

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА НАГРЕТОЙ РЕШЕТКОЙ

М. К. Баев, Г. Г. Черных

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: maxaus@bk.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Построена основанная на замкнутых уравнениях Кармана — Ховарта и Корсина численная модель динамики турбулентности и флуктуаций температуры за нагретой решеткой в аэродинамической трубе. Полученные с ее применением результаты расчетов удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: уравнения Кармана — Ховарта и Корсина, турбулентность за решеткой, изотропная турбулентность, турбулентные флуктуации температуры, численное моделирование.

Введение. Турбулентность за решеткой в аэродинамической трубе или гидроканале является одним из важных объектов исследований в экспериментальной, теоретической и вычислительной гидродинамике. Достаточно подробный обзор работ по этой теме представлен в [1–4].

Как известно, турбулентность за решеткой в аэродинамической трубе близка к изотропной [1]. Наиболее полные данные о вырождении турбулентности за ненагретой решеткой получены в экспериментах [2], в которых достигнута высокая степень изотропии потока путем его поджатия; проведена детальная экспериментальная проверка справедливости незамкнутого уравнения Кармана — Ховарта [1].

В настоящее время известно достаточно большое количество моделей замыкания уравнения Кармана — Ховарта в спектральной формулировке [1]. Построены математические модели, основанные на непосредственном замыкании уравнения Кармана — Ховарта и записанные в терминах корреляционных функций (см. [3, 4]). Среди моделей такого типа отметим градиентную модель, предложенную Ю. М. Лыткиным [5, 6] (аналогичная модель предложена позднее в работе [7]). Эта модель соответствует гипотезам А. Н. Колмогорова о локальной изотропии течения [1]. Результаты расчетов, полученные с использованием градиентной модели, хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [2–6]. В [8] построена математическая модель динамики изотропной турбулентности, основанная на дифференциальных уравнениях переноса двухточечных продольных корреляционных функций второго и третьего порядков. Предложенная в [5, 6] модель является следствием алгебраического усечения модели [8]. Среди работ, посвященных численному моделированию динамики изотропной турбулентности с использованием замкнутого

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 04-01-00209а, 07-01-00363а), Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-9886.2006.9), Сибирского отделения РАН (совместный Интеграционный проект СО РАН, ДВО РАН, УрО РАН № 103).

уравнения Кармана — Ховарта, следует отметить также работу [9]. Авторы [9] выполнили большой объем исследований, однако предложенное ими замыкание не описывает асимптотическое поведение продольной структурной функции поля скорости $D_{LL,L}$ третьего порядка в области малых масштабов, соответствующее первой гипотезе подобия А. Н. Колмогорова [1] (на это обстоятельство указывалось в работах [2, 4, 7, 9]). Краткий обзор других методов математического моделирования изотропной турбулентности, в частности основанных на прямом численном интегрировании уравнений Навье — Стокса, представлен в [3, 4].

Турбулентное течение за нагретой решеткой в аэродинамической трубе также рассматривалось в ряде работ (см., например, [1, 10–12]). В [12], как и в [10], основная решетка, создающая близкую к изотропной турбулентность, не нагревалась. Для подвода тепла в потоке за решеткой (в непосредственной близости от нее) помещался экран из проволочек, подогреваемый электрическим током. Наиболее полными (насколько известно авторам данной работы) являются результаты экспериментов [10], в которых выполнены измерения близких к изотропным пульсационных характеристик полей скорости и температуры в зависимости от расстояния от решетки. В частности, в [10] представлены подробные данные о динамике двухточечных корреляционных функций второго порядка.

Результаты анализа известных авторам работ, посвященных исследованию турбулентного течения за нагретой решеткой, позволяют сделать вывод, что численное моделирование течения на основе замкнутой системы уравнений Кармана — Ховарта и Корсина [1] не проводилось. В настоящей работе осуществлено замыкание уравнения Корсина с использованием градиентной гипотезы, аналогичной предложенной в [5, 6]. Построена численная модель турбулентного течения за нагретой решеткой, основанная на системе замкнутых уравнений Кармана — Ховарта и Корсина. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [10].

1. Постановка задачи. Для описания изотропного турбулентного течения и флуктуаций температуры в нем используется система уравнений Кармана — Ховарта и Корсина [1, 10]

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial t} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(B_{L\theta,\theta} + \chi \frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Здесь B_{LL} , $B_{LL,L}$ — продольные двухточечные корреляционные функции поля скорости второго и третьего порядка; $B_{\theta\theta}$ — двухточечная корреляционная функция поля температуры; $B_{L\theta,\theta}$ — смешанный момент третьего порядка; ν , χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности.

Система уравнений (1), (2) не замкнута. Для замыкания уравнения (1) используем известную гипотезу градиентного типа [5, 6]:

$$B_{LL,L} = 2K_1 \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}, \quad (3)$$

где $K_1 = \varkappa_1 r \sqrt{2[B_{LL}(0, t) - B_{LL}(r, t)]}$ — коэффициент турбулентной вязкости; \varkappa_1 — эмпирическая постоянная. Уравнение (2) замыкается с помощью аналогичного градиентного соотношения

$$B_{L\theta,\theta} = K_2 \frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r}, \quad K_2 = \varkappa_2 r \sqrt{2[B_{LL}(0, t) - B_{LL}(r, t)]}. \quad (4)$$

Значение \varkappa_1 выбиралось равным 0,0764 [5, 6] с учетом того, что в инерционно-конвективном интервале масштабов [1] справедливо соотношение Колмогорова

$$D_{LL} = 2[B_{LL}(0, t) - B_{LL}(r, t)] = (1/5\varkappa_1)^{2/3}(\varepsilon r)^{2/3} = C_u(\varepsilon r)^{2/3}.$$

Здесь $\varepsilon = -(3/2) du^2/dt$ — скорость диссипации энергии турбулентности в тепло; $u = \sqrt{B_{LL}(0, t)}$; $C_u = 1,9$ — универсальная колмогоровская постоянная [1]. Выполненный аналогично анализ (4) приводит (на инерционно-конвективном интервале масштабов) к соотношению Обухова [1]

$$D_{\theta\theta} = 2[B_{\theta\theta}(0, t) - B_{\theta\theta}(r, t)] = \frac{1}{\varkappa_2 \sqrt{C_u}} N \varepsilon^{-1/3} r^{2/3} = C_\theta N \varepsilon^{-1/3} r^{2/3},$$

где $N = -(1/2) d\theta^2/dt$ — скорость выравнивания температурных неоднородностей; $\theta = \sqrt{B_{\theta\theta}(0, t)}$; C_θ — постоянная (аналог C_u). В монографии [1] отмечается, что результаты проведенных экспериментов имеют значительный разброс: $C_\theta = 1,1 \div 6,5$ (при обработке экспериментальных данных для морского приводного слоя атмосферы получено даже значение $C_\theta = 9$). В [1] рекомендовано значение $C_\theta = 3$.

Таким образом, для течения с достаточно большими значениями турбулентных чисел Рейнольдса и Пекле значение $\varkappa_2 = 0,112 \div 0,660$. В данной работе значение $\varkappa_2 = 0,095$ выбиралось с целью согласования результатов расчетов и экспериментальных данных [10]. В настоящее время известны работы (см., например, [8, 13, 14]), в которых учитывается зависимость коэффициента турбулентной вязкости в (3) от турбулентного числа Рейнольдса. Однако в настоящей работе рассматриваются лишь простейшие соотношения (3), (4).

Как отмечено во введении, близкую к изотропной турбулентность можно создать в лабораторных условиях, помещая в рабочей части аэродинамической трубы или гидроканала турбулизующую решетку. Результаты измерений корреляционных функций в потоке за турбулизующими решетками можно использовать для сопоставления с результатами расчетов. При этом уравнения (1), (2) целесообразно записать в безразмерном виде

$$\frac{\partial \tilde{B}_{LL}}{\partial \tilde{t}} = \frac{2}{\tilde{r}^4} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^4 \left(\tilde{K}_1 + \frac{1}{\text{Re}_M} \right) \frac{\partial \tilde{B}_{LL}}{\partial \tilde{r}}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_{\theta\theta}}{\partial \tilde{t}} = \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2 \left(\tilde{K}_2 + \frac{1}{\text{Pe}_M} \right) \frac{\partial \tilde{B}_{\theta\theta}}{\partial \tilde{r}}. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{B}_{LL} = B_{LL}/U_\infty^2$; $\tilde{t} = x/M$; $\tilde{r} = r/M$; $\tilde{K}_1 = K_1/(MU_\infty)$; $\text{Re}_M = U_\infty M/\nu$; $\tilde{B}_{\theta\theta} = B_{\theta\theta}/\Theta^2$; $\tilde{K}_2 = K_2/(MU_\infty)$; $\text{Pe}_M = U_\infty M/\chi = \text{Re}_M \text{Pr}$; x — расстояние от решетки; U_∞ , Θ — скорость и температура потока в рабочей части трубы или канала; M — размер ячейки турбулизующей решетки; Re_M , Pe_M — числа Рейнольдса и Пекле; $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля.

Систему уравнений (5), (6) дополним граничными условиями

$$\tilde{r} = 0: \quad \frac{\partial \tilde{B}_{LL}}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial \tilde{B}_{\theta\theta}}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad \tilde{r} \rightarrow \infty: \quad \tilde{B}_{LL} \rightarrow 0, \quad \tilde{B}_{\theta\theta} \rightarrow 0 \quad (7)$$

и начальными условиями

$$\tilde{B}_{LL}(\tilde{r}, \tilde{t}_0) = \varphi_1(\tilde{r}), \quad \tilde{B}_{\theta\theta}(\tilde{r}, \tilde{t}_0) = \varphi_2(\tilde{r}). \quad (8)$$

В соответствии с физическим смыслом задачи функции $\varphi_1(\tilde{r})$, $\varphi_2(\tilde{r})$ должны быть непрерывными, ограниченными, иметь максимум при $\tilde{r} = 0$ и стремиться к нулю при $\tilde{r} \rightarrow \infty$.

В предположении достаточно быстрого убывания функций $\varphi_1(\tilde{r})$, $\varphi_2(\tilde{r})$ и решения \tilde{B}_{LL} , $\tilde{B}_{\theta\theta}$ задачи (5)–(8) при $\tilde{r} \rightarrow \infty$ следствием уравнений (5), (6) являются известные инварианты Лойцянского и Корсина [1]

$$\int_0^\infty \tilde{B}_{LL} \tilde{r}^4 d\tilde{r} = \tilde{\Lambda}(\tilde{t}) = \text{const} = \tilde{\Lambda}(\tilde{t}_0), \quad \int_0^\infty \tilde{B}_{\theta\theta} \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \tilde{K}(\tilde{t}) = \text{const} = \tilde{K}(\tilde{t}_0).$$

Ниже знак “ \sim ” опущен.

2. Алгоритм расчета. Для численного решения задачи (5)–(8) использовались неявные консервативные разностные схемы, основанные на интегроинтерполяционном методе [15] (см. также [6]):

$$\frac{(B_{LL})_i^{n+1,s+1} - (B_{LL})_i^n}{\tau_n} = \frac{2}{r_i^4 \bar{h}_{i-1}} \left(P_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{(B_{LL})_{i+1}^{n+1,s+1} - (B_{LL})_i^{n+1,s+1}}{h_i} - P_{i-1/2}^{n+1,s} \frac{(B_{LL})_i^{n+1,s+1} - (B_{LL})_{i-1}^{n+1,s+1}}{h_{i-1}} \right); \quad (9)$$

$$\frac{(B_{\theta\theta})_i^{n+1} - (B_{\theta\theta})_i^n}{\tau_n} = \frac{2}{r_i^2 \bar{h}_{i-1}} \left(H_{i+1/2}^{n+1} \frac{(B_{\theta\theta})_{i+1}^{n+1} - (B_{\theta\theta})_i^{n+1}}{h_i} - H_{i-1/2}^{n+1} \frac{(B_{\theta\theta})_i^{n+1} - (B_{\theta\theta})_{i-1}^{n+1}}{h_{i-1}} \right). \quad (10)$$

Здесь $P = r^4(1/\text{Re}_M + K_1)$; $H = r^2(1/\text{Re}_M + K_2)$; n — номер временного слоя; τ_n , h_i ($n = 0, 1, \dots, N$; $i = 0, 1, \dots, I$) — шаги разностной сетки по временной и пространственной переменным соответственно; $\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$; $r_i = r_{i-1} + h_i$; s — номер итерации по нелинейности; $P_i^{n+1} = P(r_i, t_{n+1})$; $H_i^{n+1} = H(r_i, t_{n+1})$; $P_{i\pm 1/2} = 0,5(P_i + P_{i\pm 1})$; $H_{i\pm 1/2} = 0,5(H_i + H_{i\pm 1})$; $t_{n+1} = t_n + \tau_n$.

В соответствии с граничными и начальными условиями (7), (8) при решении конечно-разностной задачи ставились следующие начально-краевые условия:

$$(B_{LL})_i^0 = \varphi_1(r_i), \quad (B_{\theta\theta})_i^0 = \varphi_2(r_i); \quad (11)$$

$$(B_{LL})_0^{n+1,s+1} = (B_{LL})_1^{n+1,s+1}, \quad (B_{\theta\theta})_0^{n+1} = (B_{\theta\theta})_1^{n+1}, \quad (B_{LL})_I^{n+1,s+1} = (B_{\theta\theta})_I^{n+1} = 0. \quad (12)$$

Значение r_I выбиралось достаточно большим. При проведении итераций по нелинейности принималось, что $(B_{LL})_i^{n+1,0} \equiv (B_{LL})_i^n$. Итерации по нелинейности проводились до тех пор, пока не выполнялось условие $\max_i |(B_{LL})_i^{n+1,s+1} - (B_{LL})_i^{n+1,s}| \leq \delta \max_i (B_{LL})_i^{n+1,s}$, где значение $\delta > 0$ выбиралось в диапазоне $\delta = 10^{-5} \div 10^{-4}$ (дальнейшее уменьшение δ не приводило к существенному изменению решения). Для достижения такой точности достаточно выполнения 3–5 итераций по нелинейности (см. (9)) на каждом временном слое. Параметры τ_n , h_i , I , δ выбирались в ходе численных экспериментов.

Численная модель тестировалась на задаче о вырождении турбулентности за ненагретой решеткой [2]. При $t_0 = 40$ в качестве начальных условий задавались экспериментальные данные. Рассчитанные и экспериментальные зависимости величины $B_{LL}(0, t)$ от расстояния от решетки представлены на рис. 1. Вычисленная нормированная корреляционная функция $f(r) = B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t)$ для $t = 200$ сопоставляется с измеренной (рис. 2). Видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными (ранее детальное сопоставление выполнено в [2, 4]).

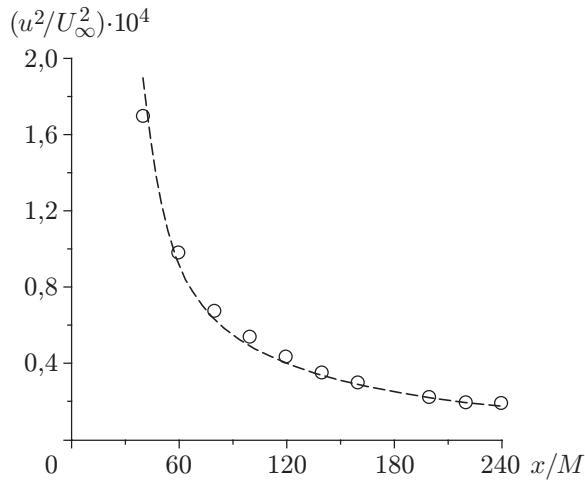


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость величины $u^2 = B_{LL}(0, t)$ от расстояния от решетки: точки — экспериментальные данные; линия — результаты расчета

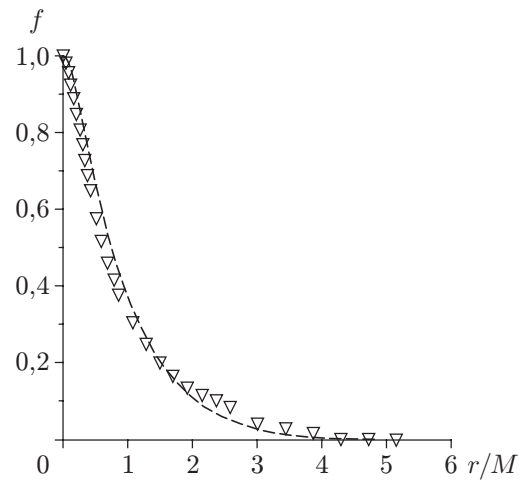


Рис. 2

Рис. 2. Рассчитанная и экспериментальная нормированные корреляционные функции $f(r) = B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t)$ при $t = x/M = 200$: точки — экспериментальные данные; линия — результаты расчета

Расчеты проводились на сетке $\tau_n = 0,1$, $h_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $h_i = 1,1h_{i-1}$ ($i = 1, \dots, 91$), $h_i = 0,15$ ($i = 92, \dots, 350$). Для контроля точности вычислений проведен расчет с параметрами $\tau = \tau_n/2$, $h_{10} = h_0/2$, $h_{1i} = 1,1h_{1i-1}$ ($i = 1, \dots, 84$), $h_{1i} = 0,075$ ($i = 85, \dots, 600$). Различие полученных решений не превышало 0,8 % в равномерной сеточной норме.

3. Результаты расчетов. В экспериментах [10] в аэродинамической трубе выполнены достаточно подробные измерения характеристик турбулентности за нагретой решеткой при $Re_M = 7200$, $Re_M = 5184$. Для сопоставления результатов расчетов, полученных с использованием приведенной выше математической модели, выполнено численное решение системы разностных уравнений (9), (10) с начальными и краевыми условиями (11), (12). При $t = x/M = 17$ в качестве начальных условий задавались корреляционные функции B_{LL}/U_∞^2 , $B_{\theta\theta}/\Theta^2$, полученные в [10]. Изменение величин $u/U_\infty = \sqrt{B_{LL}(0, t)}/U_\infty$ и $\theta = \sqrt{B_{\theta\theta}(0, t)}/\Theta$ с увеличением $t = x/M$ показано на рис. 3. Видно, что результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными. При $\varkappa_2 = 0,125$ (что соответствует значению $C_\theta = 5,8$ [1]) наблюдается большее отклонение результатов расчетов от экспериментальных данных.

Как известно, турбулентное течение за нагретой решеткой характеризуется двумя микромасштабами: λ_f и λ_θ [1, 10]. Для отыскания каждого из них могут быть использованы два способа. По определению микромасштабы Тейлора λ_{1f} и Корсина $\lambda_{1\theta}$ находятся из соотношений [1, 10]

$$\frac{1}{\lambda_{1f}^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=0}, \quad \frac{1}{\lambda_{1\theta}^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=0}, \quad m(r) = \frac{B_{\theta\theta}(r, t)}{B_{\theta\theta}(0, t)}. \quad (13)$$

В [10] используются также соотношения

$$\frac{du^2}{dt} = -20 \frac{1}{Re_M} \frac{u^2}{\lambda_{2f}^2}, \quad \frac{d\theta^2}{dt} = -12 \frac{1}{Re_M} \frac{\theta^2}{\lambda_{2\theta}^2}, \quad (14)$$

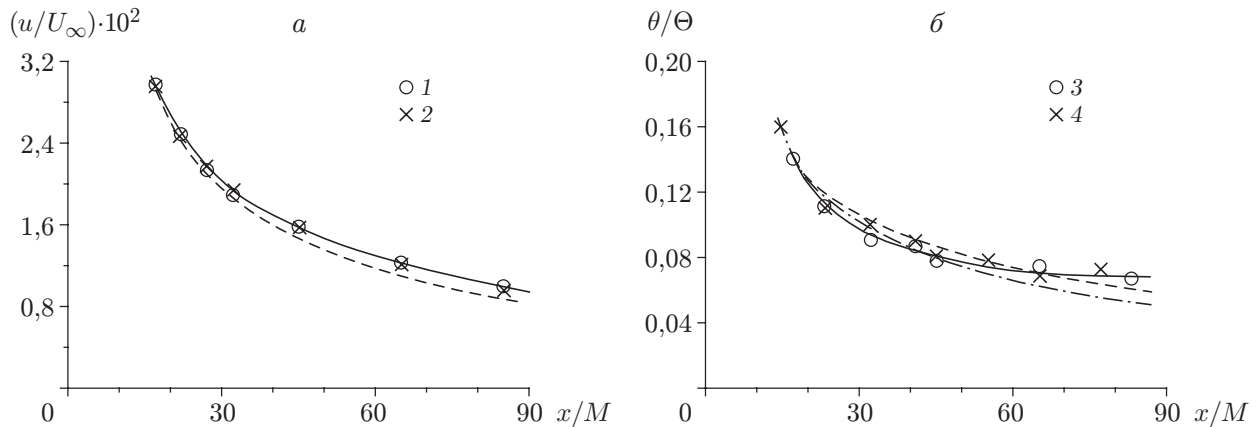


Рис. 3. Зависимости величин u/U_∞ (а) и θ/Θ (б) от величины x/M :
 1–4 — экспериментальные данные [10] (1 — за нагретой решеткой, 2 — за холодной решеткой; 3, 4 — разные эксперименты); сплошные линии — результаты обработки в [10] экспериментальных данных; штриховые — результаты расчетов при $\varkappa_2 = 0,095$; штрихпунктирная — результаты расчетов при $\varkappa_2 = 0,125$

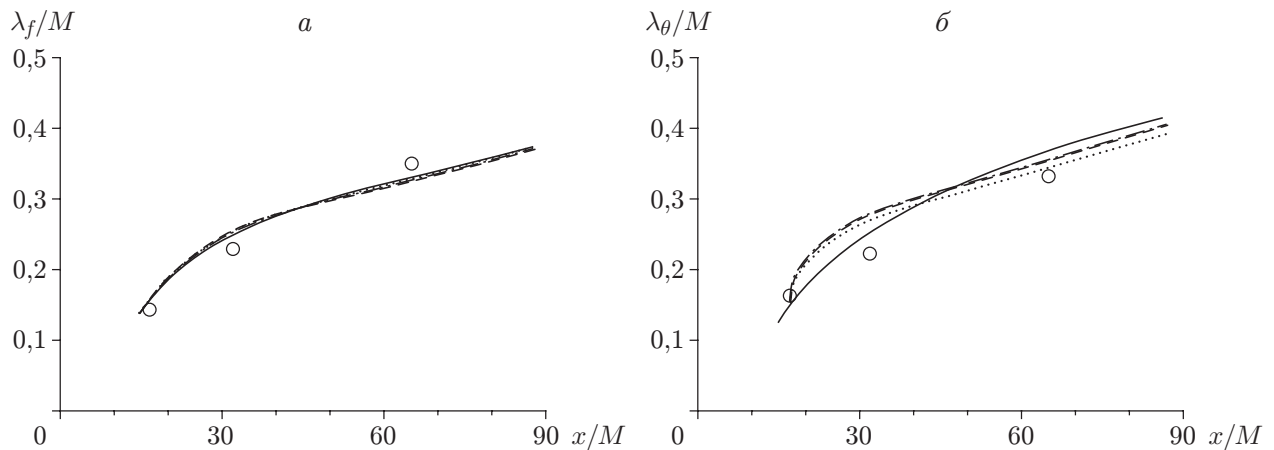


Рис. 4. Микромасштабы Тейлора λ_f (а) и Корсина λ_θ (б):
 точки — экспериментальные значения, полученные в [10] (а — λ_{1f} ; б — $\lambda_{1\theta}$); сплошные линии — результаты обработки в [10] экспериментальных данных (а — λ_{2f} ; б — $\lambda_{2\theta}$); штриховые, пунктирные, штрихпунктирные линии — результаты расчетов, выполненных в настоящей работе (а — λ_{1f} , λ_{2f} , λ_{3f} соответственно; б — $\lambda_{1\theta}$, $\lambda_{2\theta}$, $\lambda_{3\theta}$ соответственно)

являющиеся следствием разложения в ряд Тейлора всех членов уравнений (1), (2). Согласно терминологии, принятой в [1], эти соотношения представляют собой нулевые члены разложения при $r = 0$. В [10] соотношения (13), (14) используются как независимые. Следует ожидать, что значения λ_{1f} и λ_{2f} будут близки. Эти значения совпадут лишь для параболических (при малых r) корреляционных функций $f(r) = 1 - r^2/\lambda_f^2$. Результаты измерений [10] достаточно близки. Результаты численного моделирования практически совпадают (рис. 4,а). Аналогичная ситуация наблюдается для экспериментально полученных значений $\lambda_{1\theta}$, $\lambda_{2\theta}$. Рассчитанные значения $\lambda_{1\theta}$ и $\lambda_{2\theta}$ различаются незначительно (рис. 4,б).

Следует отметить, что равенства $\lambda_{1f} = \lambda_{2f}$, $\lambda_{1\theta} = \lambda_{2\theta}$ в рассматриваемой в настоящей работе постановке (9)–(12) не следуют из численной модели. Рассчитанные значения микромасштабов представляют собой результат обработки данных численного эксперимента

(в [10] — данных лабораторного эксперимента). В настоящей работе рассмотрена также модификация численной модели, в которой при $r = 0$ вместо условия Неймана для корреляционных функций ставились краевые условия (тем самым в модель вводилось равенство микромасштабов, определяемых из соотношений (13), (14)):

$$\left(\frac{\partial B_{LL}}{\partial t}\right)\Big|_{r=0} = \frac{10}{\text{Re}_M} \left(\frac{\partial^2 B_{LL}}{\partial r^2}\right)\Big|_{r=0}, \quad \left(\frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial t}\right)\Big|_{r=0} = \frac{6}{\text{Re}_M} \left(\frac{\partial^2 B_{\theta\theta}}{\partial r^2}\right)\Big|_{r=0}. \quad (15)$$

Найденные при этом значения λ_{3f} , $\lambda_{3\theta}$ близки к значениям λ_{1f} , λ_{2f} , $\lambda_{1\theta}$, $\lambda_{2\theta}$ (рис. 4). Влияние краевых условий (15) на рассчитываемые значения $B_{LL}(r, t)$, $B_{\theta\theta}(r, t)$ оказалось несущественным. Сеточные значения корреляционных функций различались не более чем на 1 % в равномерной сеточной норме для всего рассмотренного интервала значений t .

По найденным в численных экспериментах значениям $u = \sqrt{B_{LL}(0, t)}$, λ_f , λ_θ вычислялись значения турбулентных чисел Рейнольдса и Пекле $\text{Re}_\lambda = u\lambda_f/\nu$, $\text{Pe}_\lambda = u\lambda_\theta/\chi$. Установлено, что при $t = x/M = 20 \div 65$ значения турбулентных чисел Рейнольдса и Пекле убывают и находятся в интервалах $\text{Re}_\lambda = 26,1 \div 35,6$, $\text{Pe}_\lambda = 20,3 \div 28,8$. Эти данные согласуются с экспериментальными данными [10], что свидетельствует о слабом варьировании турбулентных чисел Рейнольдса и Пекле на начальном этапе вырождения турбулентности за решеткой. Ранее на факт медленного изменения Re_λ указывалось в [3, 4, 6]. Выше при формулировании замыкающих соотношений (3), (4) отмечалось, что эмпирическая постоянная \varkappa_1 вычисляется через универсальную колмогоровскую постоянную C_u , соответствующую представлению структурной функции D_{LL} в инерционном (инерционно-конвективном) интервале масштабов. Проведенные численные эксперименты (см. также [2–6]) показали, что величина \varkappa_1 является достаточно универсальной. Что касается эмпирической постоянной \varkappa_2 , то, как отмечалось выше, значение $\varkappa_2 = 0,095$ выбрано с учетом требования соответствия результатов расчетов и экспериментальных данных [10]. Выбор $\varkappa_2 = \text{const}$ для численного моделирования динамики турбулентных флуктуаций температуры на начальном этапе моделирования вырождения турбулентности за нагретой решеткой в аэродинамической трубе обусловлен малыми изменениями Re_λ (Pe_λ) на рассматриваемом интервале расстояний.

На рис. 5, *a* представлены рассчитанные и экспериментальные нормированные корреляционные функции $f(r)$. Согласие полученных данных можно считать удовлетвори-

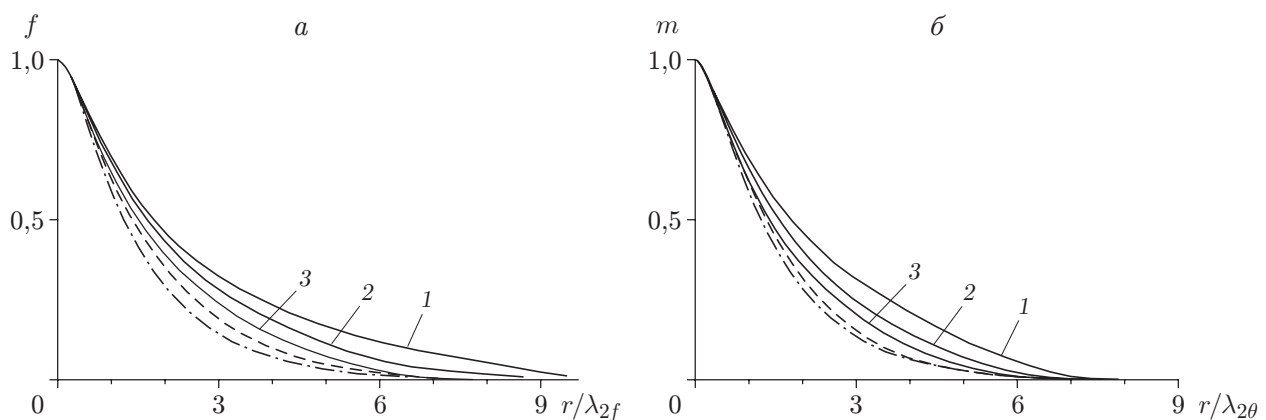


Рис. 5. Рассчитанные и экспериментальные нормированные корреляционные функции:

a — $f(r) = B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t)$; *б* — $m(r) = B_{\theta\theta}(r, t)/B_{\theta\theta}(0, t)$; сплошные линии — экспериментальные данные (1 — $x/M = 17$; 2 — $x/M = 32$; 3 — $x/M = 65$); штриховые — результаты расчетов при $t = x/M = 32$; штрихпунктирные — результаты расчетов при $t = x/M = 65$

тельным (другие примеры, в которых результаты расчетов и экспериментальные данные хорошо согласуются, приведены в [2–6] и на рис. 2).

На рис. 5, б представлены результаты расчетов нормированных корреляционных функций $m(r)$. Видно, что рассчитанные и измеренные функции удовлетворительно согласуются. Результаты расчетов, выполненных при $\varkappa_2 = 0,125$ (на рис. 5 не приведены), лучше согласуются с экспериментальными данными. Однако при этом наблюдаются значительные различия рассчитанных и измеренных значений θ (см. рис. 3, б).

В ходе численных экспериментов анализировалось также изменение величин $\Lambda(t) = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r, t) dr$ (инвариант Лойцянского) и $K(t) = \int_0^\infty r^2 B_{\theta\theta}(r, t) dr$ (инвариант Корсина). В численном решении значения указанных величин оставались постоянными: $L(t) = 5,235 \cdot 10^{-5}$, $K(t) = 1,247 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, результаты вычислений не противоречат гипотезе о существовании конечных отличных от нуля инвариантов Лойцянского и Корсина [1]. Ранее вопрос об инварианте Лойцянского детально обсуждался в [3, 4].

Заключение. Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена основанная на замкнутых уравнениях Кармана — Ховарта и Корсина численная модель динамики турбулентности и флуктуаций температуры за нагретой решеткой в аэродинамической трубе. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [10].

Авторы выражают благодарность В. А. Костомахе за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монин А. С.** Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. СПб.: Гидрометеоиздат, 1996. Т. 2.
2. **Костомаха В. А.** Структура изотропной и локально-изотропной турбулентности: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1986.
3. **Климентенок У. А., Коробицына Ж. Л., Черных Г. Г.** О численной реализации асимптотического решения Лойцянского — Миллионщикова // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 1. С. 69–80.
4. **Chernykh G. G., Korobitsina Z. L., Kostomakha V. A.** Numerical simulation of isotropic turbulence dynamics // Intern. J. Comput. Fluid Dynamics. 1998. V. 10, N 2. P. 173–182.
5. **Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Об одном способе замыкания уравнения Кармана — Ховарта // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 27. С. 124–130.
6. **Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.** Расчеты корреляционных функций в изотропной турбулентности // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1978. Вып. 35. С. 74–88.
7. **Oberlack M., Peters N.** Closure of the two-point correlation equation as a basis for Reynolds stress models // Appl. Sci. Res. 1993. V. 51. P. 533–538.
8. **Онуфриев А. Т.** Описание турбулентного переноса. Неравновесные модели: Учеб. пособие. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 1995.
9. **Domaradzki J. A., Mellor G. L.** A simple turbulence closure hypothesis for the triple-velocity correlations functions in homogeneous isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 45–61.

10. **Mills R. R., Kistler A. L., O'Brien V., Corrsin S.** Turbulence and temperature fluctuations behind a heated grid: Tech. note / NASA; N 4288. Washington, 1958.
11. **Warhaft Z.** Passive scalars in turbulent flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 203–240.
12. **Antonia R. A., Smalley R. J., Zhou T., et al.** Similarity solution of temperature structure functions in decaying homogeneous isotropic turbulence // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 016305-1–016305-11.
13. **Онуфриев А. Т., Пыркова О. А.** Задача о затухании слабой турбулентности в однородном потоке. Долгопрудный, 2005. (Препр. / Моск. физ.-техн. ин-т; № 2005-1).
14. **Antonia R. A., Zhou T., Xu G.** Second-order temperature and velocity structure functions: Reynolds number dependence // Phys. Fluids. 2000. V. 12, N 6. P. 1509–1517.
15. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

*Поступила в редакцию 20/XII 2007 г.,
в окончательном варианте — 14/II 2008 г.*
