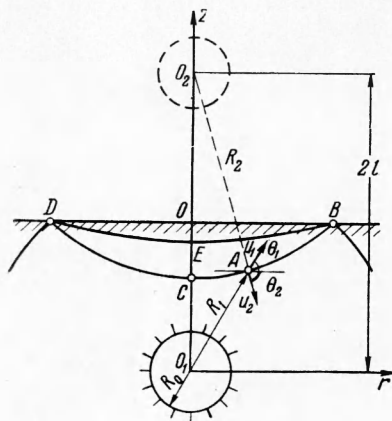


ОТРАЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Х. М. Алиев

(Москва)

1. Постановка задачи. Исследуем отражение сферической волны, распространявшейся внутри упругого полупространства от его свободной плоской границы.



Фиг. 1.

Предполагаем, что эта волна возникла в момент времени $t = 0$ в результате приложения нормального напряжения к поверхности сферической полости радиуса R_0 , центр которой O_1 находится на расстоянии l от границы (фиг. 1). Вследствие того, что задача осесимметрична, имеем следующие выражения для компонент тензора напряжений [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ \sigma_\varphi &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r} \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u и v — смещения по осям r и z , соответственно. Уравнения движения имеют следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

На свободной границе при $z = l$ выполняются условия:

$$\sigma_z(t, r, l) = 0, \quad \tau_{rz}(t, r, l) = 0 \quad (1.3)$$

2. Решение. Задача распространения сферических волн напряжений в бесконечной изотропной упругой среде, вызванной давлением — $p(t)$, равномерно распределенным по поверхности сферической полости радиуса R_0 внутри этой среды, описывается, например, в [2]. Решение этой задачи удовлетворяет волновому уравнению для смещения $U(t, R)$, определяющему движение позади фронта сферической волны $at - R + R_0 = 0$, нулевым начальным данным и граничному условию $\sigma_R = -p(t)$ при $R = R_0$ и имеет вид

$$\begin{aligned} U(t, R) &= -\frac{f'(\xi)}{R} - \frac{f(\xi)}{R^2}, \quad f(\xi) = -Ae^{-\alpha \xi} (J_1(\xi) \sin \beta \xi - J_2(\xi) \cos \beta \xi) \\ J_1(\xi) &= \int_0^{\xi} e^{\alpha \xi} \cos \beta \xi p\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi, \quad J_2(\xi) = \int_0^{\xi} e^{\alpha \xi} \sin \beta \xi p\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi \quad (\xi = at - R + R_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\alpha = \frac{2k^2}{R_0}, \quad \beta = \frac{2k\sqrt{1-k^2}}{R_0}, \quad A = \frac{\rho R_0}{a^2 \beta}, \quad \frac{1}{k} = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}}$$

До момента $t = (l - R_0) / a$, когда вершина волны достигает границы, процесс распространения описывается решением (2.1) (которое теперь будем обозначать индексом 1). Начиная с этого момента в некоторой области, прилегающей к границе полупространства, сказывается эффект отражения. Для количественного учета эффекта отражения воспользуемся следующим приемом. Дополним рассматриваемое полупространство до полного и поместим внутри фиктивного полупространства сферическую полость радиуса R_0 с центром O_2 , расположенную симметрично сфере O_1 относительно границы (фиг. 1); предположим, что в этой полости нагрузка $-p(t)$ распределена и действует точно по тому же закону, что и в фактической полости. Решение для вновь введенной полости отличается от (2.1) лишь тем, что расстояние R_2 отсчитывается от O_2

$$U_2(t, R_2) = -\frac{f_2'(\xi_2)}{R_2} - \frac{f_2(\xi_2)}{R_2^2} \quad (2.2)$$

Здесь

$$f_2(\xi_2) = -Ae^{-\alpha\xi_2}(J_1(\xi_2) \sin \beta\xi_2 - J_2(\xi_2) \cos \beta\xi_2), \quad \xi_2 = at - R_2 + R_0$$

Будем рассматривать отражение как результат совместного действия волн, распространяющихся от обеих полостей, для этого выразим u и v через U_1 и U_2 следующим образом (фиг. 1):

$$u = U_1 \cos \theta_1 + U_2 \cos \theta_2, \quad v = U_1 \sin \theta_1 - U_2 \sin \theta_2 \quad (2.3)$$

Если окажется, что выражения (2.3) удовлетворяют уравнениям (1.2) и условиям (1.3), то задача будет решена и фиктивное полупространство можно отбросить. Проверим это. Подставляя (2.3) в (1.1), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_z = (\lambda + 2\mu) & \left\{ (1 - 2(k \cos \theta_1)^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} + (1 - 2(k \cos \theta_2)^2) \frac{f_2''(\xi_2)}{R_2} - \right. \\ & \left. - 2k^2 \left[(1 - 3 \sin^2 \theta_1) \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) + (1 - 3 \sin^2 \theta_2) \left(\frac{f_2'(\xi_2)}{R_2^2} + \frac{f_2(\xi_2)}{R_2^3} \right) \right] \right\} \\ \tau_{rz} = \mu & \left[\sin 2\theta_1 \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1} + 3 \frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + 3 \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) - \sin 2\theta_2 \left(\frac{f_2'(\xi_2)}{R_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \frac{f_2'(\xi_2)}{R_2^2} + 3 \frac{f_2(\xi_2)}{R_2^3} \right) \right] \quad (R_1 = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (2l - z)^2}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогично вычисляем σ_r и σ_φ .

На фронте продольной волны (например, точка A на фиг. 1)

$$\xi_2 = at - R_2 + R_0 = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 = R_2 - R_1$$

Откуда следует, что

$$f_2(0) = f_2'(0) = 0, \quad f_2''(0) = -\frac{p_0 R_0}{\lambda + 2\mu}, \quad p_0 = p(0)$$

Здесь формулы (2.4) приобретают вид

$$\begin{aligned} \sigma_z = (\lambda + 2\mu) & \left[(1 - 2(k \cos \theta_1)^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} - \right. \\ & \left. - 2k^2 (1 - 3 \sin^2 \theta_1) \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) \right] - p_0 \frac{R_0}{R_2} (1 - 2(k \cos \theta_2)^2) \\ \tau_{rz} \mu = \sin 2\theta_1 & \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1} + 3 \frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + 3 \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) + k^2 p_0 \frac{R_0}{R_2} \sin 2\theta_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

На границе $z = l$, $R_1 = R_2$, $\theta_1 = \theta_2$ и (2.4) приводится к

$$(2.6)$$

$$\sigma_z = 2(\lambda + 2\mu) \left[(1 - 2(k \cos \theta_1)^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} - 2k^2 (1 - 3 \sin^2 \theta_1) \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) \right]$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (2.7)$$

Причем в точке B фронта, движущейся по границе со скоростью $a / \cos \theta_1$, выражение для σ_z принимает следующий вид:

$$\sigma_z = -2p_0 \frac{R_0}{R_1} (1 - 2(k \cos \theta_1)^2) \quad (2.8)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что формулы (2.3) и (2.4) удовлетворяют исходным уравнениям (1.2), условию непрерывности смещения на фронте и одному из граничных условий (1.3), но другое условие (1.3) не выполняется вследствие того, что на границе возникает нормальное напряжение σ_z (см. (2.6) и (2.8)), которое движется по определенному закону вдоль нее. Однако можно удовлетворить и этому условию, если к границе полупространства приложить напряжение σ_z , которое распространяется и действует точно таким же способом, как и (2.6), но противоположного знака; при этом $\tau_{rz} = 0$ на границе.

Таким образом, задача отражения привелась к некоторому определенному случаю задачи проникания в глубь упругого полупространства давления, движущегося по его поверхности. Очевидно, найдя решение этой вспомогательной задачи проникания и сложив его с (2.3) и (2.4), соответственно, тем самым получим искомое решение задачи отражения сферической упругой волны от границы полупространства. Подобная задача проникания была рассмотрена А. Г. Багдоевым [3], который, пользуясь лучевым методом, получил асимптотическое представление решения вблизи волновых фронтов. На самом деле, прифронтовые области, где для резко падающего со временем граничного давления сконцентрировано в основном все давление, переданное в среду, представляют наибольший интерес.

Применим результаты работы [3] к рассматриваемому случаю задачи проникания. Выразим u и v через потенциалы Φ и Ψ согласно

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r} \quad (2.9)$$

и приведем уравнения к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

В этом случае на граничной поверхности при $z = l$ должны выполняться следующие условия: (2.11)

$$\sigma_z = \mu \left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] = \begin{cases} p_1(t, r) & \text{при } r < X(t) \\ 0 & \text{при } r > X(t) \end{cases}$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Здесь

$$p_1(t, r) = -2(\lambda + 2\mu) \left[(1 - 2(k \cos \theta_1)^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} - 2k^2 (1 - 3 \sin^2 \theta_1) \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) \right] \quad (2.13)$$

$r = X(t)$ — координата фронта давления, движущегося по границе полупространства.

Согласно [3,4] уравнения (2.10) в прифронтовых областях приобретают следующий вид:

$$\Phi = \frac{A(\theta_2)}{\sqrt{t - \tau_2 + R_0/a}} \frac{1}{\sqrt{r}} \omega(\tau_2), \quad \Psi = \frac{B(\theta_3)}{\sqrt{t - \tau_3 - t_c(\theta_3)}} \frac{1}{\sqrt{r}} \omega(\tau_3) \quad (2.14)$$

При этом уравнения для определения $\tau_{2,3}$ и $\theta_{2,3}$ запишутся так:

$$\begin{aligned} r - r_0(\theta_2) &= a [t - \tau_2 - t_0(\theta_2)] \cos \theta_2 \\ z - l &= -a [t - \tau_2 - t_0(\theta_2)] \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{для продольной волны}) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} r - r_0(\theta_3) &= b [t - \tau_3 - t_0(\theta_3)] \cos \theta_3 \\ z - l &= -b [t - \tau_3 - t_0(\theta_3)] \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (\text{для поперечной волны}) \quad (2.16)$$

Здесь $t_0(\theta_{2,3})$ — момент времени, когда точка фронта, движущаяся по границе и находящаяся на луче $\theta_{2,3}$, имела координаты $r_0(\theta_{2,3}), l$. В рассматриваемом случае

$$t_0(\theta_2) = t_0(\theta_3), \quad r_0(\theta_2) = r_0(\theta_3) = X[t_0(\theta_2)] \quad (2.17)$$

$$t_c(\theta_3) = t_0(\theta_2) + \frac{r'_0(\theta_3) \sin \theta_3}{b}, \quad X'[t_0(\theta_2)] = \frac{c_{2,3}}{\cos \theta_{2,3}} \quad \left(\begin{matrix} c_2 = a \\ c_3 = b \end{matrix} \right)$$

Положим $\omega(\tau) = \tau^2/2$; тогда в выражениях для тензора напряжений на фронте будут отличными от нуля слагаемые с $\omega''(\tau)$. Принимая это во внимание, а также учитывая соотношения

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{\cos \theta_{2,3}}{c_{2,3}}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\sin \theta_{2,3}}{c_{2,3}}$$

из условий (2.11) и (2.12) как линейной системы алгебраических уравнений для определения $A(\theta_2)$ и $B(\theta_3)$, получаем

$$\begin{aligned} A(\theta_2) &= 2 \frac{p_0 R_0}{\rho a} \frac{\sqrt{r_0(\theta_2)}}{\sqrt{t_0(\theta_2) + R_0/a}} \frac{1}{1 + H(\theta_2)} \\ H(\theta_2) &= \frac{4k^3 \sin \theta_2 \cos^2 \theta_2 \sqrt{1 - (k \cos \theta_2)^2}}{[1 - 2(k \cos \theta_2)^2]^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

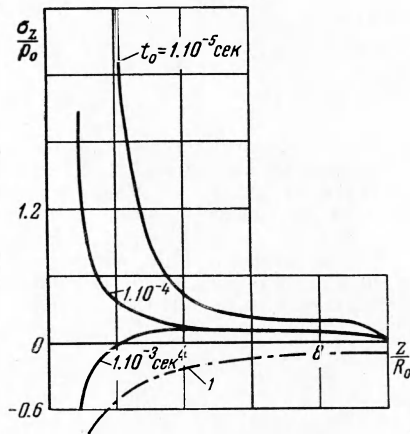
Аналогично находим $B(\theta_3)$ и тем самым определяем все компоненты тензора напряжений в прифронтовых областях для вспомогательной задачи.

Окончательно, складывая этот результат с ранее полученным (2.5), полностью определяем напряженное состояние на фронте продольной волны (BCD на фиг. 1)

$$\begin{aligned} \sigma_z &= (\lambda + 2\mu) \left[(1 - 2(k \cos \theta_1)^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} - 2k^2 (1 - 3 \sin^2 \theta_1) \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) \right] + p_0 \frac{R_0}{R_2} [1 - 2(k \cos \theta_2)^2] \frac{1 - H(\theta_2)}{1 + H(\theta_2)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

На фиг. 2 нанесены кривые изменения напряжения σ_z/p_0 на вершине фронта отраженной волны (точка C на фиг. 1) в зависимости от расстояния z/R_0 , вычисленные для одного частного случая, когда давление $p(t)$ мгновенно возрастает до максимума p_0 , а затем падает по линейному закону

$$p(t) = p_0 (1 - t/t_0)$$



Фиг. 2

при этом предполагалось, что константа t_0 принимает значения: $1 \cdot 10^{-5}$ сек, $1 \cdot 10^{-4}$ сек, $1 \cdot 10^{-3}$ сек, $l/R_0 = 10$. Кривая I соответствует изменению напряжений на фронте падающей волны. Сравнивая кривые, заключаем, что с уменьшением t_0 развиваются значительные растягивающие напряжения, являющиеся причиной откола материала.

Таким же образом получаем выражения для σ_r , σ_φ и τ_{rz}

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \left[(1 - 2(k \sin \theta_1)^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} - 2k^2(1 - 3 \cos^2 \theta_1) \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \frac{f(\xi_1)}{R_1^3} \right) \right] + p_0 \frac{R_0}{R_2} [1 - 2(k \sin \theta_2)^2] \frac{1 - H(\theta_2)}{1 + H(\theta_2)} \quad (2.20)$$

$$\sigma_\varphi = (\lambda + 2\mu) \left[(1 - 2k^2) \frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} - 2k^2 \left(\frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right) \right] + p_0 \frac{R_0}{R_2} (1 - 2k^2) \frac{1 - H(\theta_2)}{1 + H(\theta_2)}$$

$$\tau_{rz} = \mu \sin 2\theta_1 \left[\frac{f_1''(\xi_1)}{R_1} + 3 \frac{f_1'(\xi_1)}{R_1^2} + 3 \frac{f_1(\xi_1)}{R_1^3} \right] - p_0 \frac{R_0}{R_2} k^2 \sin 2\theta_2 \frac{1 - H(\theta_2)}{1 + H(\theta_2)}$$

Решение (2.19) имеет место вплоть до момента $t = 2(l - R_0)/a$, когда вершина отраженной волны достигает сферической полости. Начиная с этого момента, в некоторой окрестности этой полости скажется эффект отражения, однако этот случай рассматривать здесь не будем.

Поступила 7 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в А. Математическая теория упругости. М., Объединенное научно-техническое издательство НКТП, 1935.
2. Б р о б е р г К. Б. Ударные волны в упругой и упруго-пластической среде. М., Госгортехиздат, 1959.
3. Б а г д о е в А. Г. Определение давления в окрестности фронта. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 5.
4. Ф и л и п п о в А. Ф. О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1957, № 7.