*\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}). \tag{2.10}$$

Поскольку первое краевое условие для задачи (2.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{\bar{d}}\Big(\bar{g}_1 - \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}\Big),$$

для заданного $\bar{\rho}$ решение $\bar{u}$ первой задачи в (2.7) удовлетворяет неравенству

$$\|\bar{u}\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})} \leqslant C_3\Big(\|\bar{g}_1\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \Big\|\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}\Big\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\Big). \tag{2.11}$$

После применения преобразования Фурье — Лапласа (см. [5–11, 19])

$$(\mathcal{FL})[\bar{u}](\xi, x_2, s) \equiv \tilde{\bar{u}}(\xi, x_2, s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,dt \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-i\xi x_1}\,\bar{u}(x_1, x_2, t)\,dx_1$$

задача (2.7) приводится к задаче

$$\tilde{\bar{u}}(\xi, x_2, s) = \tilde{\bar{v}}(\xi, s)\,\mathrm{e}^{-|\xi|x_2} \quad (x_2 > 0), \quad -\bar{d}\,|\xi|\tilde{\bar{v}} + s\tilde{\bar{\rho}} = \tilde{\bar{g}}_1, \quad \tilde{\bar{v}} + \bar{d}_1\tilde{\bar{\rho}} + \sigma\bar{d}_2\xi^2\tilde{\bar{\rho}} = \tilde{\bar{g}}_2,$$

следовательно,

$$\tilde{\bar{\rho}} = \frac{\tilde{\bar{g}}_1 + \bar{d}|\xi|\tilde{\bar{g}}_2}{s + \bar{d}\,|\xi|(\bar{d}_1 + \sigma\bar{d}_2\xi^2)}. \tag{2.12}$$

Применяя к (2.12) обратное преобразование Фурье — Лапласа

$$\bar{\rho}(x_1, t) \equiv (\mathcal{FL})^{-1}\tilde{\bar{\rho}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix_1\xi}\,d\xi \int\limits_{\operatorname{Re}s=a>0} \mathrm{e}^{st}\,\tilde{\bar{\rho}}\,(\xi, s)\,ds,$$

получаем

$$\bar{\rho}(x_1, t) = (\mathcal{FL})^{-1}\frac{1}{s + \bar{d}\,|\xi|(\bar{d}_1 + \sigma\bar{d}_2\xi^2)} * (\bar{g}_1 + \bar{d}\,(\mathcal{FL})^{-1}\,[|\xi|\tilde{\bar{g}}_2]). \tag{2.13}$$

Здесь знак “$*$” означает свертку по $x_1$ и $t$. Следуя работе [7], можно найти явное представление

$$Z^\sigma(x_1, t) = (\mathcal{FL})^{-1}\,\frac{1}{s + \bar{d}\,|\xi|(\bar{d}_1 + \sigma\bar{d}_2\xi^2)}, \quad t > 0.$$

Для этого достаточно рассмотреть случай $\bar{d}\bar{d}_1 = 1$, $\sigma\bar{d}\bar{d}_2 = \bar{d}'$. Так как

$$(s + |\xi|\,(1 + \bar{d}'\xi^2))^{-1} = \int\limits_0^\infty \exp\,[-\tau(s + |\xi|(1 + \bar{d}'\xi^2))]\,d\tau,$$

то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{e}^{-\tau(s+|\xi|(1+\bar{d}'\xi^2))+st}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{e}^{-\tau s+st}\,ds \underset{t}{*} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{e}^{-\tau|\xi|(1+\bar{d}'\xi^2)+st}\,ds =$$

$$= \delta(t-\tau) \underset{t}{*} \mathrm{e}^{-\tau|\xi|(1+\bar{d}'\xi^2)}\,\delta(t) \quad (a > 0),$$

где запись "$\underset{t}{*}$" означает свертку по $t$, следовательно,

$$\tilde{Z}^\sigma(\xi,t)=\int\limits_0^\infty \delta(t-\tau)\underset{t}{*}\mathrm{e}^{-\tau|\xi|\,(1+\bar{d}'\xi^2)}\,\delta(t)\,d\tau=\mathrm{e}^{-t|\xi|(1+\bar{d}'\xi^2)}\,. \tag{2.14}$$

Для получения оценки $Z^\sigma(x_1,t)$ без потери общности предположим, что $x_1>0$. Пусть $\xi_0=0$ и $\xi_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ — нули $\cos(\xi x_1)=0$ $(\xi_n<\xi_{n+1})$. Тогда

$$|Z^\sigma(x_1,t)|=\Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\tilde{Z}^\sigma(\xi,t)\cos(\xi x_1)\,d\xi\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^\infty\Big(\int\limits_{\xi_{2n}}^{\xi_{2n+1}}\mathrm{e}^{-t|\xi|(1+\bar{d}'\xi^2)}\cos(\xi x_1)\,d\xi-\int\limits_{\xi_{2n+1}}^{\xi_{2n+2}}\mathrm{e}^{-t|\xi|(1+\bar{d}'\xi^2)}\cos(\xi x_1)\,d\xi\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{t}{x_1^2+t^2}+\frac{4x_1}{x_1^2+t^2}\,\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi t/(2x_1))}\Big)\leqslant C_3\,\frac{t}{x_1^2+t^2}. \tag{2.15}$$

Производные $Z^\sigma(x_1,t)$ оцениваются аналогично, следовательно, имеет место

**Лемма 1.** *Справедливы следующие неравенства*:

$$|Z^\sigma(x_1,t)|\leqslant C_4\,\frac{1}{\sqrt{x_1^2+t^2}},\qquad\Big|\frac{\partial}{\partial t}\,Z^\sigma(x_1,t)\Big|+\Big|\frac{\partial}{\partial x_1}\,Z^\sigma(x_1,t)\Big|\leqslant C_4\,\frac{1}{x_1^2+t^2},$$

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_1}\,Z^\sigma(x_1,t)\Big|+\Big|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,Z^\sigma(x_1,t)\Big|\leqslant C_4\,\frac{1}{(x_1^2+t^2)^{3/2}}.$$

Из леммы 1 следует

$$\lim_{t\to0}\int\limits_{-\infty}^\infty Z^\sigma(x_1-\xi,t)f(\xi)\,d\xi=f(x_1) \tag{2.16}$$

для любой ограниченной непрерывной функции $f(x_1)$. Введем функции

$$w(x_1,t)=(Z^\sigma*g)(x_1,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)g(y,\tau)\,dy,$$

$$w_h(x_1,t)=\int\limits_0^{t-h}d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)g(y,\tau)\,dy\quad(h>0).$$

Для $w_h$ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\,w_h(x_1,t)=\int\limits_0^{t-h}d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\partial}{\partial t}\,Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)(g(y,\tau)-g(x_1,\tau))\,dy+$$

$$+\int\limits_0^{t-h}g(x_1,\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\partial}{\partial t}\,Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)\,dy+\int\limits_{-\infty}^\infty Z^\sigma(x_1-y,h)g(y,t-h)\,dy.$$

Используя (2.16), оценки, приведенные в лемме 1, и явные формулы, полученные из (2.14), после перехода к пределу $h \to 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x_1, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1 - y, t - \tau)(g(y, \tau) - g(x_1, \tau))\, dy + \\ + \int\limits_0^t g(x_1, \tau) d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1 - y, t - \tau)\, dy + g(x_1, t); \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} w(x_1, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1} Z^\sigma(x_1 - y, t - \tau)\Big(\frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \tau)\Big)\, dy. \qquad (2.18)$$

Обозначая через $w^a$ первый член в правой части уравнения (2.17) и следуя работе [17], получаем оценку

$$w^a(x_1, t) - w^a(x_1', t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x_1 - y| \leqslant 2|x_1 - x_1'|} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1 - y, t - \tau)(g(y, \tau) - g(x_1, \tau))\, dy - \\ - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x_1 - y| \leqslant 2|x_1 - x_1'|} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1' - y, t - \tau)(g(y, \tau) - g(x_1', \tau))\, dy + \\ + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|x_1 - y| \geqslant 2|x_1 - x_1'|} \frac{\partial}{\partial t} (Z^\sigma(x_1 - y, t - \tau) - Z^\sigma(x_1' - y, t - \tau))(g(y, \tau) - g(x_1, \tau))\, dy + \\ + \int\limits_0^t (g(x_1', \tau) - g(x_1, \tau))\, d\tau \int\limits_{|x_1 - y| \geqslant 2|x_1 - x_1'|} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1' - y, t - \tau)\, dy \equiv \sum_{j=1}^4 I_j. \qquad (2.19)$$

Используя лемму 1, нетрудно показать, что

$$|I_1| \leqslant C_5'' \langle g \rangle_{x,T}^{(\alpha)} \int\limits_{|x_1 - y| \leqslant 2|x_1 - x_1'|} |x_1 - y|^\alpha\, dy \int\limits_0^t \frac{1}{|x_1 - y|^2 + (t - \tau)^2}\, d\tau \leqslant \\ \leqslant C_5' \langle g \rangle_{x,T}^{(\alpha)} \int\limits_{|x_1 - y| \leqslant 2|x_1 - x_1'|} |x_1 - y|^{\alpha - 1}\, d\tau \leqslant C_5 \langle g \rangle_{x,T}^{(\alpha)} |x_1 - x_1'|^\alpha.$$

Интегралы $I_2$ и $I_3$ оцениваются аналогично $I_1$ с использованием теоремы о среднем для $I_3$. Наконец, в силу леммы 1 для $I_4$ получаем

$$|I_4| \leqslant C_6' \langle g \rangle_{x,T}^{(\alpha)} |x_1 - x_1'|^\alpha \int\limits_0^t d\tau \Big| \int\limits_{|x_1 - y| \geqslant 2|x_1 - x_1'|} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1' - y, \tau)\, dy \Big| \leqslant C_6 \langle g \rangle_{x,T}^{(\alpha)} |x_1 - x_1'|^\alpha.$$

Аналогично оценивается второй член в правой части (2.17). Поэтому из (2.19) следует

$$\Big\langle \frac{\partial w}{\partial t}\Big\rangle^{(\alpha)}_{x,T} \leqslant C_7 \langle g\rangle^{(\alpha)}_{x,T}. \tag{2.20}$$

Далее, при $t' \leqslant t$ имеет место равенство

$$w^a(x_1,t) - w^a(x_1,t') = \int\limits_{2t'-t}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)(g(y,\tau)-g(x_1,\tau))\,dy -$$

$$- \int\limits_{2t'-t}^{t'} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t'} Z^\sigma(x_1-y,t'-\tau)(g(y,\tau)-g(x_1,\tau))\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{2t'-t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1-y,t-\tau) - \frac{\partial}{\partial t'} Z^\sigma(x_1-y,t'-\tau)\Big)(g(y,\tau)-g(x_1,\tau))\,dy \equiv \sum_{j=1}^{3} I'_j.$$

Из леммы 1 следует

$$|I'_1| \leqslant C''_8 \langle g\rangle^{(\alpha)}_{x,T} \int\limits_{2t'-t}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x_1-y|^\alpha}{(x_1-y)^2+(t-\tau)^2}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C'_8 \langle g\rangle^{(\alpha)}_{x,T} \int\limits_{2t'-t}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau \leqslant C_8 \langle g\rangle^{(\alpha)}_{x,T} |t-t'|^\alpha.$$

Оба члена $I'_2$ и $I'_3$ оцениваются так же, как $I'_1$; в случае $I'_3$ используются теорема о среднем значении и оценка $\partial^2 Z^\sigma(x_1,t)/\partial t^2$, полученная из (2.15). После ряда вычислений получаем

$$\langle w^a\rangle^{(\alpha)}_{t,T} \leqslant C_9 \langle g\rangle^{(\alpha)}_{x,T}.$$

Второе слагаемое в правой части (2.17) оценивается аналогично. В результате имеем

$$\Big\langle \frac{\partial w}{\partial t}\Big\rangle^{(\alpha)}_{t,T} \leqslant C_{10}(\langle g\rangle^{(\alpha)}_{x,T} + \langle g\rangle^{(\alpha)}_{t,T}). \tag{2.21}$$

Из (2.17) находим

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_1} w(x_1,t) = \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial y} g(y,\tau) - \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1,\tau)\Big)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1,\tau)\,d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)\,dy + \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1,t). \tag{2.22}$$

Повторяя расчеты, выполненные при выводе (2.22), получаем следующие оценки:

$$\Big\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x_1}\Big\rangle^{(\alpha)}_{x,T} \leqslant C_{11} \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}\Big\rangle^{(\alpha)}_{x,T}, \qquad \Big\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x_1}\Big\rangle^{(\alpha/2)}_{t,T} \leqslant C_{11} \Big\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}\Big\rangle^{(\alpha)}_{T}. \tag{2.23}$$

Получим оценки $[\partial^2 w/\partial t\,\partial x_1]_T^{(\alpha,\alpha/2)}$. Обозначив первый член в правой части равенства (2.22) через $W$, находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\, Z^\sigma(x_1-y,\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial y}\, g(y,t-\tau) - \frac{\partial}{\partial x_1}\, g(x_1,t-\tau)\Big)\, dy,$$

поэтому при $\Delta t > 0$ справедливы равенства

$$\frac{W(x_1,t)-W(x_1,t-\Delta t)}{(\Delta t)^{\alpha/2}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\, Z^\sigma(x_1-y,\tau)(\varphi(y,t-\tau)-\varphi(x_1,t-\tau))\, dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\, Z^\sigma(x_1-y,t-\tau)(\varphi(y,\tau)-\varphi(x_1,\tau))\, dy,$$

$$\varphi(x_1,t) = \frac{1}{(\Delta t)^{\alpha/2}}\Big(\frac{\partial g(x_1,t)}{\partial x_1} - \frac{\partial g(x_1,t-\Delta t)}{\partial x_1}\Big).$$

Вновь выполняя проведенные выше расчеты, получаем

$$\langle W\rangle_{x,T}^{(\alpha)} \leqslant C_{12}'\langle\varphi\rangle_{x,T}^{(\alpha)} = C_{12}' \sup_{x_1,x_1',t} \frac{|\varphi(x_1,t)-\varphi(x_1',t)|}{|x_1-x_1'|^\alpha} =$$

$$= C_{12}' \sup_{x_1,x_1',t} \frac{1}{|x_1-x_1'|^\alpha(\Delta t)^{\alpha/2}}\Big|\frac{\partial g(x_1,t)}{\partial x_1} - \frac{\partial g(x_1',t)}{\partial x_1} - \frac{\partial g(x_1,t-\Delta t)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(x_1',t-\Delta t)}{\partial x_1}\Big|,$$

следовательно,

$$[W]_T^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant C_{12}\Big[\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big]_T^{(\alpha,\alpha/2)}.$$

Из этой оценки и оценки для второго члена в правой части (2.22), аналогичной оценке для $W$, находим

$$\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x_1}\Big]_T^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant C_{13}\Big[\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big]_T^{(\alpha,\alpha/2)}. \qquad (2.24)$$

Далее, представляя $(\mathcal{FL})^{-1}[|\xi|\tilde{\bar{g}}_2]$ в виде

$$(\mathcal{FL})^{-1}[|\xi|\tilde{\bar{g}}_2](x_1,t) = 2\,\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x_1-y,x_2)\bar{g}_2(y,\tau)\, dy\,\Big|_{x_2=0},$$

получаем следующую оценку (см. [5, 20]):

$$\langle(\mathcal{FL})^{-1}[|\xi|\tilde{\bar{g}}_2](\,\cdot\,,t)\rangle^{(\alpha)} \leqslant C_{14}\Big\langle\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial x_1}\,(\,\cdot\,,t)\Big\rangle^{(\alpha)}.$$

Таким образом, из уравнения (2.13) и оценок (2.20), (2.21), (2.23), (2.24) следует неравенство

$$\Big\|\frac{\partial\bar\rho}{\partial t}\Big\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} \leqslant C_{15}(\|\bar{g}_1\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \|\bar{g}_2\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}). \qquad (2.25)$$

С учетом леммы 1 рассуждения, приведенные выше, применимы к (2.18), поэтому оценки, аналогичные (2.20), (2.21), (2.23), (2.24), справедливы для $\partial^2 w/\partial x_1^2$:

$$\Big\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Big\|_{E^\alpha(\mathbb{R}_T)} \leqslant C_{16}\Big\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big\|_{E^\alpha(\mathbb{R}_T)}, \qquad \Big\langle\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Big\rangle_{t,T}^{(\alpha)} \leqslant C_{16}\Big\langle\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big\rangle_{x,T}^{(\alpha)}.$$

Нетрудно оценить низшие производные $w$. Следовательно, из (2.13) получаем

$$\begin{gathered}\|\bar\rho\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} \leqslant C_{17}\,(\|\bar g_1\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \|\bar g_2\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}),\\ \Big\langle \frac{\partial^2\bar\rho}{\partial x_1^2}\Big\rangle^{(\alpha)}_{t,T} \leqslant C_{17}\Big(\Big\langle \frac{\partial \bar g_1}{\partial x_1}\Big\rangle^{(\alpha)}_{x,T} + \Big\langle \frac{\partial^2 \bar g_2}{\partial x_1^2}\Big\rangle^{(\alpha)}_{x,T}\Big).\end{gathered} \tag{2.26}$$

Для дальнейшей регуляризации $\bar\rho$ используется представление, полученное из (2.13):

$$\frac{\partial^2\bar\rho}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{\sigma\bar d\bar d_2}\Big((\mathcal{F}\mathcal{L})^{-1}\Big[\frac{1}{|\xi|}\Big]*\bar g_1 + \bar d\bar g_2 - \bar d\bar d_1\bar\rho - (\mathcal{F}\mathcal{L})^{-1}\Big[\frac{1}{|\xi|}\Big]*\frac{\partial\bar\rho}{\partial t}\Big).$$

Следуя [5], находим оценку

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\partial^2\bar\rho}{\partial x_1^2}\Big\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} \leqslant C_{18}\Big(&\|\bar g_1\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \|\bar g_2\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \\ &+ \|\bar\rho\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \Big\|\frac{\partial\bar\rho}{\partial t}\Big\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)}\Big)\end{aligned} \tag{2.27}$$

с учетом оценки

$$(\mathcal{F}\mathcal{L})^{-1}\Big[\frac{1}{|\xi|}\Big]*g(x_1,t) = \int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x_1-y,0,t-\tau)g(y,\tau)\,dy.$$

Из (2.11), (2.25) следует оценка

$$\|\bar u\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)} \leqslant C_{19}\,(\|\bar g_1\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \|\bar g_2\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)}). \tag{2.28}$$

Таким образом, из оценок (2.10), (2.26)–(2.28) следует

**Лемма 2.** *Решение* $(\bar u,\bar\rho)\in E_0^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})\times\hat E_0^{4+\alpha}(\mathbb{R}_T)$ *задачи* (2.7) *удовлетворяет неравенству*

$$\|\bar u\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{+,T})} + \|\bar\rho\|_{\hat E^{4+\alpha}(\mathbb{R}_T)} \leqslant C_{20}\,(\|\bar g_1\|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T)} + \|\bar g_2\|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}_T)})$$

*для любого* $T>0$ *и* $\alpha\in(0,1)$ *с положительной константой* $C_{20}$.

С использованием леммы 2 разрешимость задачи (2.4) доказывается путем построения регуляризатора, аналогично тому как это сделано в задаче со свободной границей для уравнений гидродинамики [21] (см. также [20, 22, 23]). Следовательно, имеет место

**Лемма 3.** *Единственное решение задачи* (2.4) $(u,\rho)\in E_0^{2+\alpha}(\bar Q_T)\times\hat E_0^{4+\alpha}(\Gamma_T)$ *для любого* $T>0$ *и* $\alpha\in(0,1)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{E^{2+\alpha}(\bar Q_T)} + \|\rho\|_{\hat E^{4+\alpha}(\Gamma_T)} \leqslant C_{21}\,\|(\phi,\psi_*,\psi_1,\psi_2)\|_{\mathcal{H}_T},$$

*где* $\mathcal{H}_T = E_0^{\alpha}(\bar Q_T)\times E_0^{1+\alpha}(\Gamma_{*,T})\times E_0^{1+\alpha}(\Gamma_T)\times E_0^{2+\alpha}(\Gamma_T)$*;* $C_{21}$ *— положительная константа.*

2.2. *Доказательство теоремы для линейной задачи* (2.3). Пусть $(p,\zeta)$, $(p',\zeta')$ — два решения задачи (1.7) вида (2.1), удовлетворяющие условиям (2.2).

Задача (2.3) преобразуется к виду (2.4) путем подстановки $(u,\rho)=(\hat p,\hat\zeta)$. Фактически решение $(u,\rho)$ удовлетворяет (2.4) при

$$\begin{gathered}\phi = \hat\Phi(\hat p,\hat\zeta)\equiv\Phi(p^*,\zeta^*)-\Phi(p^{**},\zeta^{**}),\qquad \psi_* = \hat\Psi_*(\hat\zeta)\equiv\Psi_*(\zeta^*)-\Psi_*(\zeta^{**}),\\ \psi_1 = \hat\Psi_1(\hat p,\hat\zeta)\equiv\Psi_1(p^*,\zeta^*)-\Psi_1(p^{**},\zeta^{**}),\qquad \psi_2 = \hat\Psi_2(\hat\zeta)\equiv\Psi_2(\zeta^*)-\Psi_2(\zeta^{**})\end{gathered}$$

для заданных $(p^*,\zeta^*)$, $(p^{**},\zeta^{**})\in E_0^{2+\alpha}(\bar Q_T)\times\hat E_0^{4+\alpha}(\Gamma_T)$. Очевидно, что

$$(\hat\Phi(\hat p,\hat\zeta),\hat\Psi_*(\hat\zeta),\hat\Psi_1(\hat p,\hat\zeta),\hat\Psi_2(\hat\zeta))\big|_{t=0} = (0,0,0,0).$$

Те же вычисления, что и в подп. 2.1, выполненные с использованием теоремы о среднем значении, интерполяции и неравенства Юнга, приводят к следующему неравенству:

$$\|(\hat{\Phi}(\hat{p},\hat{\zeta}),\hat{\Psi}_*(\hat{\zeta}),\hat{\Psi}_1(\hat{p},\hat{\zeta}),\hat{\Psi}_2(\hat{\zeta}))\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma + C_\gamma t^\chi F(2C_1))\,(\|\hat{p}\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_t)} + \|\hat{\zeta}\|_{\hat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)}) \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.29)$$

Здесь $\gamma > 0$ — произвольная константа; $C_\gamma > 0$ — невозрастающая константа, зависящая от $\gamma$, $\chi > 0$ — константа, зависящая от $\alpha$; $F(\,\cdot\,)$ — многочлен от $2C_1$.

Используя оценку (2.29) для правой части неравенства в лемме 3, получаем

$$\|\hat{p}\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_t)} + \|\hat{\zeta}\|_{\hat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{21}\,(\gamma + C_\gamma t^\chi F(2C_1))\,(\|\hat{p}\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_t)} + \|\hat{\zeta}\|_{\hat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)}) \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (2.30)$$

Полагая $\gamma = 1/(4C_{21})$ и $T_* = (4C_{21}C_\gamma F(2C_1))^{-1/\chi}$ в (2.30), получаем

$$\|\hat{p}\|_{E^{2+\alpha}(\bar{Q}_t)} + \|\hat{\zeta}\|_{\hat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_t)} = 0 \quad \forall t \in [0, T_*].$$

Следовательно, $(p^*, \zeta^*) = (p^{**}, \zeta^{**}) \in E_0^{2+\alpha}(\bar{Q}_{T_*}) \times \hat{E}_0^{4+\alpha}(\Gamma_{T_*})$, что эквивалентно утверждению, согласно которому решение $(p,\zeta)$ задачи (1.7) является единственным в $E^{2+\alpha}(\bar{Q}_{T_*}) \times \hat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_{T_*})$.

Следует отметить, что в работе [10] для некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$, $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$ последовательности $\{\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\varepsilon \to 0$ существование решения $(p,\zeta)$ задачи (1.7) в $E^{2+\alpha}(\bar{Q}_{T^*}) \times \hat{E}^{4+\alpha}(\Gamma_{T^*})$ было доказано как предел решения $(p_\varepsilon, \zeta_\varepsilon)$ регуляризованной параболической задачи, а именно задачи (1.7), для которой в первом уравнении нуль в правой части заменяется на член $\varepsilon\,\partial p/\partial t + \varepsilon f$ ($f$ — некоторая подходящая функция):

$$(p,\zeta)(x,t) = \lim_{k\to\infty} (p_{\varepsilon_k}, \zeta_{\varepsilon_k})(x,t) \quad \text{на} \quad [0, T^*].$$

Единственность решения $(p,\zeta)$ задачи (1.7), рассмотренной в данной работе, означает, что

$$(p,\zeta)(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} (p_\varepsilon, \zeta_\varepsilon)(x,t) \quad \text{на} \quad [0, \min\{T_*, T^*\}]$$

для полной последовательности $\{\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Hele-Shaw H. S.** The flow of water // Nature. 1898. V. 58. P. 33–36.
2. **Saffman P. G., Taylor G. I.** The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. P. 312–329.
3. **Bensimon D., Kadanoff L. P., Liang S., et al.** Viscous flow in two dimensions // Rev. Modern Phys. 1986. V. 58. P. 977–999.
4. **Kessler D. A., Koplik J., Levine H.** Pattern selection in fingering growth phenomena // Adv. Phys. 1988. V. 37. P. 255–339.
5. **Tani A., Tani H.** Classical solvability of the two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell // Mathematical fluid dynamics, present and future. Tokyo: Springer, 2016. P. 317–348. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 183).
6. **Tani A., Tani H.** Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell // Mat. Zametki SVFU. 2018. V. 25, N 3. P. 92–114.

7. **Bazaliĭ B. V.** On estimates for the solution of a model conjugation problem in the theory of problems with a free boundary // Differ. Uravn. 1997. V. 33. P. 1374–1381 (in Russian).
8. **Bazaliĭ B. V.** On a proof of the classical solvability of the Hele-Shaw problem with a free surface // Ukraïn. Mat. Zh. 1998. V. 50. P. 1452–1462 (in Russian).
9. **Tani A., Tani H.** On the uniqueness of the classical solutions of the radial viscous fingering problems in a Hele-Shaw cell // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14, N 4. P. 475–482.
10. **Tani H.** Classical solvability of the radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension // Siberian J. Pure Appl. Math. 2016. V. 16. P. 79–92.
11. **Tani A., Tani H.** Unique classical solvability of two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell with surface tension. (submitted).
12. **Escher J., Simonett G.** Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw model // SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28. P. 1028–1047.
13. **Escher J., Simonett G.** Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension // Adv. Different. Equat. 1997. V. 2. P. 619–642.
14. **Antontsev S. N., Gonçalves C. R., Meirmanov A. M.** Local existence of classical solutions to the well-posed Hele-Shaw problem // Portugaliae Math. 2002. V. 59, N 4. P. 435–452.
15. **Antontsev S. N., Gonçalves C. R., Meirmanov A. M.** Exact estimates for the classical solutions to the free boundary problem in the Hele-Shaw cell // Adv. Difference Equat. 2003. V. 8, N 10. P. 1259–1280.
16. **Antontsev S. N., Meirmanov A. M., Yurinsky B. V.** Weak solutions for a well-posed Hele-Shaw problem // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. Artic. Ric. Mat. 2004. V. 7, N 2. P. 397–424.
17. **Ladyžhenskaya O. A.** Linear and quasilinear equations of parabolic type / O. A. Ladyžhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva. M.: Nauka, 1967 (in Russian).
18. **Ladyženskaja O. A.** Linear and quasilinear equations of elliptic type / O. A. Ladyženskaja, N. N. Ural'ceva. M.: Nauka, 1973 (in Russian).
19. **Bazaliĭ B. V.** Stefan problem for the Laplace equation with regard for the curvature of the free boundary // Ukraïn. Mat. Zh. 1997. V. 49. P. 1299–1315 (in Russian).
20. **Solonnikov V. A.** On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form // Tr. Mat. Inst. Steklova. 1965. V. 83. P. 3–163 (in Russian).
21. **Tani A.** On the free boundary value problem for compressible viscous fluid motion // J. Math. Kyoto Univ. 1981. V. 21. P. 839–859.
22. **Solonnikov V. A.** General boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. 1 // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1964. V. 28. P. 665–706.
23. **Solonnikov V. A.** General boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. 2 // Tr. Mat. Inst. Steklova. 1966. V. 92. P. 233–297 (in Russian).

*Поступила в редакцию 15/IV 2024 г.,*
*после доработки — 15/IV 2024 г.*
*Принята к публикации 27/IV 2024 г.*