

УДК 533.69.011.34

МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ КРЫЛЬЕВЫХ ПРОФИЛЕЙ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

С.М. АУЛЬЧЕНКО, А.Ф. ЛАТЫПОВ, Ю.В. НИКУЛИЧЕВ

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
Новосибирск*

Статья посвящена обзору исследований, проведенных в ИТПМ СО РАН по решению задач аэродинамического проектирования крыльевых профилей и их оптимизации. Описан ряд предложенных, реализованных и апробированных авторами подходов к решению как отдельных аспектов проблемы, так и задачи в целом.

ВВЕДЕНИЕ

С развитием авиационной техники значительное внимание уделяется совершенствованию летательных аппаратов. Одним из путей, предпринимаемых в этом направлении, является проектирование крыльевых профилей, обладающих требуемыми свойствами при заданных ограничениях. Построение оптимального решения (рассматриваются плоские течения) требует комплексного применения численных и аналитических методов механики и вычислительной математики. Уровень сложности этих оптимизационных задач, связанный с необходимостью многократно решать краевую задачу для системы квазилинейных уравнений в частных производных при минимизации (максимизации) целевой функции, а также некорректность упрощенных постановок для большинства практически важных задач не позволяют считать существовавшие методы их решения, как аналитические, так и методы численного моделирования и вычислительной техники, вполне исчерпывающими. Наряду с несомненными достижениями в области задач аэродинамического проектирования в каждом из подходов к их решению можно отметить определенные ограничения. Так, классические вариационные методы не применяются для течений с циркуляцией и ограничениями, носящими локальный характер. Для методов, решающих обратную задачу, необходимо знание качественной структуры течения. Конечно-разностные методы предъявляют довольно жесткие требования к структуре расчетной сетки, связанной в свою очередь с геометрией обтекаемого тела, что усложняет решение при вариации контура. При этом математическое представление геометрии тела должно исключать возможность “паразитных осцилляций” при варьировании определяющих параметров, приводящих к некорректности оптимизационной задачи. И конечно, успех в решении собственно оптимизационной задачи зависит от эффективной программы минимизации функции многих переменных при наличии функциональных ограничений в виде равенств и неравенств.

ПРОЕКЦИОННО-ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД

С помощью численного метода решения оптимизационных задач с ограничением в виде уравнения в частных производных был решен ряд задач по построению крыльевых профилей, реализующих максимальное критическое число Маха при заданных геометрических и аэродинамических ограничениях [1 – 4]. Суть предложенного метода заключается в объединении численной оптимизации с одним из вариантов проекционного метода решения уравнения для функции тока, основанного на аппроксимации решения, содержащей свободные параметры. Главной особенностью построения минимизирующей последовательности данным методом является то, что при минимизации объединенного функционала, состоящего из невязки уравнения течения и функционала оптимизационной задачи, требуемая точность решения уравнения достигается лишь на оптимальном решении, что позволяет сократить время решения задачи на ЭВМ. Кроме того, необходимо отметить возможность компактного хранения решения различных задач обтекания в виде одномерных массивов, содержащих оптимальные значения свободных параметров аппроксимации решения.

Постановка задачи оптимизации

На множестве функций $u(x, \bar{p}) \in U_p$, зависящих от m параметров, определяющих функцию $\varphi(x, y; u)$ как решение дифференциального уравнения

$$A\varphi = f(x, y)$$

в области Ω при следующих краевых условиях

$$\varphi(x, y_0) = u(x, \bar{p}), \quad x_0 \leq x \leq x_k, \quad B\varphi = a\varphi + b \partial\varphi/\partial n = \tau(x, y),$$

необходимо определить последовательность $\{u(x, \bar{p})\}$, доставляющую минимум функционалу $J = F_0(\varphi(x, y; u))$. Замена краевой задачи на задачу конечномерной минимизации функционала производится по формулам:

$$\Phi_\alpha[\varphi_N] = \|A\varphi - f\|_{E^N}^2 + \|B\varphi - \varphi_{c\Omega}\|_{E^M}^2 + \alpha \|L\varphi_N\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\varphi_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \delta_{ij} \varphi_{ij}(x, y), \quad N = (N_x + 1)(N_y + 1),$$

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sum_{s=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{sl}^{ij} (x - x_{i-1})^s (y - y_{j-1})^l, \quad M = N_x + N_y,$$

где L – регуляризирующий функционал. С учетом всех соотношений, а именно: условий коллокации в узлах сетки, граничных условий в узлах границы и $\varphi_N \in C^2$, остается $M + 4$ свободных параметра аппроксимации, на множестве которых минимизируется $\Phi_\alpha[\varphi_N]$. Решение оптимизационной задачи находится минимизацией объединенного функционала

$$H[\varphi_N(x, y; u)] = F_0[\varphi_N(x, y; u)] + \gamma \Phi_\alpha[\varphi_N(x, y; u)].$$

Метод был тестирован на решении прямой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате с граничными условиями, позволяющими выписать

аналитическое решение, и на решении обратной (оптимизационной) задачи по восстановлению параметров граничной функции по заданной таблице решения.

В практических задачах проектирования и оптимизации важным является выбор целевого функционала. По нашему мнению, он не должен носить локальный характер, что может приводить к неустойчивости оптимальных решений независимо от способа его получения. Выбор конкретной интегральной формы целевого функционала для построения крыльевых профилей, реализующих максимальное критическое число Маха, основан на теореме сравнения, позволяющей свести задачу к построению контура, определяющего максимум им ограниченной площади при дозвуковом течении в открытой области.

Численное решение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка для функции тока строится в прямоугольной области, полученной из физической области, после перехода к новым переменным, связанным с геометрией обтекаемого тела. На внешней границе реализованы два варианта граничных условий: либо задается нормальная составляющая скорости потока, а касательная вычисляется при решении задачи обтекания, учитывая наличие циркуляции, либо используется асимптотическое решение для скорости на больших расстояниях от тела.

Существенной особенностью алгоритма является простота включения в число варьируемых при минимизации функционала параметров, регулирующих размеры расчетных ячеек. Построение оптимальной сетки позволяет использовать существенно меньшее число ячеек, нежели в случае равномерной сетки при той же точности, что для данного метода означает уменьшение размерности оптимизационной задачи. В этом и во всех последующих методах оптимальная сетка формируется в едином итерационном процессе решения стационарной задачи и основана на прямой численной минимизации функционала погрешности аппроксимации исходной системы уравнений на множестве параметров, задающих расчетную сетку. Вид этого функционала не зависит от используемого численного метода.

Значения физических узлов вычисляются через безразмерные параметры λ_i :

$$x_1 = x_0 + \frac{x_N - x_0}{1 + \sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^i \left(\frac{1}{\lambda_k} - 1\right)}, \quad x_i = x_{i-1} + (x_{i-1} - x_{i-2}) \left(\frac{1}{\lambda_{i-1}} - 1\right),$$

где x_0, x_N — заданные границы отрезка, N — число интервалов на нем. Сами λ_i рассчитываются по формуле

$$\lambda_i = a + (b - a)z + c 4z(1 - z),$$

$$z = i / N, \quad \lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}, \quad 0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < 1,$$

где $0 < a < 1, 0 < b < 1, c \in R$ — параметры, определяющие функцию распределения.

Построение сетки состоит в следующем. На каждом итерационном шаге производится сравнение функционала $F^n = q_1(dP + d\bar{P})$, вычисленного после определения параметров течения на предыдущей сетке, со значением этого же функционала, вычисленном при итерации на проварьированной сетке. Здесь

$dP, d\bar{P}$ — максимальное и среднее погрешностей аппроксимации уравнений в области Ω , вычисляемые по выражениям

$$dP = \max_{i,j} |dP_{ij}|, \quad dP_{ij} = \int_{\omega_{ij}} \left(\mathbf{w} \rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{w} \operatorname{grad} p \right)^2 d\omega,$$

$$d\bar{P} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(\mathbf{w} \rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{w} \operatorname{grad} p \right)^2 d\omega, \quad \Omega = \bigcup_{ij} \omega_{ij},$$

где \mathbf{w} — вектор скорости, p, ρ — давление и плотность потока.

Производится вариация только одного из параметров функции, задающей распределение λ . Каждый раз номер варьируемого параметра является равномерно распределенным случайным числом. В качестве текущей оптимальной сетки выбирается та, для которой значение функционала меньше.

Результаты расчетов

С помощью предложенного метода была построена серия симметричных профилей, реализующих максимальное критическое число Маха M_* для различных чисел Маха набегающего потока (M_∞) в выбранном классе конфигураций, при ограничении на угол схода, призванном исключить ситуации, связанные с возможным отрывом потока в диффузорной части профиля. Выявлены зависимости числа M_* от площади и угла наклона задней кромки. Решен ряд задач по построению контуров несущих профилей, удовлетворяющих заданному ограничению на подъемную силу и реализующих максимум площади, ими ограниченной. Получены зависимости максимальной площади от M_∞ и C_y . Эти результаты представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показано характерное распределение давления на верхней и нижней части контура.

К недостаткам метода можно отнести достаточно высокую чувствительность к выбору начального приближения и наличие локальных минимумов в структуре функционала.

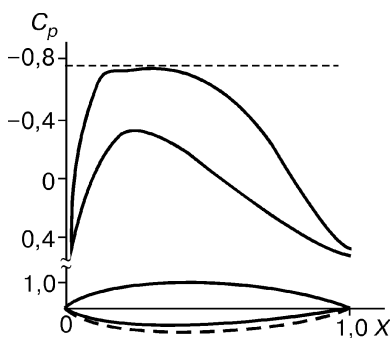


Рис. 1. Распределение коэффициента давления по оптимальному контуру.

Штриховая линия соответствует начальному симметричному профилю.

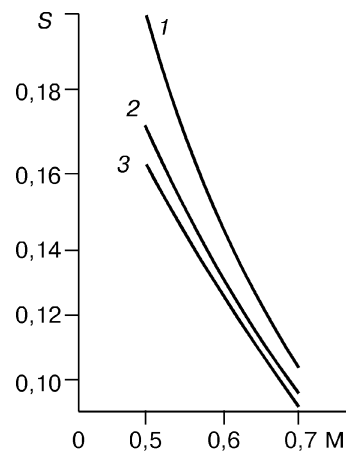


Рис. 2. Зависимость максимальной площади профиля от критического числа Маха и коэффициента подъемной силы.

$C_y = 0$ (1), 0,2 (2), 0,22 (3).

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

С целью преодоления указанных выше недостатков был разработан метод, основанный на описании течения с помощью функционала, экстремалими которого являются уравнения течения идеального газа [5, 6]. Таковым является функционал Бейтмена

$$I = \iint_{\Omega} (p + \rho q^2) d\omega .$$

Дальнейшее построение алгоритма решения задачи обтекания и оптимизационной задачи во многом повторяет предыдущий метод: все газодинамические параметры потока выражаются через одну функцию — функцию тока, которая при численном решении аппроксимируется разложением по конечномерному базису с последующим определением коэффициентов этого разложения при минимизации функционала. Отличие состоит в том, что этот функционал для дозвуковых течений — выпуклый, что делает поиск его экстремума (решения задачи обтекания) не зависящим от начального приближения. Через функцию тока $\psi(x, y)$ его можно записать в следующем виде:

$$I = \iint_{\Omega} P(\psi, \nabla \psi) d\omega ,$$

$$P(\psi, \nabla \psi) = 2\gamma \left[\frac{2}{\gamma - 1} \right]^{1/(\gamma-1)} (p + \rho q^2) ,$$

$$p = f(\psi)^{-1/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 - q^2) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} ,$$

$$\rho = f(\psi)^{-1/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 - q^2) \right]^{1/(\gamma-1)} ,$$

$$(1 - q^2)^{2/(\gamma-1)} q^2 = (\nabla \psi)^2 , \quad \ln f = s / c_v .$$

Здесь p, ρ, q — давление, плотность и модуль скорости, s — удельная энтропия, c_v — удельная теплоемкость.

Для того чтобы уравнения Эйлера — Лагранжа для выбранного функционала совпали с уравнениями плоских изоэнтропических течений для рассматриваемой задачи обтекания, необходимо выполнение следующего соотношения:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial P}{\partial \nabla \psi} \bar{n} \delta \psi dl = 0 ,$$

что справедливо для краевых условий непротекания в задачах обтекания, так как это сводится к условию

$$\int_{\partial\Omega} (-v, u) \bar{n} \delta \psi dl = 0 ,$$

представляющему собой разность циркуляций по внешней и внутренней границе (u, v — компоненты вектора скорости). Вторая вариация функционала имеет вид

$$\delta^2 I = 2\gamma f^{-1/(\gamma-1)} \iint_{\Omega} \Delta \frac{1}{\rho} \delta^2 \psi d\omega.$$

Опуская положительные константы, получим

$$\delta^2 I \approx - \iint_{\Omega} (\nabla \vec{q})^2 \delta^2 \psi d\omega + \int_{\vec{\alpha}\Omega} \nabla \vec{q} \vec{n} \delta^2 \psi dl.$$

Второе слагаемое здесь равно нулю, так как $\nabla \vec{q}$ направлен по касательной к контуру, а в невозмущенном потоке $\vec{q} = \text{const}$, и следовательно, необходимо минимизировать выпуклый функционал.

Решение задачи проектирования осуществляется минимизацией объединенного функционала в конечномерном пространстве весовых коэффициентов базиса для представления решения и параметров, задающих профиль.

Если профиль обтекается под углом атаки α со скоростью \vec{q}_{∞} , то функция тока на внешней границе с учетом асимптотического разложения может быть представлена формулами

$$\psi(x, y) = \rho_{\infty} \left[u_{\infty} y - v_{\infty} x - \frac{k\Gamma}{2\pi} \left(\int_0^y f_1(x, \xi) d\xi + \int_0^x f_2(\eta, y) d\eta \right) \right],$$

$$\int_0^y f_1(x, \xi) d\xi = \frac{1}{C_1} \left[\frac{E_1}{2} \ln(\xi^2 + D_1 \xi + B_1) + \frac{2A_1 - E_1 D_1}{\sqrt{4B_1 - D_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\xi + D_1}{\sqrt{4B_1 - D_1^2}} \right]_0^y,$$

$$\int_0^x f_2(\eta, y) d\eta = \frac{1}{C_2} \left[\frac{E_2}{2} \ln(\eta^2 + D_2 \eta + B_2) + \frac{2A_2 - E_2 D_2}{\sqrt{4B_2 - D_2^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\eta + D_2}{\sqrt{4B_2 - D_2^2}} \right]_0^x,$$

$$A_1 = -x \sin \alpha, \quad A_2 = y \sin \alpha, \quad E_1 = E_2 = \cos \alpha,$$

$$C_1 = \sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha, \quad C_2 = \cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha,$$

$$B_1 = x^2 \frac{C_2}{C_1}, \quad B_2 = y^2 \frac{C_1}{C_2}, \quad D_i = \frac{2A_i E_i M_{\infty}^2}{C_i}, \quad i=1, 2, \quad k^2 = 1 - M_{\infty}^2,$$

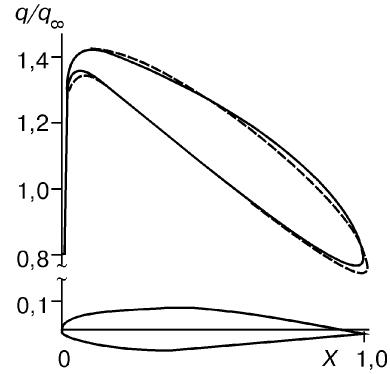
где $u_{\infty}, v_{\infty}, \rho_{\infty}$ — компоненты вектора скорости и плотность невозмущенного потока, Γ — циркуляция.

Результаты расчетов

В качестве исходного был взят профиль с достаточно высоким критическим числом Маха ($M_{\infty} = 0,68$), спроектированный методом построения квази-решения обратной краевой задачи для модели газа Чаплыгина. Профиль и распределение скорости на нем были предоставлены сотрудниками НИИ ма-

Рис. 3. Распределение скорости по профилю, вычисленное по модели газа Чаплыгина (сплошная линия) и модели газовой динамики (штриховая линия).

тематики и механики им. Н.Г. Чеботарева (г. Казань). Угол задней кромки этого и всех рассматриваемых в дальнейшем профилей равен нулю. Предложенным методом проведен расчет обтекания данного профиля в рамках модели уравнений газовой динамики. Распределения скоростей по контуру для разных моделей приведены на рис. 3.



Постановка задачи проектирования содержит геометрические ограничения на профиль:

$$x_k - x_0 = L, \quad L = \text{const}, \quad F(x_0, \vec{p}) = 0, \quad F(x_k, \vec{p}) = 0,$$

$$F_x(x_0, \vec{p}) = \infty, \quad F_x(x_k, \vec{p}) \geq \text{tg} \theta_0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 < 0,$$

и газодинамические на поток:

$$M_\infty = M_\infty^0, \quad C_l \geq C_l^0, \quad M_\Omega \leq 1.$$

Здесь x_0, k_0 — границы хорды профиля, $F(x, \vec{p})$ — функция, задающая его геометрию, \vec{p} — вектор искомых параметров, θ_0 — максимальный угол наклона задней кромки, M_∞ — число Маха набегающего потока, M_Ω — локальное число Маха, C_l — коэффициент подъемной силы. Первая оптимизационная задача состоит в том, чтобы построить профиль $F(x, \vec{p})$, удовлетворяющий этим ограничениям и имеющий максимальную площадь. Вторая отличается от первой тем, что вместо функционала течения был взят функционал, отвечающий модели газа Чаплыгина:

$$I = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, d\omega,$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциал потока.

Условия для функции φ на внешней границе выписываются на основе той же асимптотики для скорости. На контуре вместо $\psi = 0$ имеем $\partial\varphi/\partial n = 0$. На рис. 4, а штриховыми линиями показан модифицированный профиль, являющийся решением первой оптимизационной задачи с $M_\infty^0 = 0,68$, $C_l^0 = 0,4$, и приведено распределение скорости по нему. Приращение площади $\Delta S \approx 6\%$. На рис. 4, б приведено решение второй оптимизационной задачи ($\Delta S \approx 3\%$); штриховые линии — полученный профиль.

Сравнение результатов расчетов с полуаналитическими решениями обратных краевых задач позволяют сделать вывод — с одной стороны — о хорошей точности решения задачи обтекания предложенным методом и верной стратегии решения оптимизационной задачи, с другой — о возможности использования при решении этого круга задач модели газа Чаплыгина как модели дозвукового течения реального газа.

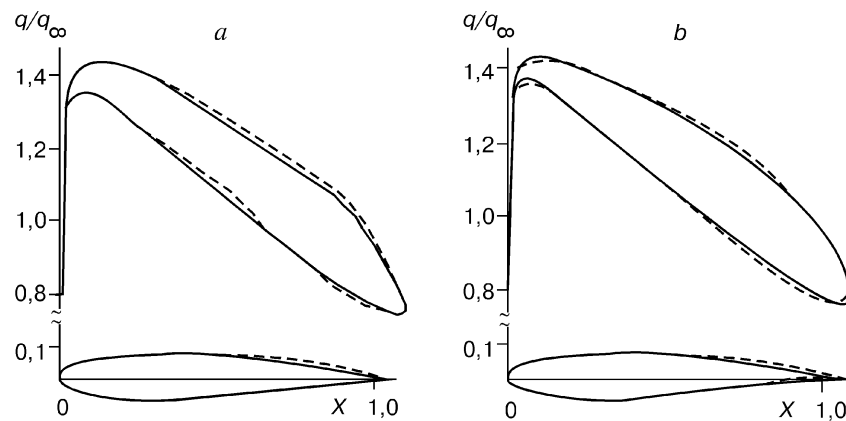


Рис. 4. Распределение скорости по исходному (сплошная линия) и модифицированному (штриховая линия) контурам профиля в рамках модели газовой динамики (а) и модели газа Чаплыгина (б).

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Несмотря на приведенные примеры успешного решения ряда задач по проектированию плоских конфигураций, предложенный подход имеет недостаток, связанный с проблемами минимизации функций многих переменных, число которых растет с повышением требуемой точности решения задач обтекания, в особенности на трансзвуковых режимах течения. Поэтому для численного решения краевых задач аэрогазодинамики был реализован метод граничных элементов решения нелинейного интегрального уравнения, эквивалентного уравнениям газовой динамики [7 – 9]. Этот метод, будучи более сложным на этапе получения расчетных формул, выгодно отличается от конечно-разностных и конечно-элементных методов, так как позволяет понизить размерность исходной задачи на единицу и автоматически удовлетворить крайним условиям на бесконечности. Кроме того, специфика метода граничных элементов дает возможность без увеличения размерности системы алгебраических уравнений, к которой сводится задача, осуществлять измельчение сетки в подобластях, не увязывая его ни с числом граничных элементов на границе, ни с размерами соседних ячеек. Построение локально адаптивной сетки основано на требовании равномерной точности вычисления нелинейной правой части уравнения, что позволило достаточно хорошо выделять области с большими градиентами решения вообще и границы трансзвуковой подобласти в частности. Использовано также не постоянное (применяемое традиционно), а линейное распределение плотности источников на граничных элементах, что дало возможность не только повысить точность расчетов, не увеличивая число этих элементов и размерность обращаемой матрицы, но и получить решение уравнений газовой динамики (давление, скорость и т. д.) в классе непрерывных функций.

Алгоритм

После введения потенциала возмущений дифференциальные уравнения невязкого безвихревого течения газа приобретают следующий вид:

$$\Delta\varphi = M^2 \partial V / \partial s = Q(M, V).$$

Здесь φ — потенциал возмущений, M — число Маха, V — модуль скорости, s — направление по касательной к линии тока. Условие непротекания накладывает на потенциал требование

$$\partial\varphi/\partial n = -\vec{V}_\infty \vec{n},$$

где \vec{n} — нормаль к \bar{s} . Условие Чаплыгина — Жуковского для профиля с нулевым углом задней кромки заключается в требовании равенства тангенциальных скоростей в точках с радиусами-векторами $\vec{\xi}_h$ и $\vec{\xi}_d$ на верхней и нижней поверхностях профиля, для которых выполнено условие

$$|\vec{\xi}_h - \vec{\xi}_e| = |\vec{\xi}_d - \vec{\xi}_e| \approx \varepsilon,$$

где $\vec{\xi}_e$ отвечает концевой точке профиля, $\varepsilon \ll 1$.

Используя теорему Грина, запишем потенциал как

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} \left[\int_C (q + i\omega) f(z - z_C) dl + \int_D Q f(z - z_C) d \right],$$

где D — область, внешняя к контуру C , $f(z) = \ln z/2\pi$, q , ω — плотности распределения источников и завихренности на контуре, Q — плотность источников в области.

Контур C разбивается на N , а область D на K элементов. Считаем, что плотность источников на граничном элементе l_i распределена по линейному закону:

$$q(\eta) = q_{i-1} f_1 + q_i f_2, \quad f_1 = (1-\eta)/2, \quad f_2 = (1+\eta)/2, \quad \eta \in (-1, 1).$$

Тогда для N точек коллокации $\vec{\xi}_i$ на контуре и условия Чаплыгина — Жуковского получим систему алгебраических уравнений размерности $(N+1) \times (N+1)$ для определения q_i , $i = 1, \dots, N$, и ω :

$$\mathbf{Gq} = \mathbf{H}.$$

Элементы матрицы \mathbf{G} с учетом интегрального представления решения имеют вид:

$$G_{ij} = g_{ij+1}^1 + g_{ij}^2, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad G_{iN} = g_{i1}^1 + g_{iN}^2,$$

$$g_{ij}^1 = l_j \int_{-1}^1 f_1(\eta) \left(\frac{\partial \ln r_{ij}}{\partial n_i} d\eta_x - \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} d\eta_y \right), \quad g_{ij}^2 = l_j \int_{-1}^1 f_2(\eta) \left(\frac{\partial \ln r_{ij}}{\partial n_i} d\eta_x - \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} d\eta_y \right),$$

$$G_{iN} = \sum_{j=1}^N l_j \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} d\eta_x + \frac{\partial \ln r_{ij}}{\partial n_i} d\eta_y \right).$$

Вектор правой части

$$H_i = -4\pi \vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i - 2 \sum_{k=1}^K Q_k \iint_{\Delta S_k} \frac{\partial \ln r_{ik}}{\partial n_i} ds.$$

Здесь $r_{ij} = r(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = \sqrt{(\xi_{ix} - \xi_{jx})^2 + (\xi_{iy} - \xi_{jy})^2}$, $\vec{\xi}_i$, $\vec{\xi}_j$ — радиусы-векторы соответствующих точек на контуре, $r_{ik} = r(\vec{\xi}_i, \vec{s}_k)$, \vec{s}_k — радиус-вектор точки в области D , $\theta_{ij} = \theta(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j)$ — угол между векторами $\vec{\xi}_i$, $\vec{\xi}_j$, \vec{n}_i — нормаль к кон-

туру в точке $\vec{\xi}_i, \vec{\tau}_h, \vec{\tau}_d$ — касательные к контуру векторы в точках $\vec{\xi}_h, \vec{\xi}_d$. Полученная система решается методом простой итерации по нелинейности в правой части. Начальное значение плотности источников Q_k в области полагается равным нулю, что соответствует течению несжимаемой жидкости.

Если в алгоритмах, описанных выше, условие безотрывности потока формулировалось в виде ограничения на угол наклона контура в задней кромке, то в пакет программ оптимизации крыльевых профилей, созданный на базе программы расчета внешнего обтекания методом граничных элементов, введен модуль расчета характеристик пограничного слоя, входящих в критерий безотрывности Кочина — Лойцянского и в формулу для сопротивления Сквайра — Юнга. Это позволило, с одной стороны, более точно учесть влияние вязкости, с другой — избежать многократного решения уравнений пограничного слоя в условиях возможного отрыва потока при вариациях контура.

Тестовые расчеты

В качестве тестовой была выбрана классическая задача о максимуме подъемной силы гладкого контура, обтекаемого идеальной несжимаемой жидкостью. Точное решение — окружность. Максимальный коэффициент подъемной силы — 4π , а передняя и задняя критические точки совпадают. Для численного решения этой задачи в геометрии контура зафиксирован угол задней кромки, равный π , а в алгоритме исключены итерации по нелинейности и введен свободный параметр, задающий точку схода потока. Угол атаки равен нулю. В качестве исходного взят выпуклый симметричный контур, а точка схода имела координаты (1, 0). В результате оптимизации получен контур, отличие которого от окружности в норме C не превышает 10^{-2} ; отличие координат обеих критических точек от точного значения (0,5; -0,5) не превышало $5 \cdot 10^{-3}$, при этом $C_l = 12,50$.

Постановка задач оптимизации

Необходимо спроектировать крыльевой профиль, удовлетворяющий аэродинамическим ограничениям:

$$M_\Omega < 1, \quad C_l > C_l^0, \quad f(s) > f_0, \quad \alpha_0 < \alpha < \alpha_1,$$

геометрическим ограничениям

$$d_C < d_1, \quad S_0 < S_C, \quad b_C = \text{const}, \quad F(x, \vec{p}) \in C^1(0, b_C)$$

и доставляющий максимум аэродинамического качества K_a при фиксированном числе Маха набегающего потока M_∞ . Здесь $f(s)$ — формпараметр, s — длина дуги вдоль контура профиля C , f_0 — эмпирическая константа, связанная с выбранным критерием безотрывности, d_C, S_C, b_C — максимальная толщина, площадь, длина хорды профиля, M_Ω — локальное число Маха в расчетной области, α — угол атаки.

Результаты расчетов

На рис. 5, а представлен результат проектирования рассматриваемого профиля при следующих значениях в ограничениях:

$$M_\infty = 0,5, \quad C_l^0 = 0, \quad f_0 = -2,5, \quad \alpha_0 = -5^0, \quad \alpha_1 = 20^0, \quad d_C = 12\%, \quad S_0 = 0,06, \quad b_C = 1.$$

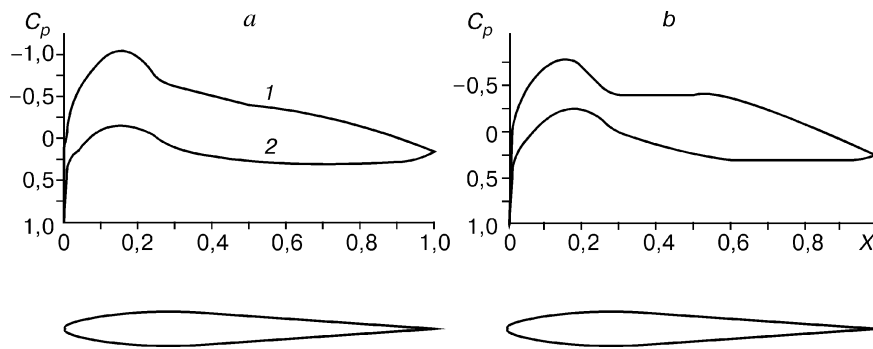


Рис. 5. Профиль с максимальным аэродинамическим качеством для $M_\infty = 0,5$ (a) и $0,7$ (b).
1, 2 — распределение C_p соответственно по верхнему и нижнему контуру.

Получено максимальное качество $K_a = 82,1$. В качестве начального контура был взят произвольный симметричный контур (удовлетворяющий геометрическим ограничениям) под нулевым углом атаки.

Результат проектирования профиля с максимальным качеством при прежних ограничениях для $M_\infty = 0,7$ показан на рис. 5, b. В качестве начального выбран оптимальный профиль из предыдущей задачи. В распределении коэффициента давления на верхнем контуре наблюдается выход на критическое значение $C_p^* = -0,78$. Сам профиль имеет характерную для околозвуковых профилей отрицательную кривизну $-0,372\%$; $K_a = 62,2$.

Анализируя полученные результаты, можно отметить следующее. Одновременный учет ограничений на минимальную площадь профиля и его максимальную толщину в сочетании с условием безотрывности приводит к симметризации спроектированных профилей, а включение угла атаки в число параметров оптимизации — к консервативности формы профиля.

Проведены исследования по проектированию трансзвуковых профилей, обладающих малым волновым сопротивлением при заданных геометрических и аэродинамических ограничениях, и решена задача преобразования произвольного трансзвукового профиля, обтекаемого со скачком в профиль с гладким трансзвуковым течением путем его малых изменений.

В качестве исходного был взят контур, спроектированный при самых общих ограничениях на минимальную площадь, максимальную толщину, безотрывность обтекания в рамках интегральных характеристик пограничного слоя и удовлетворяющий условию $0,9 \leq C_l \leq 1$ для числа Маха набегающего потока $M_\infty = 0,7$. Затем при ограничении диапазона изменений параметров, задающих контур 10 %-м интервалом, проведены его модификация при тех же условиях и максимизации аэродинамического качества (рис. 6). Коэффициент подъемной силы, полное сопротивление и аэродинамическое качество исходного и модифицированного профилей соответственно равны:

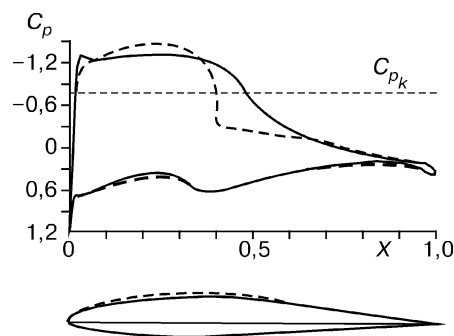


Рис. 6. Модификация трансзвукового профиля со скачком в профиль с малым волновым сопротивлением.

Штриховые линии — распределение C_p по исходному контуру.

$$C_l = 0,95, \quad C_d = 0,0180, \quad K_\alpha = 52,5,$$

$$C_l = 0,98, \quad C_d = 0,0079, \quad K_\alpha = 124,0.$$

В отличие от предыдущих постановок задач именно оптимизации рассмотренная ниже задача носит характер проектирования профиля под конкретные заданные ограничения на его интегральные аэродинамические характеристики.

Среди перспективных летательных аппаратов немаловажное место занимают аппараты типа “летающее крыло” с использованием толстых профилей (до 30%). По условиям функционирования таких аппаратов используемые профили должны обладать высокими значениями коэффициента подъемной силы как на крейсерском ($C_l \approx 0,8-1,0$), так и на максимально возможном при безотрывном обтекании ($C_{l,\max} \approx 1,2-1,5$) режиме полета. Поэтому были сформулированы аэродинамические

$\alpha = 0, \quad M_\infty = 0,3, \quad M_\Omega < 1,0, \quad C_{l,\max} \geq 1,2, \quad C_d \leq 0,01$ при $C_l = 0,8, \quad Re = 1 \times 10^6$ и геометрические

$$d_{\max} = 0,25 \text{ и } 10^0 \leq \beta \leq 20^0$$

ограничения. Здесь $C_{l,\max}$ — максимальный коэффициент подъемной силы, C_d и C_l — коэффициенты сопротивления и подъемной силы на крейсерском режиме полета, Re — число Рейнольдса, d_{\max} — максимальная толщина профиля, β — угол его задней кромки. При проектировании второго варианта профиля было использовано дополнительное ограничение снизу на положение максимума скорости на верхней части контура. Коэффициент максимальной подъемной силы определялся для каждой конфигурации в процессе проектирования для углов атаки, начиная с максимального (он был принят равным 20^0) с последовательным его уменьшением до выполнения критерия безотрывности. Задаваемое максимальное значение коэффициента подъемной силы призвано обеспечивать запас по срыву потока в режиме крейсерского полета. В качестве целевого функционала был выбран максимум площади, охватываемой контуром профиля, а все остальные ограничения учитывались с использованием метода штрафных функций.

На рис. 7 представлены результаты решения сформулированных выше задач. Показаны полученные контуры профилей и распределения коэффициента давления на крейсерском режиме полета. Их интегральные аэродинамические и геометрические характеристики соответственно равны:

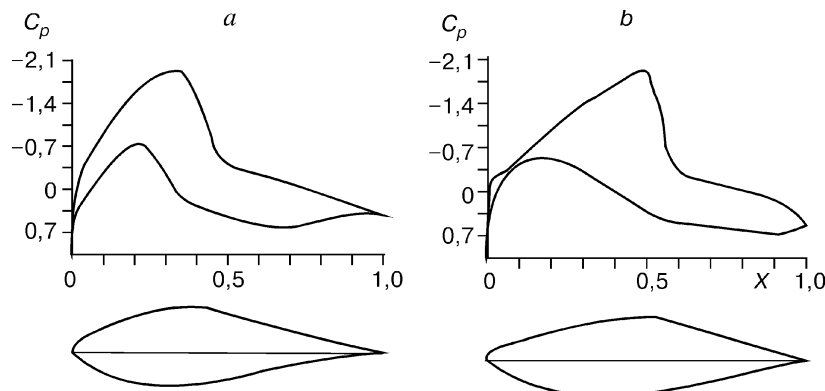


Рис. 7. Примеры профиля для схем “летающее крыло” (а) и “летающее крыло” с затянутым конфузорным участком (б).

$$C_l = 0,801, \quad C_d = 0,746 \cdot 10^{-2}, \quad C_{l,\max} = 1,39, \quad d_C = 0,250, \quad S_C = 0,142, \quad \beta = 16,2^0,$$

$$C_l = 0,803, \quad C_d = 0,709 \cdot 10^{-2}, \quad C_{l,\max} = 1,23, \quad d_C = 0,247, \quad S_C = 0,148, \quad \beta = 14,8^0.$$

Все расчетные значения лежат в диапазоне, соответствующем точности выполнения ограничений.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

Проблема аналитического описания и представления в ЭВМ различных криволинейных границ, тесно связанная с представлением таблично заданных функций, возникает во многих прикладных задачах. В зависимости от конкретных требований опорные точки могут быть либо узлами для самой кривой, либо узлами характеристического каркаса, определяющего ее форму. Существуют различные методы решения таких задач. Главными проблемами в этих методах являются: тенденция к осцилляциям для полиномиальных представлений, невысокая степень гладкости сопряжения для кусочно-полиномиальных представлений и необходимость задания производных в узлах для эрмитовой интерполяции. У сплайнов также могут возникать осцилляции, например, при аппроксимации кривой, имеющей разрывы кривизны. Недостатком хорошо зарекомендовавших себя методов Фергюссона — Бернштейна — Безье является их слабая связь с характеристической ломаной для полиномов высокой степени, что делает невозможным одновременное удовлетворение, в случае необходимости, условий сопряжения нужного порядка и хорошего приближения к узлам каркаса.

Для описания геометрии искомой границы был развит, обоснован и реализован метод параметрической полиномиальной аппроксимации произвольной степени гладкости, свободный от возможных осцилляций при варьировании определяющих параметров, что регуляризует оптимизационную задачу. Получены теоремы об отсутствии перегибов, о монотонности и оценки точности [10 – 12].

Схема построения участка кривой на двух интервалах приведена на рис. 8. На интервале аппроксимации $[z_i, z_{i+1}]$ представляющий полином имеет вид:

$$P(\xi) = (1 - \xi)^{L+1} F_0(\xi) + \xi^{L+1} F_1(\xi),$$

$$F_0(\xi) = \sum_{k=0}^L a_k \xi^k, \quad F_1(\xi) = \sum_{k=0}^L b_k (1 - \xi)^k,$$

$$\xi = \frac{x - z_i}{\Delta z}, \quad x \in [z_i, z_{i+1}], \quad \xi \in [0, 1].$$

Условия для определения коэффициентов:

$$P(0) = g_i, \quad P^{(1)}(0) = G'_i \Delta z, \quad P^{(k)}(0) = 0,$$

$$P(1) = g_{i+1}, \quad P^{(1)}(1) = G'_{i+1} \Delta z, \quad P^{(k)}(1) = 0,$$

$$P^{(k)} = \frac{d^k P}{d\xi^k}, \quad k = 2, 3, \dots, L,$$

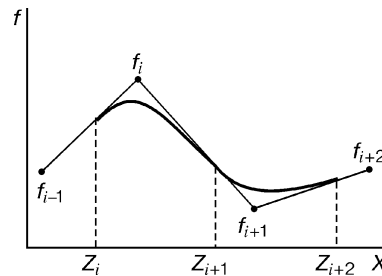


Рис. 8. Схема вписывания аппроксимирующей кривой в линейный каркас.

где значения функции g_i, g_{i+1} и ее производных G'_i, G'_{i+1} берутся из линейного каркаса, построенного на заданных опорных точках (x_i, f_i) .

Формулы для определения коэффициентов a_k, b_k следующие:

$$a_k = C_{L+k}^L \left[f_{i+1} + G'_i \frac{k\Delta z - (L+k)\Delta x}{L+k} \right],$$

$$b_k = C_{L+k}^L \left[f'_{i+1} + G'_{i+1} \left(\frac{L\Delta z - (L+k)\Delta x}{L+k} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, L, \quad C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}.$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i.$$

Теорема 1.

Для $\Delta z \in \left[\left(2 - \frac{1}{L+1} \right) \Delta x, \left(2 + \frac{1}{L} \right) \Delta x \right]$ полином $P(\xi)$ на интервале $(0,1)$ точек

перегиба не имеет.

Теорема 2.

При $\Delta z = 2\Delta x$ и $G'_i G'_{i+1} > 0$ функция $P(\xi)$ монотонна на интервале $[0,1]$.

Теорема 3.

При $\Delta z = 2\Delta x$ для полинома $P(\xi)$ выполняется $\lim_{L \rightarrow \infty} P(\xi(x_{i+1})) = f(x_{i+1})$.

Краевые задачи, особенно для трансзвуковых режимов обтекания, весьма чувствительны к поведению не только граничных функций, но и их производных. Геометрическое представление контура типичного крыльевого профиля, заданное координатами $(x_i, y_i, i = 1, \dots, 18)$ посредством кубической сплайн-аппроксимации и LL -аппроксимации, приведено на рис. 9. Производные сплайн- и LL -аппроксимации представлены на рис. 10. Видно, что LL -аппроксимация наряду с гарантированным отсутствием осцилляций геометрического представления контура обеспечивает и монотонность первой производной на соответствующих его участках.

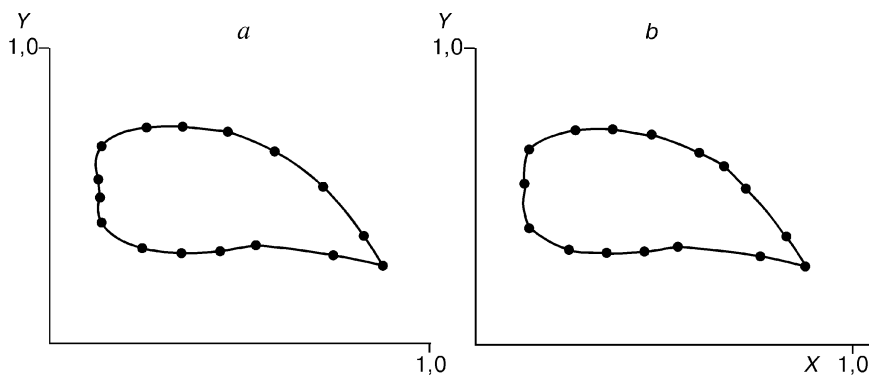


Рис. 9. Кубический сплайн, построенный по заданным опорным точкам (а), и параметрическая полиномиальная аппроксимация опорных точек (б).

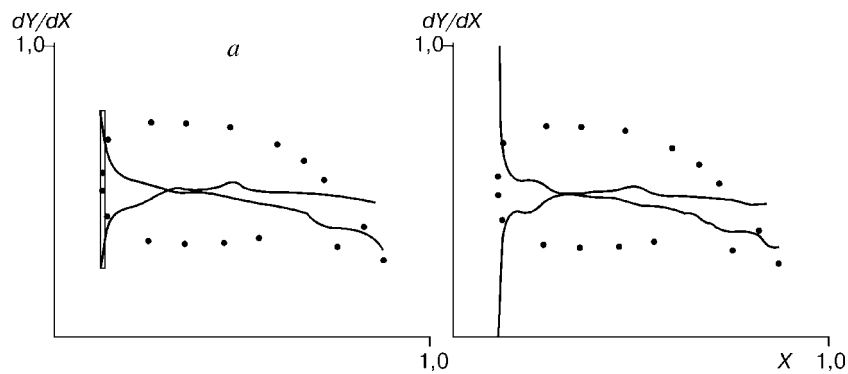


Рис. 10. Производная кубического сплайна (а) и параметрического полинома (b).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что прямой метод проектирования, конечно, требует больших затрат времени счета и не обладает единственностью для интегральных целевых функций, однако корректность постановки задачи и способ получения решения, по мнению авторов, делают его более предпочтительным для получения устойчивых решений, чем обратные методы. Можно также отметить, что последний предложенный алгоритм решения прямой задачи обеспечивает равномерную точность функционалов при вариации свободной границы в силу независимости структуры обращаемой матрицы \mathbf{G} от дискретизации области. Это позволяет получать решения в области конечных вариаций геометрических параметров исходного профиля, что иллюстрируется приведенными расчетами.

Кроме того, необходимо подчеркнуть, что представленные результаты проектирования крыльевых профилей для различных целевых функционалов не являются решением конкретных прикладных задач и не могут быть рекомендованы для практического использования без учета дополнительных требований к ним, связанных со спецификой разрабатываемого летательного аппарата. Они демонстрируют созданные вычислительные технологии, часть которых реализована в виде пакета программ, включающего системный блок, блоки аэрогазодинамики, геометрии и формирования расчетных сеток, блок оптимизации, состоящий из комплекса программ, реализующих различные стратегии минимизации функций многих переменных: методы вращающихся координат, направляющего конуса, матричного спуска и т.д. [19], и, наконец, графический блок, позволяющий выводить на дисплей все этапы модификации исходного контура и распределение газодинамических характеристик.

В принципе существует возможность определить структуру течения для конкретного тела и на конкретном режиме более точно, чем это происходит при решении оптимизационной задачи. Однако это требует априорного выделения особенностей течения, применения численных схем высокого порядка и расчетных сеток, получаемых из решения дифференциальных уравнений, что не только практически невозможно при расчете достаточно экзотичных конфигураций, получающихся при варьировании свободных параметров задачи в процессе оптимизации, но и может привести к неконтролируемым ситуациям. Высокоточные адаптированные к конкретной задаче методы наряду с экспериментальными должны применяться на заключительной стадии экспертизы спроектированных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аульченко С.М. Метод оптимизации профилей в дозвуковом потоке идеального газа. — Новосибирск, 1987. — 45 с. (Препр. / ИТПМ СО АН СССР; № 30-87).
2. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф., Самарин В.Г. Проектирование симметричных профилей с максимальным критическим числом Маха потока при заданных ограничениях // Уч. зап. ЦАГИ. — 1988. — Т. XIX, № 2. — С. 19 – 28.
3. Аульченко С.М. Оптимизация профилей в дозвуковом потоке идеального газа // Моделирование в механике. Т. 2(19). № 6. — Новосибирск, 1988. — С. 16 – 21.
4. Аульченко С.М. Результаты численного проектирования оптимальных аэродинамических конфигураций. Сравнение с точными решениями // V Всесоюзная школа по методам аэрофизических исследований: Сб. статей. — Новосибирск, 1990. — С. 3 – 8.
5. Aulchenko S.M., Latypov A.F., Nikulichev Y.V. Variational method for designing two-dimensional optimal aerodynamic configurations // Abstr. Int. Conf. "Free-boundary Problems in Continuum Mechanics". — Novosibirsk, 1991. — P. 12.
6. Аульченко С.М. Вариационный метод построения дозвуковых крыловых профилей // ПМТФ. — 1992. — № 4. — С. 90 – 93.
7. Аульченко С.М. Применение метода граничных элементов для расчета скоростного дозвукового профиля // ПМТФ. — 1993. — Т. 34, № 5. — С. 94 – 97.
8. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф. Применение метода граничных элементов и параметрических полиномов в задачах оптимизации крыльевых профилей // ПМТФ. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 73 – 79.
9. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф. Построение крыловых профилей в дозвуковом потоке газа методами численной оптимизации // МЖГ. — 1997. — № 2. — С. 174 – 182.
10. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф. Построение плоских кривых с помощью параметрических полиномов четвертого порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1995. — Т. 35, № 7. — С. 1139 – 1142.
11. Аульченко С.М., Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Построение кривых с помощью параметрических полиномов // Там же. — 1998. — Т. 38, № 12. — С. 1967 – 1972.
12. Латыпов А.Ф., Никуличев Ю.В. Специализированный комплекс программ оптимизации. — Новосибирск, 1985. — (Препр. / ИТПМ СО АН СССР; № 15-85).

Статья поступила в редакцию 5 мая 1999 г.