$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65M06, 65M12, 65M22; 65Y20

# Численная схема четвертого порядка на основе полушаговых аппроксимаций неполиномиальными сплайнами для одномерных квазилинейных параболических уравнений*

Р.К. Моханти[1], С. Шарма[2]

[1]Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, South Asian University, Akbar Bhawan, Chanakyapuri, New Delhi 110021, India.

[2]Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Delhi, Delhi 110007, India.
E-mails: rmohanty@sau.ac.in (Моханти Р.К.), sachu.iitk@gmail.com (Шарма С.)

**Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 13, 2020.**

**Моханти Р.К., Шарма С.** Численная схема четвертого порядка на основе полушаговых аппроксимаций неполиномиальными сплайнами для одномерных квазилинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 1. — С. 83–97.

В данной статье рассматривается схема четвертого порядка точности на основе аппроксимаций неполиномиальными сплайнами в напряжении для решения квазилинейных параболических уравнений в частных производных. Предлагаемый численный метод требует наличия только двух точек на полушаге и центральной точки на однородной сетке в пространственном направлении. Этот метод получен непосредственно из условия непрерывности производной первого порядка функции неполиномиального сплайна в напряжении. Устойчивость схемы обсуждается с использованием модельного линейного дифференциального уравнения в частных производных. Этот метод может быть использован для решения сингулярных параболических задач в полярных системах. Предлагаемый метод тестируется с использованием обобщенного уравнения Бюргерса–Хаксли, обобщенного уравнения Бюргерса–Фишера и уравнений Бюргерса в полярных координатах.

**DOI:** 10.15372/SJNM20200106

**Ключевые слова:** *квазилинейные параболические уравнения, сплайн в напряжении, обобщенное уравнение Бюргерса–Хаксли, обобщенное уравнение Бюргерса–Фишера, итерационный метод Ньютона.*

**Mohanty R.K., Sharma S.** Fourth-order numerical scheme based on half-step non-polynomial spline approximations for 1D quasi-linear parabolic equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 1. — P. 83–97.

In this article, we discuss a fourth-order accurate scheme based on non-polynomial spline in tension approximations for the solution of quasi-linear parabolic partial differential equations. The proposed numerical method requires only two half-step points and a central point on a uniform mesh in the spatial direction. This method is derived directly from a continuity condition of the first-order derivative of a non-polynomial tension spline function. The stability of the scheme is discussed using a model linear PDE. The method is directly applicable to solving singular parabolic problems in polar systems. The proposed method is tested on the generalized Burgers–Huxley equation, the generalized Burgers–Fisher equation, and Burgers' equations in polar coordinates.

**Keywords:** *quasi-linear parabolic equations, spline in tension, generalized Burgers–Huxley equation, generalized Burgers–Fisher equation, Newton's iterative method.*

*Работа выполнена при поддержке Совета научно-промышленных исследований (CSIR-SRF) (грант № 09/045(1161)/2012-EMR-I).

## 1. Введение

Рассмотрим одномерное квазилинейное параболическое уравнение в частных производных (УЧП) следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где предполагается, что функции $f$, $u_0(x)$, $g_0(t)$ и $g_1(t)$ достаточно гладкие и существуют их требуемые производные высокого порядка. В данной статье мы изучаем квазилинейные параболические УЧП в одномерных модельных уравнениях. Квазилинейными параболическими УЧП описываются множество физических процессов, таких как конвекция, механизм реакций и диффузионный перенос. Обобщенное уравнение Бюргерса–Хаксли — важное параболическое УЧП, объясняющее различные физические явления реального мира. В 1987 году Сатсума с соавторами [24] предложил одномерное обобщенное уравнение Бюргерса–Хаксли (ОУБХ), задаваемое следующим уравнением:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u(u^\delta - 1)(u^\delta - \gamma), \quad t > 0, \tag{4}$$

где $\alpha, \beta \ge 0$, $\gamma \in (0,1)$, $\delta > 0$ и $0 < \varepsilon \le 1$ — параметры. При $\delta = 1$ и различных параметрах $\alpha, \beta$ и $\gamma$ в литературе можно найти различные известные УЧП. При $\varepsilon = 1$ и $\alpha = 0$ уравнение (4) сводится к уравнению Хаксли [29]. Математическая модель распространения нервных импульсов в нервных волокнах объясняется уравнением Хаксли [26]. Оно также описывает теорию движения стенок в жидких кристаллах [30]. При $\varepsilon = 1$ и $\beta = 0$ уравнение (4) становится классическим уравнением Бюргерса, обычно наблюдаемым в нелинейных диссипативных системах [31]. При $\varepsilon = 1$, $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ уравнение (4) сводится к уравнению Фитц–Хью–Нагумо (ФХН), которое представляет собой модель реакции–диффузии, наблюдаемую в генетике и теории микросхем [4]. При $\alpha \ne 0$ и $\beta \ne 0$ уравнение (4) превращается в уравнение Бюргерса–Хаксли (УБХ). УБХ объясняет взаимодействие между эффектами конвекции/адвекции, механизмом реакции и переносом диффузии [24]. Еще одно параболическое УЧП второго порядка, тестируемое в данной статье, — это обобщенное уравнение Бюргерса–Фишера (ОУБФ):

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u(u^\delta - 1), \quad t > 0, \tag{5}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — действительные параметры, а $\delta$ — положительное целое число. ОУБФ — это обобщение известного уравнения, полученного Фишером в 1937 г. [6]. В этом же году Колмогоров с соавторами [10] объяснили динамическое распространение фронта горения при помощи уравнения Фишера. Математическая модель популяции нейтронов в ядерном реакторе также описывается уравнением Фишера. ОУБФ широко применяется в различных областях, таких как газодинамика, механика жидкостей и газов, теория упругости, теплопроводность и физика плазмы. Это уравнение используется во многих случаях при распространении возмущений в возбужденной среде. Другая важная одномерная квазилинейная параболическая задача, рассматриваемая в данном исследовании, — это одномерное уравнение Бюргерса в полярных координатах:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u_{rr}+\frac{p}{r}u_r-\frac{p}{r^2}u\right)=u_t+uu_r+g(r,t),\quad 0<r<1,\ t>0, \tag{6}$$

где $\mathrm{Re}>0$ — число Рейнольдса. При $p=1$ и $p=2$ приведенное выше уравнение описывает уравнение Бюргерса в случае цилиндрической и сферической симметрии соответственно. Оно представляет математическую модель ударных волн, турбулентности и пограничного слоя в механике жидкостей и газов. Оно имеет свойства, подобные свойствам одномерного уравнения Навье–Стокса, ввиду наличия вязкости и члена конвекции.

За последние два десятилетия были получены различные методы для решения ОУБХ и ОУБФ [1, 3, 5, 13–15, 32, 33]. Для получения аналитических решений квазилинейных УЧП необходимо использовать современные математические средства. Нелегко получить точное решение квазилинейного параболического УЧП второго порядка. Поэтому многие исследователи использовали численные методы для получения достоверных численных решений параболических УЧП. Были построены различные конечно-разностные схемы для численного решения нелинейных и квазилинейных параболических УЧП [8, 16–18, 22]. В литературе можно найти полиномиальные и неполиномиальные сплайны, такие как кубические сплайны, сплайны в напряжении, сплайны в сжатии и адаптивные сплайны. Теоретические исследования неполиномиальных сплайнов обсуждаются в статьях [11, 12, 25]. Недавно Моханти с соавторами [19–21] построили различные численные алгоритмы с использованием сплайнов в сжатии для численного решения параболических и бигармонических уравнений. Совсем недавно, используя условие согласованности второго порядка, Моханти с соавторами [16, 17] и Талвар с соавторами [27, 28] сконструировали методы полиномиальных и неполиномиальных сплайнов для одномерных квазилинейных параболических УЧП, но эти методы не могут быть прямо использованы для решения сингулярных параболических УЧП. В данной статье мы разрабатываем новую двухуровневую неявную схему, получаемую из условия согласованности четвертого порядка на основе полушаговых аппроксимаций сплайнами в напряжении. При численном решении сингулярных параболических УЧП наблюдались сильные флуктуации в окрестности сингулярности. Для получения решений без осцилляций нам необходим специальный метод, тогда как в методе сплайнов в напряжении на полушаге для сингулярных параболических УЧП прямо получаются решения без осцилляций.

Остальная часть статьи построена следующим образом: в пункте 2 представлены аппроксимации сплайнами в напряжении с использованием трех точек сетки. В этом же пункте мы разрабатываем условие согласованности четвертого порядка, из которого в п. 3 мы получаем схему для квазилинейных параболических УЧП. В п. 4 обсуждается устойчивость метода, которая доказывается путем рассмотрения модельной линейной задачи. В п. 5 представлены максимальные абсолютные ошибки для ОУБХ, ОУБФ и сингулярных параболических УЧП. Заключительные замечания даны в п. 6.

## 2. Аппроксимации сплайнами в напряжении и их свойства

Для приближенного решения УЧП (1) дискретизируем пространственный интервал $[0,1]$ как $0=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=1$, где $N$ — положительное целое число. Точки сетки интервала определяются как $x_{l+1}=x_l+h$, $l=0(1)N$, где $h$ — шаг в направлении $x$, временные шаги задаются путем $t_j=jk$, $j=0(1)J$, где $k=t_{j+1}-t_j>0$, $j=0,1,2,\ldots,$ — шаг в направлении $t$. Точки на полушаге определяются как $x_{l-1/2}=x_l-\dfrac{h}{2}$ и $x_{l+1/2}=x_l+\dfrac{h}{2}$, $l=1(1)N$. Пусть $U_l^j=u(x_l,t_j)$ — значение точного решения $u(x,t)$, которое аппроксимируется как $U_l^j$.

Неполиномиальная сплайн-функция, которая интерполирует $U_l^j$ на $j$-м уровне, задается следующим образом:

$$Q_j(x) = a_l^j + b_l^j(x - x_l) + c_l^j \sinh\big[\tau(x - x_l)\big] + d_l^j \cosh\big[\tau(x - x_l)\big], \quad x_{l-1} \le x \le x_l, \quad l = 1(1)N+1, \quad j > 0, \tag{7}$$

где $\tau$ — произвольный параметр, что удовлетворяет следующим условиям на $j$-м временном уровне:

(i) $Q_j(x) \in C^2[0,1]$;

(ii) $Q_j(x_l) = U_l^j, \ Q_j(x_{l-1}) = U_{l-1}^j$;

(iii) $Q_j''(x_l) = M_l^j, \ Q_j''(x_{l-1/2}) = M_{l-1/2}^j$.

Теперь нам необходимо определить значения $a_l^j$, $b_l^j$, $c_l^j$ и $d_l^j$ для однозначного определения неполиномиальной сплайн-функции $Q_j(x)$ в интервале $[x_{l-1}, x_l]$.

Дифференцируя уравнения (7) дважды по $x$, мы получим

$$Q_j'(x) = b_l^j + \tau c_l^j \cosh\big[\tau(x - x_l)\big] + \tau d_l^j \sinh\big[\tau(x - x_l)\big], \tag{8}$$

$$Q_j''(x) = \tau^2\Big[c_l^j \sinh\big[\tau(x - x_l)\big] + d_l^j \cosh\big[\tau(x - x_l)\big]\Big]. \tag{9}$$

Используя условия (iii) и (7)–(9), получим коэффициенты:

$$a_l^j = U_l^j - \frac{M_l^j}{\tau^2}, \qquad b_l^j = \frac{U_l^j - U_{l-1}^j}{h} - \frac{M_l^j}{\tau\mu} + \frac{M_{l-1/2}^j}{\tau\mu}\cosh\mu,$$

$$c_l^j = \frac{M_l^j \cosh\mu - M_{l-1/2}^j}{\tau^2 \sinh\mu}, \qquad d_l^j = \frac{M_l^j}{\tau^2},$$

где $\mu = \dfrac{\tau h}{2}$. Подставив коэффициенты $a_l^j$, $b_l^j$, $c_l^j$, $d_l^j$ в (7), мы получим сплайн-функцию

$$Q_j(x) = U_l^j - \frac{M_l^j}{\tau^2} + \left(\frac{U_l^j - U_{l-1}^j}{h} - \frac{M_l^j}{\tau\mu} + \frac{M_{l-1/2}^j}{\tau\mu}\cosh\mu\right)(x - x_l) + \left(\frac{M_l^j \cosh\mu - M_{l-1/2}^j}{\tau^2 \sinh\mu}\right)\sinh\big[\tau\,(x - x_l)\,\big] + \frac{M_l^j}{\tau^2}\cosh\big[\tau\,(x - x_l)\,\big], \quad x \in [x_{l-1}, x_l]. \tag{10}$$

Аналогичным образом получим

$$Q_j(x) = U_l^j - \frac{M_l^j}{\tau^2} + \left(\frac{U_{l+1}^j - U_l^j}{h} + \frac{M_l^j}{\tau\mu} - \frac{M_{l+1/2}^j}{\tau\mu}\cosh\mu\right)(x - x_l) + \left(\frac{M_{l+1/2}^j - M_l^j \cosh\mu}{\tau^2 \sinh\mu}\right)\sinh\big[\tau\,(x - x_l)\,\big] + \frac{M_l^j}{\tau^2}\cosh\big[\tau\,(x - x_l)\,\big], \quad x \in [x_l, x_{l+1}]. \tag{11}$$

Дифференцируя уравнения (10) и (11), имеем

$$Q_j'(x) = \frac{U_l^j - U_{l-1}^j}{h} - \frac{M_l^j}{\tau\mu} + \frac{M_{l-1/2}^j}{\tau\mu}\cosh\mu + \left(\frac{M_l^j\cosh\mu - M_{l-1/2}^j}{\tau\sinh\mu}\right)\cosh\left[\tau\left(x - x_l\right)\right] + \frac{M_l^j}{\tau}\sinh\left[\tau\left(x - x_l\right)\right], \quad x \in [x_{l-1}, x_l], \tag{12}$$

и

$$Q_j'(x) = \frac{U_{l+1}^j - U_l^j}{h} + \frac{M_l^j}{\tau\mu} - \frac{M_{l+1/2}^j}{\tau\mu}\cosh\mu + \left(\frac{M_{l+1/2}^j - M_l^j\cosh\mu}{\tau\sinh\mu}\right)\cosh\left[\tau\left(x - x_l\right)\right] + \frac{M_l^j}{\tau}\sinh\left[\tau\left(x - x_l\right)\right], \quad x \in [x_l, x_{l+1}]. \tag{13}$$

Используя свойство непрерывности первой производной, т. е. $Q_j'(x_l-) = Q_j'(x_l+)$, мы получим условие согласованности

$$\begin{aligned}\frac{U_{l+1}^j - 2U_l^j + U_{l-1}^j}{h^2} &= \frac{\left(M_{l+1/2}^j\cosh\mu - M_l^j\right)}{2\mu^2} + \frac{\left(M_{l-1/2}^j\cosh\mu - M_l^j\right)}{2\mu^2} + \\ &\quad \frac{\left(M_l^j\cosh\mu - M_{l+1/2}^j\right)}{2\mu\sinh\mu} + \frac{\left(M_l^j\cosh\mu - M_{l-1/2}^j\right)}{2\mu\sinh\mu} \\ &= \alpha M_{l+1/2}^j + 2\beta M_l^j + \alpha M_{l-1/2}^j + O\left(h^4\right), \quad l = 1(1)N,\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\mu^2}\left[\cosh\mu - \frac{\mu}{\sinh\mu}\right] = \frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{90} + O\left(\mu^4\right),$$
$$\beta = \frac{1}{2\mu^2}\left(\mu\coth\mu - 1\right) = \frac{1}{6} - \frac{\mu^2}{90} + O\left(\mu^4\right).$$

Приравнивая коэффициенты $M_l^j$ в (14), получим условие

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Используя значения $\alpha$ и $\beta$ в уравнении (14), мы получим условие согласованности следующего вида:

$$U_{l+1}^j - 2U_l^j + U_{l-1}^j = \frac{h^2}{3}\left[M_{l+1/2}^j + M_l^j + M_{l-1/2}^j\right] + O\left(h^6\right). \tag{16}$$

Теперь, подставив значения $\alpha$ и $\beta$ в (15) и пренебрегая членами $O(\mu^4)$, имеем

$$\tanh(\mu/2) = \mu/2. \tag{17}$$

Приведенное выше уравнение имеет бесконечное число корней, причем наименьший положительный ненулевой корень задается как $\mu = 0.001$. Если $\tau \to 0$, то $(\alpha, \beta) \to \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ и соотношение (14) сводится к соотношению для кубических сплайнов. Кроме того, из (12) и (13) мы получим производную от неполиномиальной сплайн-функции в точках $x_{l\pm1/2}$:

$$Q'_j(x_{l-1/2}) = \frac{U_l^j - U_{l-1}^j}{h} - \frac{h}{4}\left(2\beta M_l^j - \alpha M_{l-1/2}^j\right), \tag{18}$$

$$Q'_j(x_{l+1/2}) = \frac{U_{l+1}^j - U_l^j}{h} + \frac{h}{4}\left(2\beta M_l^j - \alpha M_{l+1/2}^j\right). \tag{19}$$

Уравнения (18) и (19) отражают два важных свойства неполиномиальной сплайн-функции.

## 3. Получение метода сплайнов в напряжении

Чтобы сформулировать этот метод, мы просто будем следовать подходам, представленным Моханти [18].

В точке сетки $(x_l, t_j)$ обозначим

$$U_{pq} = \frac{\partial^{p+q}U}{\partial x^p \partial t^q}, \quad \alpha_l^j = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_l^j, \quad \beta_l^j = \left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)_l^j, \quad \gamma_l^j = \left(\frac{\partial f}{\partial u_t}\right)_l^j, \quad \delta_l^j = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_l^j. \tag{20}$$

Дифференцируя частным образом УЧП (1) по $t$, получим

$$-\gamma_l^j U_{02} = \delta_l^j + U_{01}\alpha_l^j + U_{11}\beta_l^j - U_{21}. \tag{21}$$

В точке сетки $(x_l, t_j)$ мы можем записать УЧП (1) в виде

$$M_l^j = f\left(x_l, t_j, U_l^j, U_{xl}^j, U_{tl}^j\right). \tag{22}$$

Аналогичным образом

$$M_{l\pm1/2}^j = f\left(x_{l\pm1/2}, t_j, U_{l\pm1/2}^j, U_{xl\pm1/2}^j, U_{tl\pm1/2}^j\right). \tag{23}$$

Поскольку $M_l^j$ и $M_{l\pm1/2}^j$ содержат первые производные, из условия совместимости (16) метод неполиномиальных сплайнов в напряжении для параболического уравнения (1) можно записать в виде

$$\bar{U}_{l+1}^j - 2\bar{U}_l^j + \bar{U}_{l-1}^j = \frac{h^2}{3}\left(\hat{M}_{l+1/2}^j + \hat{M}_l^j + \hat{M}_{l-1/2}^j\right) + \hat{T}_l^j, \tag{24}$$

где $\hat{T}_l^j \equiv O\left(k^2h^2 + kh^4 + h^6\right)$.

Для развития приведенного выше метода (24) мы используем следующие аппроксимации:

$$\bar{t}_j = t_j + \theta k, \tag{25}$$

$$\bar{U}_l^j = \theta U_l^{j+1} + (1-\theta)\,U_l^j = U_l^j + \theta k U_{01} + O\left(k^2\right), \tag{26}$$

$$\bar{U}_{l\pm1}^j = \theta U_{l\pm1}^{j+1} + (1-\theta)\,U_{l\pm1}^j = U_{l\pm1}^j + \theta k\left(U_{01} \pm hU_{11}\right) + O\left(k^2\right), \tag{27}$$

$$\bar{U}_{l\pm1/2}^j = \frac{1}{2}\left(\bar{U}_{l\pm1}^j + \bar{U}_l^j\right) = U_{l\pm1/2}^j + \theta k U_{01} + \frac{h^2}{8}U_{20} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right), \tag{28}$$

$$\bar{U}_{tl}^j = \frac{1}{k}\left(U_l^{j+1} - U_l^j\right) = U_{01} + \frac{k}{2}U_{02} + O\left(k^2\right), \tag{29}$$

$$\bar{U}^j_{tl\pm1} = \frac{1}{k}\left(U^{j+1}_{l\pm1} - U^j_{l\pm1}\right) = U^j_{tl\pm1} + \frac{k}{2}U_{02} + O\left(kh + k^2\right), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}^j_{tl\pm1/2} &= \frac{1}{2k}\left(U^{j+1}_{l\pm1} + U^{j+1}_{l} - U^j_{l\pm1} - U^j_l\right)\\ &= U^j_{tl\pm1/2} + \frac{k}{2}U_{02} + \frac{h^2}{8}U_{21} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right),\end{aligned} \tag{31}$$

$$\bar{U}^j_{xl} = \frac{\bar{U}^j_{l+1} - \bar{U}^j_{l-1}}{2h} = U_{10} + \frac{h^2}{6}U_{30} + \theta k U_{11} + O\left(k^2 + h^4\right), \tag{32}$$

$$\bar{U}^j_{xl+1/2} = \frac{\bar{U}^j_{l+1} - \bar{U}^j_{l}}{h} = U^j_{xl+1/2} + \frac{h^4}{24}U_{30} + \theta k U_{11} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right), \tag{33}$$

$$\bar{U}^j_{xl-1/2} = \frac{\bar{U}^j_{l} - \bar{U}^j_{l-1}}{h} = U^j_{xl-1/2} + \frac{h^2}{24}U_{30} + \theta k U_{11} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right), \tag{34}$$

$$\bar{U}^j_{xxl} = \frac{\bar{U}^j_{l+1} - 2\bar{U}^j_{l} + \bar{U}^j_{l-1}}{h^2} = U^j_{xxl} + \theta k U_{21} + O(k^2 + h^2), \tag{35}$$

где $\theta$ — параметр, который необходимо определить. С помощью приведенных выше аппроксимаций мы можем упростить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\bar{M}^j_l &= f\left(x_l, \bar{t}_j, \bar{U}^j_l, \bar{U}^j_{xl}, \bar{U}^j_{tl}\right)\\ &= M^j_l + \theta k\left(\delta^j_l + U_{01}\alpha^j_l + U_{11}\beta^j_l\right) + \frac{k}{2}U_{02}\gamma^j_l + \frac{h^2}{6}U_{30}\beta^j_l + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right),\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}^j_{l\pm1/2} &= f\left(x_{l\pm1/2}, \bar{t}_j, \bar{U}^j_{l\pm1/2}, \bar{U}^j_{xl\pm1/2}, \bar{U}^j_{tl\pm1/2}\right)\\ &= M^j_{l\pm1/2} + \theta k\left(\delta^j_l + U_{01}\alpha^j_l + U_{11}\beta^j_l\right) + \frac{k}{2}U_{02}\gamma^j_l +\\ &\quad \frac{h^2}{24}\left(3U_{20}\alpha^j_l + U_{30}\beta^j_l + 3U_{21}\gamma^j_l\right) + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right).\end{aligned} \tag{37}$$

Исходя из свойств неполиномиальной сплайн-функции в напряжении, задаваемой (18) и (19), мы определим аппроксимации

$$\hat{U}^j_{xl+1/2} = \frac{\bar{U}^j_{l+1} - \bar{U}^j_{l}}{h} + \frac{h}{4}\left(2\beta M^j_l - \alpha M^j_{l+1/2}\right), \tag{38}$$

$$\hat{U}^j_{xl-1/2} = \frac{\bar{U}^j_{l} - \bar{U}^j_{l-1}}{h} - \frac{h}{4}\left(2\beta M^j_l - \alpha M^j_{l-1/2}\right). \tag{39}$$

С помощью аппроксимаций $\bar{U}^j_l$, $\bar{U}^j_{l\pm1}$, $\bar{M}^j_l$, $\bar{M}^j_{l\pm1/2}$ и, упростив (38), (39), получим

$$\hat{U}^j_{xl+1/2} = U^j_{xl+1/2} + \theta k U_{11} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right), \tag{40}$$

$$\hat{U}^j_{xl-1/2} = U^j_{xl-1/2} + \theta k U_{11} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right). \tag{41}$$

Теперь необходимо иметь $O(k^2+kh^2+h^4)$-аппроксимации для $U^j_l$, $U^j_{xl}$ и $O(k^2+h^4)$-аппроксимацию для $\bar{U}^j_{tl}$. Пусть

$$\hat{U}_l^j = \bar{U}_l^j + ah^2\bar{U}_{xxl}^j, \tag{42}$$

$$\hat{U}_{xl}^j = \bar{U}_{xl}^j + bh\left(\bar{M}_{l+1/2}^j - \bar{M}_{l-1/2}^j\right), \tag{43}$$

$$\hat{U}_{tl}^j = \bar{U}_{tl}^j + c\left(\bar{U}_{tl+1}^j - 2\bar{U}_{tl}^j + \bar{U}_{tl-1}^j\right), \tag{44}$$

где $a$, $b$ и $c$ — параметры, которые необходимо определить. С помощью аппроксимации $\bar{U}_{xl}^j$, $\bar{M}_{l\pm1/2}^j$ и из (43) мы получим

$$\hat{U}_{xl}^j = U_{xl}^j + \theta k U_{11} + \frac{h^2}{6}(1+6b)\,U_{30} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right). \tag{45}$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $h^2$ в приведенном выше уравнении, получим $b = -\frac{1}{6}$, и уравнение сводится к

$$\hat{U}_{xl}^j = U_{xl}^j + \theta k U_{11} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right). \tag{46}$$

Аналогичным образом, упростив (42) и (44), получим

$$\hat{U}_l^j = U_l^j + \theta k U_{01} + ah^2U_{20} + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right), \tag{47}$$

$$\hat{U}_{tl}^j = U_{tl}^j + \frac{k}{2}U_{02} + ch^2U_{21} + O\left(k^2 + h^4\right). \tag{48}$$

Теперь определим

$$\hat{M}_l^j = f\left(x_l, \bar{t}_j, \hat{U}_l^j, \hat{U}_{xl}^j, \hat{U}_{tl}^j\right), \tag{49}$$

$$\hat{M}_{l\pm1/2}^j = f\left(x_{l\pm1/2}, \bar{t}_j, \bar{U}_{l\pm1/2}^j, \hat{U}_{xl\pm1/2}^j, \bar{U}_{tl\pm1/2}^j\right). \tag{50}$$

С помощью аппроксимаций $\bar{t}_j$, $\bar{U}_{l\pm1/2}^j$, $\bar{U}_{tl\pm1/2}^j$, используя уравнения (40), (41) и (45), мы упростим (49), (50):

$$\hat{M}_l^j = M_l^j + \theta k\left(\delta_l^j + U_{01}\alpha_l^j + U_{11}\beta_l^j\right) + \frac{k}{2}U_{02}\gamma_l^j + \frac{h^2}{2}\left(2aU_{20}\alpha_l^j + 2cU_{21}\gamma_l^j\right) + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right), \tag{51}$$

$$\hat{M}_{l\pm1/2}^j = M_{l\pm1/2}^j + \theta k\left(\delta_l^j + U_{01}\alpha_l^j + U_{11}\beta_l^j\right) + \frac{k}{2}U_{02}\gamma_l^j + \frac{h^2}{8}\left(U_{20}\alpha_l^j + U_{21}\gamma_l^j\right) + O\left(k^2 + kh^2 + h^4\right). \tag{52}$$

Используя аппроксимацию $\bar{U}_l^j$, $\bar{U}_{l\pm1}^j$, $\hat{M}_l^j$, $\hat{M}_{l\pm1/2}^j$, из (24) получим

$$U_{l+1}^j - 2U_l^j + U_{l-1}^j = \frac{h^2}{3}\Big[M_{l+1/2}^j + M_l^j + M_{l-1/2}^j + 3\theta k\big(\delta_l^j + U_{01}\alpha_l^j + U_{11}\beta_l^j - U_{21}\big) + \frac{3k}{2}U_{02}\gamma_l^j + \frac{h^2}{4}(1+4a)U_{20}\alpha_l^j + \frac{h^2}{4}(1+4c)U_{21}\gamma_l^j\Big] + \hat{T}_l^j. \tag{53}$$

Теперь с помощью условия согласованности (16), соотношения (21) и используя уравнения (47), (48) и (53), мы получим локальную ошибку усечения

$$\hat{T}_l^j = -\frac{h^2}{3}\left[3\left(\frac{1}{2}-\theta\right)kU_{02}\gamma_l^j + \frac{h^2}{8}(1+4a)U_{21}\alpha_l^j + \frac{h^2}{4}(1+4c)U_{30}\gamma_l^j\right] + O\left(k^2h^2+kh^4+h^6\right). \qquad (54)$$

Чтобы предлагаемый метод сплайна в напряжении четвертого порядка (24) имел точность $O\left(k^2+kh^2+h^4\right)$, коэффициенты при $kh^2$ и $h^4$ в (54) должны быть нулевыми.

Таким образом, мы имеем $\theta = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$ и локальная ошибка усечения сводится к $\hat{T}_l^j \equiv O\left(k^2h^2+kh^4+h^6\right)$.

## 4. Анализ устойчивости

Для устойчивости рассмотрим одномерное линейное параболическое уравнение с сингулярным коэффициентом

$$\nu\left(u_{rr}+\frac{p}{r}u_r\right) = u_t + \phi(r,t), \quad 0<r<1,\ t>0, \qquad (55)$$

значения $u$ которого заданы при $t=0$, $r=0$ и $r=1$, где $\nu>0$. Предположим, что функция $\phi(r,t)$ достаточно гладкая в области решения. Применив метод (24) к дифференциальному уравнению (55), мы получим следующую схему для решения приведенного выше дифференциального уравнения:

$$\bar{U}_{l+1}^j - 2\bar{U}_l^j + \bar{U}_{l-1}^j = \frac{h^2}{3}\left[\bar{U}_{tl+1/2}^j - \frac{\nu p}{r_{l+1/2}}\hat{U}_{rl+1/2}^j + \bar{\phi}_{l+1/2}^j + \bar{U}_{tl-1/2}^j - \frac{\nu p}{r_{l-1/2}}\hat{U}_{rl-1/2}^j + \bar{\phi}_{l-1/2}^j + \hat{U}_{tl}^j - \frac{\nu p}{r_l}\hat{U}_{rl}^j + \bar{\phi}_l^j\right] + \hat{T}_l^j. \qquad (56)$$

Аппроксимации $\bar{U}_l^j$, $\bar{U}_{l\pm1}^j$, $\bar{U}_{rl}^j$, $\bar{U}_{tl}^j$, $\bar{U}_{rl\pm1/2}^j$, $\bar{U}_{tl\pm1/2}^j$, $\hat{U}_{rl}^j$, $\hat{U}_{rl\pm1/2}^j$ и $\hat{U}_{tl}^j$ определены в п. 3, $\bar{\phi}_l^j = \phi\left(r_l, t_j+\frac{k}{2}\right)$ и т. д. Схема (56) имеет второй порядок по времени и четвертый порядок по пространству для решения сингулярного уравнения (55) и не имеет членов $1/(r_{l\pm1})$. Таким образом, ее очень легко реализовать в области решения без какой-либо модификации. Нам не нужны фиктивные точки для решения этой сингулярной задачи.

Для обсуждения устойчивости нам нужны следующие аппроксимации:

$$\frac{1}{r_{l\pm1/2}} = \frac{1}{r_l} \mp \frac{h}{2r_l^2} + \frac{h^2}{4r_l^3} \mp O(h^3), \qquad (57)$$

$$\bar{\phi}_{l\pm1/2}^j = \bar{\phi}_l^j \pm \frac{h}{2}\bar{\phi}_{rl}^j + \frac{h^2}{8}\bar{\phi}_{rrl}^j \pm O(h^3). \qquad (58)$$

С помощью аппроксимаций (57), (58), пренебрегая членами высокого порядка, из (56) получим

$$\nu\delta_r^2\bar{U}_l^j = \frac{h^2}{12}\left[\left(12+\delta_r^2\right)\bar{U}_{tl}^j + \frac{hp}{2r_l}\left(2\mu_r\delta_r\right)\bar{U}_{tl}^j\right] + \frac{h^2}{12}\left[\frac{\nu p(2-p)}{r_l^2}\right]\delta_r^2\bar{U}_l^j + \frac{h}{24}\left[\frac{-12\nu p}{r_l} + \frac{\nu p(p-2)h^2}{r_l^3}\right]\left(2\mu_r\delta_r\right)\bar{U}_l^j + \frac{h^2}{12}\left[12\bar{\phi}_l^j + h^2\left(\bar{\phi}_{rrl}^j + \frac{p\bar{\phi}_{rl}^j}{r_l}\right)\right] + O(k^2h^2+kh^4+h^6), \qquad (59)$$

где $\delta_r U_l^j = \left(U_{l+1/2}^j - U_{l-1/2}^j\right)$ и $\mu_r U_l^j = \frac{1}{2}\left(U_{l+1/2}^j + U_{l-1/2}^j\right)$. Умножая на $\lambda = (k/h^2)$ в (59), получим

$$\left[1 + \frac{1}{12}\left(1 - 6\lambda\nu + \lambda P_1\right)\delta_r^2 - \frac{1}{12}\left(Q_2 - \lambda P_2\right)\left(2\mu_r\delta_r\right)\right] U_l^{j+1}$$
$$= \left[1 + \frac{1}{12}\left(1 + 6\lambda\nu - \lambda P_1\right)\delta_r^2 - \frac{1}{12}\left(Q_2 + \lambda P_2\right)\left(2\mu_r\delta_r\right)\right] U_l^j + FF + O(k^3 + k^2h^2 + kh^4), \qquad (60)$$

где

$$P_1 = \frac{h^2}{2}\left[\frac{\nu p(2-p)}{r_l^2}\right], \qquad P_2 = \frac{h}{4}\left[\frac{-12\nu p}{r_l} + \frac{\nu p(p-2)h^2}{r_l^3}\right],$$
$$Q_2 = \frac{-ph}{2r_l}, \qquad FF = \frac{-k}{12}\left[12\bar{\phi}_l^j + h^2\left(\bar{\phi}_{rrl}^j + \frac{p\bar{\phi}_{rl}^j}{r_l}\right)\right].$$

Пренебрегая локальной ошибкой усечения в (60), получим линейную схему

$$\left[1 + \frac{1}{12}\left(1 - 6\lambda\nu + \lambda P_1\right)\delta_r^2 - \frac{1}{12}\left(Q_2 - \lambda P_2\right)\left(2\mu_r\delta_r\right)\right] u_l^{j+1}$$
$$= \left[1 + \frac{1}{12}\left(1 + 6\lambda\nu - \lambda P_1\right)\delta_r^2 - \frac{1}{12}\left(Q_2 + \lambda P_2\right)\left(2\mu_r\delta_r\right)\right] u_l^j + FF. \qquad (61)$$

Для исследования устойчивости схемы (61) мы используем анализ устойчивости по Нейману. Пусть $\varepsilon_l^j = U_l^j - u_l^j$ — ошибка в точке сетки $(r_l, t_j)$. Вычитая (61) из (60), получим уравнение для ошибки

$$\left[1 + \frac{1}{12}\left(1 - 6\lambda\nu + \lambda P_1\right)\delta_r^2 - \frac{1}{12}\left(Q_2 - \lambda P_2\right)\left(2\mu_r\delta_r\right)\right] \varepsilon_l^{j+1}$$
$$= \left[1 + \frac{1}{12}\left(1 + 6\lambda\nu - \lambda P_1\right)\delta_r^2 - \frac{1}{12}\left(Q_2 + \lambda P_2\right)\left(2\mu_r\delta_r\right)\right] \varepsilon_l^j + O(k^3 + k^2h^2 + kh^4). \qquad (62)$$

Предположим, что ошибка имеет вид $\varepsilon_l^j = \xi^j e^{i\eta l}$, где $\xi$ — в общем случае комплексное число, а $\eta$ — произвольное вещественное число. Подставив значение $\varepsilon_l^j$ в уравнение ошибки (62), мы получим коэффициент усиления следующего вида:

$$\xi = \frac{1 - \frac{1}{3}(1 + 6\lambda\nu - \lambda P_1)\sin^2\frac{\eta}{2} - \frac{i}{6}(Q_2 + \lambda P_2)\sin\eta}{1 - \frac{1}{3}(1 - 6\lambda\nu + \lambda P_1)\sin^2\frac{\eta}{2} - \frac{i}{6}(Q_2 - \lambda P_2)\sin\eta} = \frac{1 + (X + iY)}{1 - (X + iY)}, \qquad (63)$$

где

$$X + iY = \frac{\lambda\left[\frac{1}{3}\left(P_1 - 6\nu\right)\sin^2\frac{\eta}{2} - \frac{i}{6}P_2\sin\eta\right]}{1 - \frac{1}{3}\sin^2\frac{\eta}{2} - \frac{i}{6}Q_2\sin\eta}. \qquad (64)$$

Для устойчивости необходимо, чтобы $|\xi|^2 \le 1$. Наложение этого условия на (64) дает $X \le 0$, которое удовлетворяет всем значениям $p = 1, 2$. Следовательно, схема (60) является безусловно устойчивой.

## 5. Численные примеры

В данном пункте мы решим несколько стандартных задач с использованием предлагаемого метода на основе сплайна в напряжении и сравним результаты с уже имеющимися. Все примеры решаются с использованием метода Ньютона–Рафсона [7, 9]. При использовании метода Ньютона–Рафсона возьмем **0** в качестве исходного предположения. Все вычисления выполняются с использованием программного обеспечения MATLAB.

**Пример 1.** Решим ОУБХ, задаваемое уравнением (4). Точное решение (4), данное в [3], имеет вид

$$u(x,t) = \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\tanh(a_1(x - a_2 t))\right]^{1/\delta}, \quad t \geq 0, \tag{65}$$

где

$$\varepsilon = 1, \qquad a_1 = \frac{-\alpha\delta + \delta\sqrt{\alpha^2 + 4\beta(1+\delta)}}{4(1+\delta)}\,\gamma,$$
$$a_2 = \frac{\alpha\gamma}{(1+\delta)} + \frac{(1+\delta-\gamma)\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(1+\delta)}\right)}{2(1+\delta)}.$$

Для различных значений параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ мы вычислим максимальные абсолютные ошибки, определяемые следующим образом:

$$e_j^l = \max\left|u(x_l,t_j) - U(x_l,t_j)\right|,$$

где $u(x_l,t_j)$ — численное решение и $U(x_l,t_j)$ — точное решение в точке сетки $(x_l,t_j)$.

Используя схему (24), обсудим следующие случаи для различных значений параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ в уравнении (4).

**Случай 1.1.** Возьмем $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.001$. Для временного шага $k = 1/10000$ и $\delta = 1, 2, 4$ и 8 максимальные абсолютные ошибки (МАО) представлены в таблице 1 для значений $x = 0.1$, 0.5, 0.9 при $t = 0.01$, 0.5, 1.0.

**Таблица 1.** Пример 1. Случай 1.1. Максимальные абсолютные ошибки

| $x$ | $t$ | $\delta=1$ | $\delta=2$ | $\delta=4$ | $\delta=8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.01 | $1.4214\cdot10^{-16}$ | $1.6827\cdot10^{-15}$ | $2.1927\cdot10^{-14}$ | $2.1649\cdot10^{-14}$ |
| | 0.5 | $4.3910\cdot10^{-17}$ | $4.4756\cdot10^{-16}$ | $4.5797\cdot10^{-15}$ | $5.2736\cdot10^{-15}$ |
| | 1.0 | $4.7705\cdot10^{-18}$ | $2.0470\cdot10^{-16}$ | $2.7478\cdot10^{-15}$ | $3.3140\cdot10^{-14}$ |
| 0.5 | 0.01 | $2.3852\cdot10^{-18}$ | $5.1348\cdot10^{-16}$ | $3.1364\cdot10^{-15}$ | $1.3878\cdot10^{-15}$ |
| | 0.5 | $5.7246\cdot10^{-17}$ | $3.7817\cdot10^{-16}$ | $2.8866\cdot10^{-15}$ | $2.7756\cdot10^{-15}$ |
| | 1.0 | $8.7170\cdot10^{-17}$ | $8.4655\cdot10^{-16}$ | $9.9504\cdot10^{-14}$ | $7.7552\cdot10^{-14}$ |
| 0.9 | 0.01 | $6.5052\cdot10^{-19}$ | $1.3878\cdot10^{-17}$ | $2.7756\cdot10^{-17}$ | $5.5511\cdot10^{-17}$ |
| | 0.5 | $2.1648\cdot10^{-19}$ | $3.4694\cdot10^{-18}$ | $1.1102\cdot10^{-16}$ | $1.1102\cdot10^{-16}$ |
| | 1.0 | $2.2768\cdot10^{-18}$ | $1.7347\cdot10^{-17}$ | $1.8957\cdot10^{-14}$ | $9.4369\cdot10^{-14}$ |

**Случай 1.2.** Возьмем $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.5$. В этом случае результаты вычисляются для фиксированного временного уровня $t = 1.0$ и $\delta = 2$. Максимальные абсолютные ошибки и порядок сходимости представлены в табл. 2.

**Таблица 2.** Пример 1. Случай 1.2. Максимальные абсолютные ошибки и порядок сходимости

| $N+1$ | Максимальные абсолютные ошибки $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0.5$, $\delta=2$ | Порядок сходимости |
|---|---|---|
| 8 | $7.2810\cdot10^{-8}$ | |
| 16 | $4.2470\cdot10^{-9}$ | 4.10 |
| 32 | $2.4910\cdot10^{-10}$ | 4.09 |
| 64 | $1.5037\cdot10^{-11}$ | 4.05 |

**Случай 1.3.** Возьмем $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Точное решение [8] задается как

$$u(x,t) = \frac{2\varepsilon\pi\exp(-\varepsilon\pi^2 t)\sin(\pi x)}{2+\exp(-\varepsilon\pi^2 t)\cos(\pi x)}. \tag{66}$$

В этом случае результаты вычисляются для фиксированного временного уровня $t = 1.0$ и $\delta = 1$. Максимальные абсолютные ошибки для $\mathrm{Re} = \varepsilon^{-1} = 10^2$, $10^4$, $10^6$ представлены в табл. 3.

**Таблица 3.** Пример 1. Случай 1.3. Максимальные абсолютные ошибки

| $N+1$ | Предлагаемый метод (24) | | | Метод, представленный в [1] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mathrm{Re}=10^2$ | $\mathrm{Re}=10^4$ | $\mathrm{Re}=10^6$ | $\mathrm{Re}=10^2$ | $\mathrm{Re}=10^4$ | $\mathrm{Re}=10^6$ |
| 8 | $1.7214\cdot10^{-5}$ | $4.0728\cdot10^{-9}$ | $4.1140\cdot10^{-13}$ | $4.1061\cdot10^{-4}$ | $8.3710\cdot10^{-8}$ | $8.4373\cdot10^{-12}$ |
| 16 | $1.0144\cdot10^{-6}$ | $3.0431\cdot10^{-10}$ | $2.5322\cdot10^{-14}$ | $1.1067\cdot10^{-4}$ | $2.2489\cdot10^{-8}$ | $2.2700\cdot10^{-12}$ |
| 32 | $6.2386\cdot10^{-8}$ | $1.5268\cdot10^{-11}$ | $3.1521\cdot10^{-15}$ | $2.7680\cdot10^{-5}$ | $5.7437\cdot10^{-9}$ | $5.7920\cdot10^{-13}$ |
| 64 | $3.8850\cdot10^{-9}$ | $9.8576\cdot10^{-12}$ | $9.5669\cdot10^{-16}$ | $6.9473\cdot10^{-6}$ | $1.4564\cdot10^{-9}$ | $1.4698\cdot10^{-13}$ |

**Пример 2.** Решим ОУБФ, задаваемое уравнением (5). Точное решение (5), данное в [32], имеет вид

$$u(x,t) = \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\tanh(a_1(x-a_2 t))\right]^{1/\delta}, \quad t \ge 0, \tag{67}$$

где

$$\varepsilon = 1, \qquad a_1 = \frac{-\alpha\delta}{2(1+\delta)}, \qquad a_2 = \frac{\alpha}{(1+\delta)} + \frac{\beta(1+\delta)}{\alpha}.$$

Возьмем $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $N = 16$. Численные результаты вычисляются для различных временных уровней $t = 0.2$, $0.4$, $0.6$, $0.8$, $1.0$ и $\delta = 1$, $2$, $4$. Максимальные абсолютные ошибки представлены в табл. 4. В табл. 5 представлены максимальные абсолютные ошибки и порядок сходимости.

**Таблица 4.** Пример 2. Максимальные абсолютные ошибки

| $t$ | Метод, представленный в [33] | | | Метод, представленный в [14] | | | Метод, представленный в (24) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\delta=1$ | $\delta=2$ | $\delta=4$ | $\delta=1$ | $\delta=2$ | $\delta=4$ | $\delta=1$ | $\delta=2$ | $\delta=4$ |
| 0.2 | $5.55\cdot10^{-7}$ | $2.56\cdot10^{-6}$ | $1.76\cdot10^{-6}$ | $3.53\cdot10^{-7}$ | $7.96\cdot10^{-7}$ | $3.26\cdot10^{-6}$ | $1.08\cdot10^{-10}$ | $4.01\cdot10^{-7}$ | $7.40\cdot10^{-7}$ |
| 0.4 | $9.05\cdot10^{-7}$ | $4.24\cdot10^{-6}$ | $4.17\cdot10^{-7}$ | $1.75\cdot10^{-7}$ | $1.45\cdot10^{-6}$ | $3.56\cdot10^{-6}$ | $1.84\cdot10^{-10}$ | $5.79\cdot10^{-7}$ | $6.30\cdot10^{-7}$ |
| 0.6 | $2.18\cdot10^{-6}$ | $3.56\cdot10^{-6}$ | $2.42\cdot10^{-6}$ | $1.28\cdot10^{-7}$ | $1.82\cdot10^{-6}$ | $2.52\cdot10^{-6}$ | $4.74\cdot10^{-10}$ | $5.72\cdot10^{-7}$ | $2.79\cdot10^{-7}$ |
| 0.8 | $2.93\cdot10^{-6}$ | $1.46\cdot10^{-6}$ | $2.35\cdot10^{-6}$ | $3.85\cdot10^{-7}$ | $1.87\cdot10^{-6}$ | $1.40\cdot10^{-6}$ | $7.25\cdot10^{-10}$ | $4.43\cdot10^{-7}$ | $8.35\cdot10^{-8}$ |
| 1.0 | $3.01\cdot10^{-6}$ | $5.54\cdot10^{-6}$ | $1.44\cdot10^{-6}$ | $6.17\cdot10^{-7}$ | $1.67\cdot10^{-6}$ | $6.90\cdot10^{-7}$ | $8.74\cdot10^{-10}$ | $2.86\cdot10^{-7}$ | $1.99\cdot10^{-8}$ |

**Таблица 5.** Пример 2. Максимальные абсолютные ошибки и порядок сходимости

| $N+1$ | Максимальные абсолютные ошибки $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ | Порядок сходимости |
|---|---|---|
| 8 | $8.8729{\cdot}10^{-7}$ | |
| 16 | $5.5450{\cdot}10^{-8}$ | 4.00 |
| 32 | $3.4430{\cdot}10^{-9}$ | 4.00 |
| 64 | $2.1487{\cdot}10^{-10}$ | 4.00 |

**Пример 3.** Решим уравнение (6), точное решение которого $u(r,t) = e^{-t}\sinh r$. Вычислим максимальные абсолютные ошибки в момент времени $t = 1$ для фиксированного $k = 0.01$, для $p = 1$ и 2 и для различных значений $\mathrm{Re} = \varepsilon^{-1}$. Соответствующие численные результаты представлены в табл. 6.

**Таблица 6.** Пример 3. Максимальные абсолютные ошибки при $t = 1$, $k = 0.01$

| $N+1$ | $p=1$ | | $p=2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathrm{Re}=10$ | $\mathrm{Re}=100$ | $\mathrm{Re}=10$ | $\mathrm{Re}=100$ |
| 50 | $1.7780{\cdot}10^{-6}$ | $4.6738{\cdot}10^{-6}$ | $1.5605{\cdot}10^{-6}$ | $4.6672{\cdot}10^{-6}$ |
| 60 | $1.5303{\cdot}10^{-6}$ | $4.6710{\cdot}10^{-6}$ | $1.3393{\cdot}10^{-6}$ | $4.6655{\cdot}10^{-6}$ |
| 70 | $1.3135{\cdot}10^{-6}$ | $4.6651{\cdot}10^{-6}$ | $1.1353{\cdot}10^{-6}$ | $4.6602{\cdot}10^{-6}$ |
| 80 | $1.0137{\cdot}10^{-6}$ | $4.6712{\cdot}10^{-6}$ | $8.5868{\cdot}10^{-7}$ | $4.6623{\cdot}10^{-6}$ |
| 90 | $6.7447{\cdot}10^{-7}$ | $4.6703{\cdot}10^{-6}$ | $5.4159{\cdot}10^{-7}$ | $4.6626{\cdot}10^{-6}$ |

## 6. Заключительные замечания

В данной статье обсуждалась двухуровневая неявная численная схема четвертого порядка, основанная на аппроксимациях сплайнами в напряжении для одномерного квазилинейного параболического УЧП. Этот метод прямо получен из условия согласованности производной первого порядка неполиномиальной сплайн-функции. Метод является устойчивым для линейной модельной задачи. Точность и применимость метода исследовались с помощью нескольких УЧП, описывающих различные физические процессы, происходящие в природе. Мы обнаружили, что предложенный метод довольно хорошо работает по сравнению с другими методами. Из данных, приведенных в таблицах, мы можем заключить, что предложенная схема имеет четвертый порядок сходимости. Мы также видим, что предложенный метод хорошо работает в случае высоких чисел Рейнольдса.

## Благодарности

Авторы хотели бы выразить благодарность рецензентам за ценные комментарии и замечания, которые позволили улучшить качество статьи.

## Литература

1. **Bratsos A.G.** A fourth order improved numerical scheme for the generalized Burgers–Huxley equation // Am. J. Comput. Math. — 2011. — Vol. 1. — P. 152–158.
2. **Burgers J.M.** A Mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. — 1948. — Vol. 1. — P. 171–199.

3. **Celik I.** Chebyshev wavelet collocation method for solving generalized Burgers–Huxley equation // Math. Methods Appl. Sci. — 2016. — Vol. 39, № 3. — P. 366–377.
4. **Dehghan M., Heris J.M., and Saadatmandi A.** Application of semi-analytic methods for the Fitzhugh–Nagumo equation, which models the transmission of nerve impulses // Math. Methods Appl. Sci. — 2010. — Vol. 33, № 11. — P. 1384–1398.
5. **Duan Y., Kong L., and Zhang R.** A lattice Boltzmann model for the generalized Burgers–Huxley equation // Phys. A. — 2012. — Vol. 391, № 3. — P. 625–632.
6. **Fisher R.A.** The wave of advance of advantageous genes // Ann. Hum. Genetic. — 1937. — Vol. 7, № 4. — P. 353–369.
7. **Hageman L.A., Young D.M.** Applied Iterative Methods. — New York: Dover Publ., 2004.
8. **Jain M.K., Jain R.K., and Mohanty R.K.** High order difference methods for system of 1-D nonlinear parabolic partial differential equations // Int. J. Comput. Math. — 1990. — Vol. 37, № 1-2. — P. 105–112.
9. **Kelly C.T.** Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. — Philadelphia: SIAM Publications, 1995.
10. **Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., and Piskunov N.S.** A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem // Moscow University Mathematics Bulletin. — 1937. — Vol. 1. — P. 1–26.
11. **Kvasov B.I., Sattayatham P.** GB-splines of arbitrary order // J. Comput. Appl. Math. — 1999. — Vol. 104. — P. 63–88.
12. **Makarov A.A.** Construction of splines of maximal smoothness // J. Math. Sci. — 2011. — Vol. 178. — P. 589–604.
13. **Mittal R.C., Tripathi A.** Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines // Int. J. Comput. Math. — 2015. — Vol. 92. — P. 1053–1077.
14. **Mohammadi R.** Spline solution of the generalized Burgers'–Fisher equation // Appl. Anal. — 2011. — Vol. 91, № 12. — P. 2189–2215.
15. **Mohammadi R.** B-spline collocation algorithm for numerical solution of the generalized Burger's–Huxley equation // Numer. Meth. Partial Diff. Eqn. — 2013. — Vol. 29, № 4. — P. 1173–1191.
16. **Mohanty R.K.** An implicit high accuracy variable mesh scheme for 1-D non-linear singular parabolic partial differential equations // Appl. Math. Comput. — 2007. — Vol. 186, № 1. — P. 219–229.
17. **Mohanty R.K., Jain M.K.** High-accuracy cubic spline alternating group explicit methods for 1D quasi-linear parabolic equations // Int. J. Comput. Math. — 2009. — Vol. 86, № 9. — P. 1556–1571.
18. **Mohanty R.K.** A variable mesh C-SPLAGE method of accuracy $O(k^2h^-1 + kh + h^3)$ for 1D nonlinear parabolic equations // Appl. Math. Comput. — 2009. — Vol. 213, № 1. — P. 79–91.
19. **Mohanty R.K., Sharma S.** High-accuracy quasi-variable mesh method for the system of 1D quasi-linear parabolic partial differential equations based on off-step spline in compression approximations // Advances in Difference Equations. — 2017. — Vol. 212. — DOI: https://doi.org/10.1186/s13662-017-1274-3.
20. **Mohanty R.K., Sharma S., and Singh S.** A new two-level implicit scheme for the system of 1D quasi-linear parabolic partial differential equations using spline in compression approximations // Differ. Equ. Dyn. Syst. — 2019. — Vol. 27. — DOI: https://doi.org/10.1007/s12591-018-0427-5.

21. **Mohanty R.K., Sharma S., and Singh S.** A new two-level implicit scheme of order two in time and four in space based on half-step spline in compression approximations for unsteady 1D quasi-linear biharmonic equations /// Advances in Difference Equations. — 2018. — Vol. 378. — DOI: https://doi.org/10.1186/s13662-018-1841-2.

22. **Rashidinia J., Mohammadi R.** Non-polynomial cubic spline methods for the solution of parabolic equations // Int. J. Comput. Math. — 2008. — Vol. 85, № 5. — P. 843–850.

23. **Satsuma J.** Exact solutions of Burgers' equation with reaction terms // Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations. — Singapore: World Sci. Pub., 1986. — P. 255–262.

24. Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations // Proc. Conf. on Nonlinear Evolution Equations, Solitons and the Inverse Scattering Transform / M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal. — Singapore: World Scientific, 1987.

25. **Schweikert D.G.** An interpolation curve using a spline in tension // J. Math. Phys. — 1966. — Vol. 45, № 1-4. — P. 312–317.

26. **Scott A.C.** Neurophysics. — New York: Wiley, 1977.

27. **Talwar J., Mohanty R.K., and Singh S.** A new spline in compression approximation for one space dimensional quasilinear parabolic equations on a variable mesh // Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 260, iss. C. — P. 82–96.

28. **Talwar J., Mohanty R.K., and Singh S.** A new algorithm based on spline in tension approximation for 1D quasi-linear parabolic equations on a variable mesh // Int. J. Comput. Math. — 2016. — Vol. 93, № 10. — P. 1771–1786.

29. **Wang X.Y., Zhu Z.S., and Lu Y.K.** Solitary wave solutions of the generalized Burgers–Huxley equation // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — Vol. 23, № 3. — P. 271–274.

30. **Wang X.** Nerve propagation and wall in liquid crystals // Phys. Lett. — 1985. — Vol. 112A, № 8. — P. 402–406.

31. **Whitham G.B.** Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley and Sons, 1974.

32. **Zhang R., Yu X., and Zhao G.** The local discontinuous Galerkin method for Burger's–Huxley and Burger's–Fisher equations // Appl. Math. Comput. — 2012. — Vol. 218. — P. 8773–8778.

33. **Zhu C.-G., Kang W.-S.** Numerical solution of Burgers–Fisher equation by cubic B-spline quasi-interpolation // Appl. Math. Comput. — 2010. — Vol. 216. — P. 2679–2686.

*Поступила в редакцию 14 декабря 2018 г.*
*После исправления 1 февраля 2019 г.*
*Принята к печати 15 октября 2019 г.*