

ТЕОРИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ БЕЗДИССИПАТИВНОГО  
КОРОБЧАТОГО УСКОРИТЕЛЯ

А. И. Морозов

(Москва)

В работе произведен расчет двумерного течения двухкомпонентной холодной бездиссипативной плазмы.

Найдено условие, при котором бездиссипативная плазма может выйти из магнитного поля.

Следует различать ускорители плазмы, работающие на большой плотности вещества ( $n \geq 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ), и ускорители, работающие на малых плотностях ( $n \leq 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ).

В первом случае ускорение ионов может осуществляться не только за счет внутренних электрических полей, но и за счет столкновений ионов друг с другом (обычный тепловой разгон) или столкновений ионов с электронами, движущимися благодаря эффекту Холла<sup>1</sup> вдоль ускорительного канала.

Во втором случае единственным механизмом, способным ускорять ионы, является внутреннее продольное электрическое поле [1,2]. При этом исключаем из рассмотрения системы [3], в которых ускорение ионов происходит за счет кинетических неустойчивостей.

В данной работе будет рассмотрено ускорение плазмы малой плотности. В качестве конкретного примера выбран коробчатый ускоритель, поскольку здесь особенно отчетливо выступают особенности ускоряющих систем малой плотности.

При создании коробчатого ускорителя, работающего при малой плотности, должны быть выполнены три условия.

Во-первых, необходимо использовать секционированные электроды, так как иначе нельзя создать в объеме ускорителя необходимые для ускорения плазмы электрические поля типа (2.11) (см. ниже). При сплошных электродах структура электрического поля в объеме ускорителя будет результатом наложения и взаимодействия друг с другом весьма сложных приэлектродных и краевых процессов.

Во-вторых, если рассматриваемые системы предназначены для получения быстрых скоростей, то необходимо создать условия, при которых отсутствует взаимодействие потока быстрых частиц со стенкой. Иными словами, в системе должно быть осуществлено электромагнитное управление потоком, а не управление при помощи стенок, которое имеет место в обычных газодинамических соплах.

Следует отметить, что в высокоскоростных ускорителях плазмы, дающих ионы с энергией  $\geq 100 \text{ эв}$ , необходимо устранять взаимодействие потока со стенкой и при более высоких плотностях.

Наконец, в-третьих, должны быть созданы условия, обеспечивающие выход плазмы из магнитного поля.

В работах [4] было показано, что магнитное поле «вморожено» фактически в электронную компоненту плазмы, поэтому необходимым условием выхода компенсированного потока из магнитного поля является большая величина параметра обмена<sup>2</sup>

$$\xi \gg 1$$

В данной работе будет развита теория сверхзвуковой части коробчатого ускорителя. Следует отметить, что теории коробчатого ускорителя посвящено много работ [5-8]. Однако они выполнены либо в предположении о несжимаемости среды, либо в квазиодномерном приближении с принудительно заданной геометрией потока. Разумеется, эти допущения весьма далеки от действительности, по крайней мере, в том случае, когда речь идет о получении высокоскоростных потоков.

<sup>1</sup> Этот метод разгона естественно назвать омическим, поскольку он обязан омическому сопротивлению плазмы.

<sup>2</sup> Под параметром обмена, в соответствии с [4], понимается отношение разрядного тока  $I_0$  к ионному потоку  $I_i$ , выходящему из ускорителя  $\xi = I_0 / I_i$ ,  $I_i = eq/m$ , где  $q$  — массовый расход рабочего вещества.

1. Исходные уравнения. Если обеспечено отжатие потока плазмы от стенок и плотность его невелика, то диссипативными процессами можно пренебречь. Если к тому же считать течение ионов существенно сверхзвуковым, то стационарное движение ионов будет описываться уравнениями

$$\operatorname{div} n\mathbf{v}_i = 0, \quad m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{H} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_i$  — скорость ионов,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $e$ ,  $m$  — заряд и масса иона,  $n$  — концентрация ионов, которую считаем равной концентрации электронов. Предполагая почти полную ионизацию, наличием нейтралов пренебрегаем.

Аналогично, если электронная температура, измеренная в эв, мала по сравнению с разностью потенциалов, приложенной к ускорителю, то, за исключением приэлектродных слоев, в качестве хорошего приближения для электронной компоненты можно взять систему уравнений:

$$\operatorname{div} n\mathbf{v}_e = 0, \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{H} = 0 \quad (1.2)$$

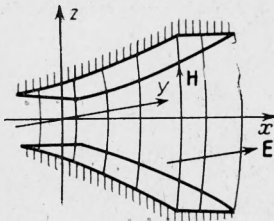
Учет эффекта Холла состоит в том, что во второе уравнение (1.2) вместо  $\mathbf{v}_i$  входит  $\mathbf{v}_e$ . Из второго уравнения (1.2) следует, что, во-первых, силовые линии  $\gamma$  магнитного поля являются эквипотенциалами электрического поля

$$\varphi = \varphi(\gamma) \quad (1.3)$$

и, во-вторых, что дрейф электронов происходит по эквипотенциальным поверхностям (фиг. 1). Задача состоит в том, чтобы рассчитать движение ионов и электронов, описываемое уравнениями (1.1) и (1.2) в условиях коробчатого ускорителя.

В коробчатом ускорителе (фиг. 2) магнитное поле можно считать заданным, т. е. можно пренебречь собственным магнитным полем токов, текущих в плазме. Если ограничиться случаем плоских магнитных полей, когда все силовые линии лежат в плоскостях  $y = \text{const}$ , то они могут быть описаны одной компонентой векторного потенциала

$$A_y(x, z) = \int_0^x H_0(x) dx - H_0'(x) \frac{z^2}{2} \quad (1.4)$$



Фиг. 2

Здесь  $H_0(x)$  — напряженность поля в плоскости симметрии  $z = 0$ .

В частном случае, когда магнитное поле  $H_0$  спадает по линейному закону

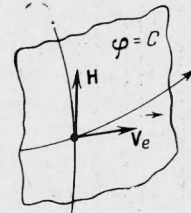
$$H_0 = H_{00} (1 - x/L) \quad (1.5)$$

компонента  $A_y$  равна

$$A_y = -\frac{1}{2} H_{00} L \psi, \quad \psi \equiv (1 - x/L)^2 - z^2/L^2 \quad (1.6)$$

Уравнение силовых линий имеет вид [9]

$$\psi = \text{const}, \quad y = \text{const}$$



Фиг. 1

Следовательно, в данном случае уравнение (1.3) может быть записано в виде

$$\varphi = \varphi(\psi, y) \quad (1.7)$$

Зависимость  $\varphi(x, y, 0)$  при заданном магнитном поле может быть произвольной. Однако в дальнейшем будет видно, что удобно задавать лишь зависимость  $\varphi(x, 0, 0)$ , тогда как зависимость  $\varphi$  от  $y$  при  $z = 0$  следует подобрать такой, чтобы течение плазмы имело желаемый характер.

Для того чтобы решить достаточно сложную систему (1.1), (1.2), (1.7), прибегнем к приближению ионной оптики, т. е. зададим одну «основную» траекторию с известным законом изменения на ней скорости ионов и будем искать все величины в виде рядов по степеням удаления от основной траектории. Это кажется оправданным, потому что поперечные размеры коробчатого ускорителя малы по сравнению с его длиной. В качестве такой основной траектории возьмем ось  $x$ . Тогда для величин можно написать разложения

$$(\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \equiv \mathbf{v}_e)$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_1(x) + yv_{12}(x) + zv_{13}(x) + \dots \\ u_x &= u_1(x) + yu_{12}(x) + zu_{13}(x) + \dots \\ v_y &= yv_{22}(x) + zv_{23}(x) + \dots \\ u_y &= u_2(x) + yu_{22}(x) + zu_{23}(x) + \dots \\ v_z &= yv_{32}(x) + zv_{33}(x) + \dots \\ u_z &= yu_{32}(x) + zu_{33}(x) + \dots \\ n &= n_1(x) + yn_2(x) + zn_3(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Аналогично разложим по степеням  $y$  соотношение (1.7)

$$\varphi = \varphi_0(\psi) + y\varphi_1(\psi) + \frac{1}{2}y^2\varphi_2(\psi) + \dots \quad (1.9)$$

Подставляя разложения (1.8), (1.9) в уравнения (1.1), (1.2), получим систему уравнений для коэффициентов разложения.

Оказывается, что эта система, наряду с весьма сложными решениями, имеет, с точностью до членов первого порядка малости включительно, следующее простое решение:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 + y \frac{e}{mc} H_0(x) + 0 + \dots, & u_x &= v_1 + y \frac{e}{mc} H_0(x) + 0 + \dots \\ v_y &= 0 + 0 + 0 + \dots, & u_y &= \frac{c}{H_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{z=0} - y \frac{(H_0 v_1)'}{H_0} + 0 + \dots \\ v_z &= 0 + 0 + z v_{33} + \dots, & u_z &= 0 + 0 + z v_{33} + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\frac{m}{e} \frac{v_1^2}{2} + \varphi_0 \Big|_{z=0} \equiv \varphi_{00} = \text{const}, \quad \varphi_1 \Big|_{z=0} = - \frac{v_1 H_0(x)}{c}$$

$$n_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} n_1 v_1 + n_1 v_{33} = 0, \quad n_2 u_2 + n_1 u_{22} = 0$$

Величина  $v_{33}$  определяется уравнением типа Риккати

$$\frac{m}{e} (v_1 v_{33}' + v_{33}^2) = H_0' \frac{d\varphi_0}{d\psi} \Big|_{z=0} \quad (1.11)$$

Найденное частное решение интересно тем, что оно описывает такое течение плазмы, при котором скорость ионов имеет лишь продольные компоненты  $v_x$ ,  $v_z$  и плотность тока  $\mathbf{j} = en(\mathbf{v} - \mathbf{u})$  имеет только одну компоненту  $j_y$ .

2. Исследование решения (1.10) Прежде всего обращает на себя внимание то обстоятельство (см. (1.10)), что плазменный поток расширяется вдоль оси  $z$ . Этот эффект обязан выпуклости магнитных силовых линий. Однако в одномерных теориях он не учитывался и формально «подавлялся», например, стенками  $z = \text{const}$ , ограничивающими поток по  $z$ . Такого рода «подавление» приемлемо лишь при ускорении до небольших скоростей плотной плазмы и непригодно при ускорении до высоких скоростей редкой плазмы. Расширение потока просто рассчитать в том случае, когда магнитное поле изменяется по линейному закону (1.5), а потенциал  $\varphi_0$  ( $\psi$ ) является линейной функцией  $\psi$

$$\varphi_0 = \varphi_{00}\psi, \quad \varphi_0|_{z=0} = \varphi_{00} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (2.1)$$

Тогда изменение скорости  $v_1$  вдоль оси  $x$  на основании (1.10) дается формулой

$$v_1 = v_m \sqrt{1 - (1 - x/L)^2}, \quad \max v \equiv v_m \equiv \left(\frac{2e\varphi_{00}}{m}\right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.11), находим выражение для  $v_z$

$$v_z = z \frac{v_m \exp(2 \arccos \zeta) - 1}{L \exp(2 \arccos \zeta) + 1}, \quad \zeta \equiv 1 - \frac{x}{L} \quad (2.3)$$

а тем самым при помощи уравнения

$$dz / dx = v_z / v_1 \quad (2.4)$$

определяем границу пучка в плоскости  $xz$

$$z_s = z_0 \operatorname{ch}(\arccos \zeta) \quad (2.5)$$

Здесь  $z_0$  — ширина пучка на входе в канал ускорителя. Ширина пучка на выходе, т. е. при  $x = L$  ( $\zeta = 0$ ), равна

$$(z_s)_{\max} = z_0 \operatorname{ch} \frac{1}{2}\pi \approx 2.63z_0 \quad (2.6)$$

Зная, как расширяется пучок, можно найти изменение плотности в плоскости  $y = 0$ . Из решения (1.10) для  $v_z$  следует

$$n_1 v_1 z_s = \text{const} \quad (2.7)$$

Поэтому

$$n_1 = \frac{\text{const}}{z_0 [\operatorname{ch}(\arccos \zeta)] v_m \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.8)$$

Последнее уравнение (1.10) указывает, что плотность плазмы зависит от  $y$ . В частности, если поле спадает по линейному закону

$$n = n_1 \left[ 1 + y \frac{eH_{00}}{v_m mc} \frac{(1 - 2\zeta^2)}{\zeta(1 - \zeta^2)^{1/2}} \right] \quad (2.9)$$

Выше отмечено, что полученное решение описывает течение плазмы, при котором существует только одна  $y$ -компонента тока. Этот ток обязан дрейфу электронов в  $y$ -направлении под действием продольного электрического поля  $E_x$ . Зависимость (1.10) скорости дрейфа  $u_y$  от  $y$  и приводит к изменению плотности плазмы в направлении оси  $y$  (см. (2.9)).

Величина плотности тока в сечении  $y = 0$  для случая (1.5), (2.1), как нетрудно видеть, равна

$$j = e \frac{v_m^2 mc}{LeH_{00}} n_1 = e n_1 v_m \frac{R_{i0}}{L}, \quad R_{i0} \equiv \frac{v_m mc}{eH_{00}} \quad (2.10)$$

Если учесть, что  $n_1 \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ , то на входе  $j \rightarrow \infty$ .

Электрический потенциал в канале описывается выражением

$$\varphi = \varphi_0(x, 0) - \frac{1}{c} y v_1 H_0(x) + \dots \quad (2.11)$$

Первый член этого выражения описывает продольное электрическое поле, обеспечивающее разгон ионов. Второй член — поперечное поле, уравнивающее силу Лоренца и обеспечивающее  $v_y = 0$ , а также равенство продольных скоростей ионов и электронов, т. е. отсутствие продольного тока. Если обозначить через  $b$  ширину канала, то напряжение  $V(x)$  между электродами будет равно

$$V(x) = b \frac{v_1(x) H_0(x)}{c}$$

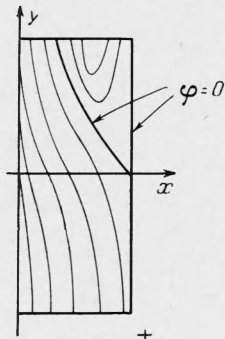
Для случая (1.5), (2.1)

$$V(x) = V_m 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}, \text{ где } V_m \equiv \frac{1}{4} b v_m H_{00}$$

— максимальное значение напряжения при

$$x_m = L (\sqrt{2} - 1) / \sqrt{2} \approx 0.3 L$$

Картина распределения потенциала в плоскости  $xu$  для случаев, близких к (1.5), (2.1), имеет вид, изображенный на фиг. 3. Немонотонная зависимость  $\varphi$  от  $x$  при  $y > 0$  объясняется быстрым спадом  $\varphi$  при  $x \rightarrow L$ . Практически разумно делать системы<sup>1</sup>, работающие при  $y < 0$ .



Фиг. 3

Если рассчитать параметр обмена [4] для данной системы, то в общем случае он равен (см. 1.10)

$$\xi = \frac{I_0}{I_i} = \frac{1}{eN} \int_0^L j_y f dx = \frac{1}{b} \int_0^L \frac{dv}{eH_0/mc} \quad (2.12)$$

Здесь  $f(x)$  — высота канала.  
В частном случае (1.5) и (2.1)

$$\xi = \frac{1}{b} R_{i0} \frac{\pi}{2}, \quad R_{i0} \equiv \frac{v_m mc}{eH_{00}} \quad (2.13)$$

Для того чтобы при отсутствии диссипации обеспечить выход плазмы из магнитного поля, необходимо сделать  $\xi \gg 1$  [4]. Определение теоретическим путем минимального значения  $\xi$  для той или иной конкретной системы представляет очень сложную задачу, лежащую за пределами данной работы.

Если задаться некоторой априорно взятой величиной  $\xi_0$ , например  $\xi_0 = 10$ , то при заданном расходе  $N$  автоматически находим выражение для разрядного тока

$$I_0 = \xi_0 eN$$

Если наряду с этим задать скорость истечения и ширину канала, то при помощи (2.13) находится напряженность поля

$$H_{00} = \frac{v_m \pi}{2eb} \frac{mc}{\xi_0}$$

Рассмотрим теперь вопрос о параметрах малости, по которым производится разложение (1.8).

<sup>1</sup> При данном выборе системы координат и зависимостей (1.5) и (2.1).

