

УДК 531/534

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. С. Гулгазли

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,  
 AZ1010 Баку, Азербайджан  
 E-mail: alesker.gulgezli@mail.ru

Сформулировано понятие поверхности нагружения, соответствующей деформациям ползучести, аналогично тому как введено понятие поверхности нагружения, соответствующей деформациям пластичности. Получено уравнение для поверхности нагружения, соответствующей деформациям ползучести. Доказано, что в отсутствие вязкости материала уравнение поверхности нагружения, соответствующей деформациям ползучести, совпадает с уравнением поверхности нагружения, соответствующей деформациям пластичности.

**Ключевые слова:** напряжения, деформации, нагружение, потенциальная энергия, ползучесть, инварианты тензора.

DOI: 10.15372/PMTF20190518

**1. Энергетическое условие прочности при ползучести.** Деформации ползучести возникают в материале конструкций, находящихся под действием больших напряжений и температур [1–9].

В работе [10] построено уравнение начальной поверхности нагружения, в случае когда имеет место повторное нагружение:

$$\bar{J}_1^2 + 2(1 + \nu)\bar{J}_2 = \bar{\sigma}_T^2.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{J}_1 &= \bar{\sigma}_{pq}g_{pq}, & \bar{J}_2 &= -(\bar{J}_1^2 - \bar{\sigma}_{pq}\bar{\sigma}_{pq})/2, & \bar{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_{0ij}, \\ \bar{\sigma}_T^2 &= \left(\frac{k_0 + 1}{2}\right)^2 [(J_1^0)^2 + 2(1 + \nu)J_2^0], & k_0 &= \left(\frac{2\sigma_T^2}{(J_1^0)^2 + 2(1 + \nu)J_2^0} - 1\right)^{1/2}, \\ J_1^0 &= \sigma_{pq}^0 g_{pq}, & J_2^0 &= -[(J_1^0)^2 - \sigma_{pq}^0 \sigma_{pq}^0]/2,\end{aligned}$$

$\sigma_{ij}^0$  — напряжения на предыдущем шаге нагружения;  $\sigma_{ij}$  — текущие напряжения;  $\sigma_{0ij}$  — координаты центра текущей поверхности нагружения;  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора;  $\nu$  — коэффициент Пуассона; по повторяющимся индексам  $p, q$  проводится суммирование от 1 до 3.

При выполнении условия

$$\bar{J}_1^2 + 2(1 + \nu)\bar{J}_2 < \bar{\sigma}_T^2 \quad (1)$$

деформации являются упругими. При высоких температурах металлы имеют определенную вязкость. Пусть после завершения статического нагружения напряженное состояние

в данной точке тела является фиксированным. При этом за счет вязкости материала в нем возникает деформация ползучести. Предположим, что процесс ползучести адиабатический и изотермический. При деформациях ползучести происходит рассеяние накопленной потенциальной энергии. Если компоненты тензора вязкой деформации обозначить через  $\varepsilon_{ij}^v$ , то рассеянная удельная потенциальная энергия будет равна

$$A_v = \int_0^t \bar{\sigma}_{ij} d\varepsilon_{ij}^v,$$

где  $t$  — время ползучести. Для фиксированных значений  $\bar{\sigma}_{ij}$  получаем

$$A_v = \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^v(t). \quad (2)$$

Так как ползучесть является необратимым процессом, можно предположить, что сумма работ упругих деформаций в двух противоположных направлениях в пространстве напряжений не остается постоянной, а уменьшается на величину  $A_v = \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^v(t)$ . С учетом этого предположения условие прочности при ползучести можно записать в виде [8]

$$(\bar{J}_1^2 + 2(1 + \nu)\bar{J}_2)/E = \bar{\sigma}_T^2/E - \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^v(t),$$

или

$$\bar{J}_1^2 + 2(1 + \nu)\bar{J}_2 = \bar{\sigma}_T^2 - E\bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^v(t), \quad (3)$$

где  $E$  — модуль Юнга. Из (3) можно получить условие разрушения в следующем виде (см. [10]):

$$J_1^2 + 2(1 + \nu)J_2 = 2[\sigma_T^2 - E\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^v(t)]. \quad (4)$$

В [11] экспериментально доказано, что при высоких температурах поверхность нагружения вязкоупругих тел с течением времени уменьшается. Поэтому конец пути активного нагружения, который в начальный момент времени находился внутри области, ограниченной поверхностью нагружения, по истечении некоторого промежутка времени оказывается вне этой области, т. е. вне поверхности текучести, вследствие чего возникают необратимые деформации, зависящие от времени.

Вязкие деформации зависят от напряжений следующим образом [2]:

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{1}{E} \int_0^t H(t, \tau) [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu J_1 g_{ij}] d\tau \quad (5)$$

( $H(t, \tau)$  — ядро вязкости;  $\tau, t$  — время). При постоянных напряжениях из (5) следует выражение

$$\varepsilon_{ij}^v = \frac{1 + \nu}{E_1} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E_1} g_{ij} J_1, \quad (6)$$

где

$$\frac{1}{E_1} = \frac{h(t)}{E}, \quad h(t) = \int_0^t H(t, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (3), получаем

$$\bar{J}_1^2 + 2(1 + \nu)\bar{J}_2 = \sigma_T^2 - E \left( \frac{1 + \nu}{E_1} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E_1} \bar{J}_1^2 \right). \quad (8)$$

Поскольку

$$\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{J}_2 + \bar{J}_1^2,$$

из (8) находим

$$\bar{J}_1^2 + 2(1 + \nu)\bar{J}_2 = \bar{\sigma}_T^2/(1 + h(t)). \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что при  $h(t) \equiv 0$  условие прочности при ползучести совпадает с условием прочности при пластичности. Функция  $h(t)$  определяется в экспериментах на одноосное растяжение каждого материала.

**2. Прочность универсальных шпинделей с учетом ползучести.** На большинстве современных прокатных станов передача крутящего момента рабочим валкам осуществляется посредством соединений, называемых универсальными шпинделями. Современные конструкции универсальных шпинделей позволяют передавать значительные крутящие моменты, достигающие  $3000 \text{ Н} \cdot \text{м}$  на один рабочий валок при углах наклона оси шпинделя к оси рабочего вала  $8 \div 10^\circ$ . В настоящее время существуют различные конструкции универсальных шпинделей, но все они основаны на схеме шарнира Гука.

Время с момента включения шпинделя до момента установления стационарного режима обозначим через  $t_0$ , радиус вала — через  $R$ . Предположим, что промежуток времени установления стационарного режима достаточно мал, т. е. угловое ускорение достаточно большое. Тогда можно считать, что касательное ускорение значительно больше центростремительного. В предположении, что до момента установления стационарного режима валок вращается с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon$ , касательное ускорение точек вала определяется по формуле

$$\mathbf{W} = \varepsilon \times \mathbf{r}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки вала ( $0 \leq r \leq R$ ).

В течение промежутка времени  $t_0$  касательные напряжения в поперечных сечениях возникают за счет наличия момента сопротивления  $M_0$  и момента инерционных сил. Будем считать, что в течение времени  $t_0$  преобладают моменты инерционных сил. Вычислим касательные напряжения, возникающие вследствие наличия момента сил инерции.

Для элемента вала длиной  $l$  с центральным углом  $d\varphi$  и радиусом  $r$  масса  $dm$  вычисляется по формуле

$$dm = \rho l r d\varphi dr$$

( $\rho$  — плотность материала вала). Тогда равнодействующая всех инерционных сил равна

$$F^u = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho l \varepsilon r^2 dr d\varphi = \frac{2\pi}{3} \rho l \varepsilon R^3 = \frac{2}{3} m_* \varepsilon R, \quad (11)$$

где  $m_*$  — общая масса вала. Учитывая, что при  $t = 0$  угловая скорость  $\omega = 0$  и  $d\omega/dt = \varepsilon$ , для  $\omega$  имеем  $\omega = \varepsilon t$ .

При  $t = t_0$

$$\omega(t_0) = \varepsilon t_0 = 2\pi n, \quad (12)$$

где  $n$  — число оборотов в единицу времени. Из (12) следует

$$\varepsilon = 2\pi n/t_0. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), для равнодействующей инерционных сил имеем

$$F^u = \frac{4\pi}{3} \frac{m_* R}{t_0} n. \quad (14)$$

Для вала радиусом  $r$  равнодействующая инерционных сил равна

$$F^u = \frac{4\pi^2 l \rho n}{3t_0} r^3. \quad (15)$$

Тогда координата точки приложения равнодействующей силы вычисляется по формуле

$$r_0 = \int_0^R F^u(r) r dr / \int_0^R F^u(r) dr = \frac{4}{5} R. \quad (16)$$

С учетом (16) получаем выражение для крутящего момента

$$M_{кр} = \frac{4\pi^2 l \rho n}{3t_0} R^3 \frac{4}{5} R = \frac{16\pi^2 l \rho n}{15t_0} R^4. \quad (17)$$

Известно, что выражение для касательного напряжения в поперечных сечениях имеет вид

$$\tau_0 = \frac{M_{кр} r}{J_p}, \quad (18)$$

где  $J_p$  — полярный момент инерции общего поперечного сечения лопасти и цилиндра. Из (18) следует формула для максимального значения касательных напряжений

$$\tau_{0m} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (19)$$

где  $W_p = J_p/R$  — полярный момент сопротивления общего поперечного сечения лопасти и шпинделя. Учитывая, что для кругового сечения  $W_p = \pi R^3/2$ , из (19) получаем

$$\tau_{0m} = \frac{2M_{кр}}{\pi R^3}. \quad (20)$$

Подставляя (17) в (20), находим выражение для максимального касательного напряжения

$$\tau_{0m} = \frac{32\pi l \rho n}{15t_0} R. \quad (21)$$

Из (21) следует, что при малых  $t_0$  на валок действуют большие касательные напряжения, вследствие чего выделяется большое количество теплоты. В результате с течением времени возникают необратимые деформации, т. е. деформации ползучести. Для данной задачи

$$J_1 = 0, \quad J_2 = \tau_0^2.$$

Тогда условие (4) принимает вид

$$2(1 + \nu)\tau_0^2 = 2[\sigma_T^2 - E\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^v(t)]. \quad (22)$$

С учетом (5) для удельной работы вязкой деформации имеем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^v &= \int_0^t H(t, \tau) \left( \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} J_1^2 \right) d\tau = \\ &= \int_0^t H(t, \tau) \left( \frac{1 + \nu}{E} (2J_2 + J_1^2) - \frac{3\nu}{E} J_1^2 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = \tau_0^2$ , из (23) следует

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^v = \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^t H(t, \tau) d\tau = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0^2 h(t). \quad (24)$$

Здесь функция  $h(t)$  определяется в эксперименте на одноосное растяжение-сжатие. Подставляя (24) в (22), получаем

$$2(1+\nu)\tau_0^2[1+h(t)] = 2\sigma_T^2,$$

или

$$\tau_0 = \frac{\sigma_T}{\sqrt{(1+\nu)(1+h(t))}}. \quad (25)$$

С учетом того, что масса вала вычисляется по формуле

$$m_B = \pi R^2 l \rho, \quad (26)$$

из (21) находим

$$\tau_{0m} = \frac{32m_B n}{15t_0 R}. \quad (27)$$

Из (25), (27) определяем максимальное число оборотов вала:

$$n \leq \frac{15t_0 R}{32m_B} \frac{\sigma_T}{\sqrt{(1+\nu)(1+h(t))}}. \quad (28)$$

Из (28) следует, что для предотвращения разрушения вала нужно увеличить время до установления стационарного режима. Из (28) также следует, что с увеличением предела текучести увеличивается допустимое число оборотов в единицу времени. Подставляя (26) в (28), получаем

$$n \leq \frac{15t_0}{32\pi R l \rho} \frac{\sigma_T}{\sqrt{(1+\nu)(1+h(t))}}. \quad (29)$$

Согласно (29) допустимое число оборотов в единицу времени можно увеличить также за счет уменьшения радиуса вала и плотности его материала.

**Заключение.** В работе получено энергетическое условие ползучести и выведено уравнение для поверхности нагружения, соответствующей деформациям ползучести. С использованием полученных условий проведены расчеты длительной прочности универсальных шпинделей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Теория ползучести // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 119–154, 167–169.
2. **Бойл Дж.** Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж. Бойл, Дж. Спенс. М.: Мир, 1986.
3. **Влияние** ядерных излучений на материалы. М.: Атомиздат, 1961.
4. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.

6. **Талыблы Л. Х.** К вопросу деформирования и разрушения вязкоупругих тел при наличии температурного поля // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 2. С. 127–139.
7. **Локощенко А. М.** Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2015.
8. **Бормотин К. С.** Численное моделирование задачи формообразования с контактными условиями в режиме пластичности и ползучести // Наукоедение. 2014. Вып. 1. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://publ.naukovedenie.ru>.
9. **Радченко В. П.** Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // ПМТФ. 1991. № 4. С. 172–179.
10. **Гулгазли А. С.** Энергетическое условие пластичности // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 142–148.
11. **Пэжина П.** Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968.

*Поступила в редакцию 14/XI 2018 г.,  
после доработки — 19/III 2019 г.  
Принята к публикации 25/III 2019 г.*

---