РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2022 № 3

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.371

О МНОГОМАСШТАБНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГЕОСРЕДЫ

А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: revuzhenko@yandex.ru, *Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрены основные особенности построения многомасштабных математических моделей геосреды на примере двухмасштабной модели. На первом масштабном уровне среда предполагается линейно упругой, на втором — учитываются пластические деформации и внутреннее трение. Показано, что в первом приближении, когда градиенты напряжений на микроуровне считаются постоянными, принятая модель переходит в упругопластическую, учитывающую локальные изгибы структурных элементов геосреды. Решение задачи о распространении плоских поперечных волн показывает, что волны обладают дисперсией и их скорость с увеличением пластических деформаций уменьшается.

Геомеханика, математические модели, роль внутренней структуры, поперечные волны

DOI: 10.15372/FTPRPI20220301

К геосредам принято относить все материалы, из которых сложены внешние оболочки Земли: горные породы, грунты, сыпучие материалы. Утверждение о том, что геосреда является многомасшбатной, уже давно стало общепризнанным [1 – 5]. Многомасштабность — не исключительная особенность геосред, скорее наоборот, это общее свойство большинства реальных сред и процессов: пластического деформирования и разрушения твердых тел, турбулентных течений вязких жидкостей и т. д. [6 – 9]. Все эти явления, согласно известному высказыванию Галилея, “написаны на языке математики”, поэтому теоретические исследования предполагают построение и анализ адекватных математических моделей соответствующих процессов. Большинство математических моделей основано на концепции вещественной прямой. Считается, что точка физического пространства — это тройка вещественных чисел, а момент времени — одно вещественное число.

Однако вещественная прямая представляет собой одномасштабный объект. Если за единственный масштаб принять длину шага, то, стартуя из любой точки прямой, за конечное число шагов можно добраться до любой другой точки этой прямой (аксиома Архимеда) [10].

Исследование выполнено в рамках проекта ФНИ, номер гос. регистрации 121052500138-4 (раздел 1) и проекта РФФИ № 20-05-00184 (раздел 2).

Математический аппарат для описания физических явлений должен быть в определенном смысле адекватен этим явлениям. Значит, для описания многомасштабных явлений есть смысл пересмотреть саму концепцию обычной, т. е. одномасштабной, архимедовой, вещественной прямой. В этом направлении выполнен ряд работ [11, 12]. Например, согласно [12], геометрическая прямая, или континуум, может нести в себе множество точек более богатых, чем множество обычных действительных чисел. Это, кроме всего прочего, дает подходящие рамки для геометрического анализа физических явлений со многими масштабами. В настоящей работе будем использовать один из возможных вариантов многомасштабной прямой, описанный в [5].

1. В [13] в качестве нового масштаба введено актуально бесконечно малое число E. Это положительное число, меньшее любого числа вида $1/n$ для любого натурального числа n. Совокупность чисел

$$X = x + x^{(1)}\mathrm{E} + x^{(2)}\mathrm{E}^2 + x^{(3)}\mathrm{E}^3 + \ldots \tag{1}$$

образует многомасштабную числовую прямую OX. Здесь x, $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots$ — числа, изоморфные действительным числам, т. е. с ними можно обращаться как с обычными действительными числами. Если в качестве координатных осей взять четыре многомасштабные прямые (1), то в результате получим трехмерное многомасштабное пространство, в котором все процессы протекают в одномерном, но многомасштабном времени. Ограничимся случаем плоской деформации и одним масштабом времени t. Тогда общее число независимых переменных будет равно пяти:

$$x_1,\ \xi_1,\ x_2,\ \xi_2,\ t\,.$$

Здесь x_1, x_2, t — переменные вещественного масштабного уровня; $\xi_1 = x_1^{(1)}\mathrm{E}$, $\xi_2 = x_2^{(1)}\mathrm{E}$ — переменные микроуровня на координатных осях OX_1, OX_2, $X_1 = x_1 + \xi_1$, $X_2 = x_2 + \xi_2$.

Пусть

$$u_1 = u_1(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, t),$$
$$u_2 = u_2(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, t)$$

— поле перемещений, а

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{121}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, t)$$

— соответствующее поле напряжений. Все функции зависят от пяти аргументов.

В классическом случае одномасштабного пространства — времени — фигурируют только три аргумента (x_1, x_2, t). Появление дополнительных аргументов ξ_1, ξ_2, т. е. новых степеней свободы, приводит к необходимости формулировки и дополнительных уравнений. Эта группа уравнений должна описывать связи между различными масштабными уровнями среды.

Математический аппарат дает ряд инструментов для описания таких связей. Прежде всего, это условия непрерывности или условия на разрывы различных функций при переходе с одного уровня на другой. Например, изменения объема и сдвигов на различных уровнях равны

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_\xi = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2},$$

$$\Gamma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2},$$

$$\Gamma_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right)^2}.$$

Их разности могут быть использованы при построении замкнутых моделей. Кроме этого, могут быть использованы также инвариантные разности поворотов:

$$\Omega_{x\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\right).$$

Безусловно, должны выполняться все законы сохранения и необходимые определяющие уравнения. Необходимо также использовать условие согласованности: если поведение среды на микромасштабном уровне полностью повторяет ее поведение на вещественном уровне, то многомасштабные математические модели должны переходить в соответствующие одномасштабные. Очевидно, что следующие десять уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_j}, \quad i, j, k = 1, 2,$$

дают достаточные условия для такого перехода. Они означают, что все функции зависят не от пяти аргументов, а только от трех.

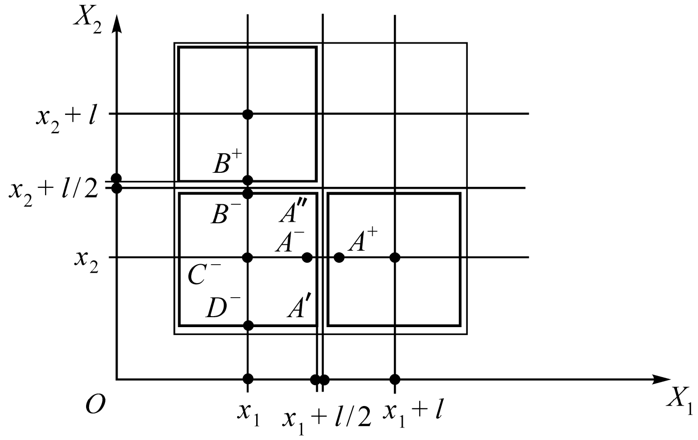
Таким образом, переход к многомасштабному пространству и времени открывает новые возможности для создания математических моделей, описывающих физические процессы с иерархией масштабных уровней.

Рассмотрим модель геосреды с двумя масштабными уровнями. Предположим, что на микроуровне среда является линейно упругой:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{11}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2} = 0, \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} = 0, \\
\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \\
\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \\
\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = \frac{\sigma_{12}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, t)}{\mu},
\end{gathered} \tag{2}$$

где E, ν, μ — упругие постоянные. Случай, когда $E \neq 2\mu(1+\nu)$, не исключается [14].

Уравнения (2) выполняются при любых допустимых значениях x_1, x_2, ξ_1, ξ_2. Указанные переменные играют разную роль: дифференцирование осуществляется только по переменным ξ_1, ξ_2. Координаты x_1, x_2 играют роль параметров. Их можно рассматривать как центры структурных элементов геосреды. Переменные ξ_1, ξ_2 при фиксированных x_1, x_2 относятся к фиксированному структурному элементу. Предположим, что контакты между элементами располагаются на координатных осях OX_1 OX_2. При этом среда предполагается анизотропной (рисунок).



Подобный вид анизотропии представляет интерес также для исследования зернистых сред [15, 16], механики кристаллических решеток [17–21] и наноматериалов [22–26]. В указанном случае в точке $A = A^+ = A^-$ нормальные и касательные напряжения σ_{11}, σ_{12} будут непрерывными. Обозначим через l — размер структурного элемента, l — актуальное бесконечно малое число. Продолжим функцию $\sigma_{11}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2)$ на значения $\sigma_{11}(x_1 + l, \xi_1, x_2, \xi_2)$. Тогда условие непрерывности в точке A имеет вид:

$$\sigma_{11}(A^+) = \sigma_{11}(A^-)$$
$$\text{или } \sigma_{11}(x_1 + l, -l/2, x_2, \xi_2) = \sigma_{11}(x_1, l/2, x_2, \xi_2). \tag{3}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\sigma_{22}(x_1, \xi_1, x_2 + l, -l/2) = \sigma_{22}(x_1, \xi_1, x_2, l/2), \\ &\sigma_{12}(x_1 + l, -l/2, x_2, \xi_2) = \sigma_{12}(x_1, l/2, x_2, \xi_2), \\ &\sigma_{12}(x_1, \xi_1, x_2 + l, -l/2) = \sigma_{12}(x_1, \xi_1, x_2, l/2). \end{aligned} \tag{4}$$

Перейдем к кинематике. На контактах между структурными элементами возможны проскальзывания. Для упрощения дилатансию исключим, поэтому нормальную компоненту смещения можно считать непрерывной:

$$\begin{aligned} &u_1(x_1 + l, -l/2, x_2, \xi_2) = u_1(x_1, l/2, x_2, \xi_2), \\ &u_2(x_1, \xi_1, x_2 + l, -l/2) = u_2(x_1, \xi_1, x_2, l/2). \end{aligned} \tag{5}$$

Разрыв касательной компоненты смещения — это другое название проскальзывания. Для пластических материалов проскальзывания определяются касательными напряжениями, для материалов с внутренним трением — отношением касательных напряжений к нормальным напряжениям на соответствующих контактах.

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_2(x_1 + l, -l/2, x_2, \xi_2) - u_2(x_1, l/2, x_2, \xi_2) = l\, f(\sigma_{12}(x_1, l/2, x_2, \xi_2),\ \sigma_{11}(x_1, l/2, x_2, \xi_2)), \\ u_1(x_1, \xi_1, x_2 + l, l/2) - u_1(x_1, \xi_1, x_2, l/2) = l\, g(\sigma_{12}(x_1, \xi_1, x_2, l/2),\ \sigma_{22}(x_1, \xi_1, x_2, l/2)). \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) являются определяющими. Функции f и g наряду с плотностью ρ и упругими постоянными предполагаются известными. Итак, приходим к системе тринадцати уравнений: пять уравнений (2) описывают деформирование структурных элементов среды, шесть уравнений (3)–(5) — необходимые условия непрерывности и два уравнения (6) — это определяющие уравнения на проскальзывания между структурными элементами. Полученная система является нетрадиционной. Переменные x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 играют в ней разную роль. Уравнения (2) выполняются при всех x_1, x_2, ξ_1, ξ_2, принадлежащих области деформирования, остальные уравнения — только при $|\xi_1|,|\xi_2| = l/2$. Данная система с одинаковой степенью детальности описывает поведение среды как на макроуровне переменных x_1, x_2, так и на микромасштабном уровне ξ_1, ξ_2. Это избыточная точность, которая усложняет аналитическое описание и качественно увеличивает объем численных расчетов.

2. Представляют интерес случаи, когда на микромасштабном уровне можно ограничиться только первыми приближениями по ξ_1, ξ_2.

Возьмем по напряжениям линейное приближение:

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + k_1\xi_1, \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + k_2\xi_2, \\ \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + k_3\xi_1 + k_4\xi_2,\end{gathered} \tag{7}$$

где σ_{11}^0, σ_{22}^0, σ_{12}^0, $k_1 - k_4$ — в пределах элементарного объема величины постоянные, т. е. зависят только от x_1, x_2, причем $k_4 = -k_1$, $k_3 = -k_2$.

Данному распределению напряжений отвечают следующие перемещения:

$$u_1(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \frac{1}{E}\left[(\sigma_{11}^0 - \nu\sigma_{22}^0)\xi_1 + k_1\frac{\xi_1^2}{2} - \nu k_2\xi_1\xi_2 + \left(\frac{E}{\mu}k_4 + \nu k_1\right)\frac{\xi_2^2}{2}\right] +$$
$$+\frac{\sigma_{12}^0}{\mu}\xi_2 - \Omega\xi_2 + u_1^0(x_1, x_2),$$
$$u_2(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \frac{1}{E}\left[(\sigma_{22}^0 - \nu\sigma_{11}^0)\xi_2 + k_2\frac{\xi_2^2}{2} - \nu k_1\xi_1\xi_2 + \left(\nu k_2 + \frac{E}{\mu}k_3\right)\frac{\xi_1^2}{2}\right] +$$
$$+\Omega\xi_1 + u_2^0(x_1, x_2),$$

где Ω, u_1^0, u_2^0 — постоянные интегрирования по ξ_1, ξ_2.

Рассмотрим случай, когда контакты между структурными элементами являются точечными. Значит, связь между структурными элементами осуществляется только через точки A^-, B^-, C^-, D^- (см. рис. 1). На линии C^-A^- значения $\xi_2 = 0$ и

$$\begin{gathered}Eu_1 = (\sigma_{11}^0 - \nu\sigma_{22}^0)\xi_1 + k_1\frac{\xi_1^2}{2} + C_1^0, \\ Eu_2 = \left(\alpha\frac{E}{\mu}\sigma_{12}^0 + C\right)\xi_1 + \left(\nu k_2 + \frac{E}{\mu}k_3\right)\frac{\xi_1^2}{2} + C_2^0.\end{gathered} \tag{8}$$

На линии $D^- B^-$ $\xi_1 = 0$ и

$$Eu_1 = \left((1-\alpha)\frac{E}{\mu}\sigma_{12}^0 - C \right)\xi_2 + \left(\frac{E}{\mu}k_4 + \nu k_1 \right)\frac{\xi_2^2}{2} + C_1^0,$$

$$Eu_2 = (\sigma_{22}^0 - \nu\sigma_{11}^0)\xi_2 + k_2\frac{\xi_2^2}{2} + C_2^0.$$

Уравнения связывают смещения, напряжения и градиенты напряжений в точках контакта, т. е. играют роль определяющих уравнений для элементарного объема $A^- B^- C^- D^-$. В правую часть вводят нечетные и четные степени переменных микроуровня ξ_1, ξ_2. Коэффициенты при нечетных степенях определяются через разности смещений, а при четных степенях — через соответствующие суммы. Например, из первого уравнения (8) следует, что

$$Eu_1(C^-) = -(\sigma_{11}^0 - \nu\sigma_{22}^0)\frac{l}{2} + \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + C_1^0,$$
$$Eu_1(A^-) = (\sigma_{11}^0 - \nu\sigma_{22}^0)\frac{l}{2} + \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + C_1^0. \qquad (9)$$

Отсюда

$$\frac{u_1(A^-) - u_1(C^-)}{l} = \frac{1}{E}(\sigma_{22}^0 - \nu\sigma_{22}^0),$$
$$\frac{u_1(A^-) + u_1(C^-)}{2} = \frac{1}{2}\frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{E}\frac{l^2}{8}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi_1} + C_1^0. \qquad (10)$$

Аналогичные уравнения характерны и для второй пары точек B^-, D^-, а также для компоненты смещения u_2. Всего восемь уравнений. Если исключить из уравнений жесткий перенос и поворот, то останется пять уравнений: в трех из них типа (9) фигурируют сами напряжения, в остальных двух типа (10) — градиенты напряжений:

$$\frac{u_1(A^-) + u_1(C^-)}{2} - \frac{u_1(B^-) + u_1(D^-)}{2} = 2\eta\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi_1} - \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi_2} \right),$$
$$\frac{u_2(A^-) + u_2(C^-)}{2} - \frac{u_2(B^-) + u_2(D^-)}{2} = 2\eta\left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi_1} - \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\xi_2} \right), \qquad (11)$$
$$\eta = \frac{l^2}{32}\left(\frac{1-\nu}{E} + \frac{1}{\mu} \right).$$

Располагая условиями на контактах, можно перейти к разностным уравнениям на макроуровне. В первом их приближении можно принять, что η — постоянная материала, а величина $l \to 0$. Тогда уравнения вида (9) переходят в дифференциальные, а уравнения (11) — в конечные уравнения относительно смещений:

$$v_i = u_i(A), u_i(C); \quad w_i = u_i(B), u_i(D).$$

Появление двух дополнительных уравнений (11) означает, что в замкнутую систему вводятся и две новые неизвестные функции, т. е. вместо одного поля перемещений $\overline{u}$ вводятся два векторных поля $\overline{v}$ и $\overline{w}$.

Тогда при $l \to 0$ с точностью до l^2 приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial v_1(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_1} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}],$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}], \quad \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2} = \frac{\sigma_{12}}{\mu},$$

$$v_1 - w_1 = 2\eta\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}\right),$$

$$v_2 - w_2 = 2\eta\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2}\right).$$

Обратимся к условиям непрерывности напряжений (3). Отсюда с точностью до l^2 следует, что

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{11}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \sigma_{11}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{22}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \sigma_{22}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \sigma_{12}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \sigma_{12}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_2}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Для перемещений имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_1(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial u_2(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_2(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = f, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} = g.
\end{gathered} \tag{13}$$

Восемь уравнений (12), (13) показывают, как смещения и напряжения на микроуровне определяют напряженно-деформированное состояние среды на макроуровне. Подстановка (12), (13) в уравнения равновесия и определяющие уравнения приводит к следующей замкнутой системе уравнений на макроуровне:

$$\frac{\partial \sigma_{11}(x_1, 0, x_2, 0)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{12}],$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{12}}{\mu} + f(\sigma_{12}, \sigma_{11}) + g(\sigma_{12}, \sigma_{22}),$$

$$v_1 - w_1 = 2\eta\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\right), \quad v_2 - w_2 = 2\eta\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\right).$$

Таким образом, на макроуровне приходим к уравнениям, учитывающим локальные изгибы. Для частного случая этих уравнений $f \equiv g \equiv 0$ в [27, 28] рассмотрены постановки краевых задач, теорема единственности и численное решение ряда квазистатических задач.

Для решения динамических задач необходим учет сил инерции. Ограничимся приближением, когда инерционные члены учитываются только на макроуровне. Замкнутая система уравнений сводится к следующему виду:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}] - \eta \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\right), \\
\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] + \eta \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\right), \\
\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{12}}{\mu} + f(\sigma_{12}, \sigma_{11}) + g(\sigma_{12}, \sigma_{22}) - \eta \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}\right),
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где

$$
V_1 = \frac{v_1 + w_1}{2}, \quad V_2 = \frac{v_2 + w_2}{2}
$$

— компоненты среднего перемещения элементарного объема. Следовательно, средние деформации связаны не только с напряжениями, но и со вторыми производными напряжений по координатам. Поэтому модель (14) можно отнести к моделям градиентного типа [29–33].

Рассмотрим задачу о распространении плоских поперечных волн в геосреде со структурой. Пусть $f = 0$, $g(\sigma_{12}, \sigma_{22}) = \sigma_{12} / G$, $G = \mathrm{const}$ и $\partial / \partial x_1 \equiv 0$. В этом случае система (14) сводится к одному волновому уравнению

$$
\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial t^2} - \rho \eta \frac{\partial^4 \sigma_{12}}{\partial t^2 \partial x_2^2},
$$

где

$$
C = \sqrt{\frac{\mu G}{\rho(\mu + G)}}.
$$

Для гармонической волны

$$
\sigma_{12} = \exp(i\omega t - ikx_2)
$$

имеем следующее дисперсионное уравнение:

$$
\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{C^2} \frac{1}{k^2} + \rho \eta .
$$

При $\eta = 0$ волна распространяется со скоростью, равной C. С уменьшением модуля G, т. е. с возрастанием роли пластических деформаций, скорость волны уменьшается. При $\eta \neq 0$ проявляется дисперсия поперечных волн.

Отметим, что в основе полученных уравнений (14) лежит предположение (7) об учете только линейного распределения напряжений в пределах элементарного объема. Если учесть квадратичные члены и члены более высоких степеней, то аналогичным образом можно прийти к более сложным математическим моделям.

ВЫВОДЫ

Математическая модель геосреды, в которой учитываются два масштабных уровня, приводит к системе уравнений нетрадиционного типа. В первом приближении уравнения сводятся к описанию упругопластической среды с учетом локальных изгибов.

С увеличением роли пластических деформаций скорость поперечных волн уменьшается. Локальные изгибы структурных элементов среды приводят к дисперсии поперечных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Садовский М. А.** О естественной кусковатости горных пород // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — № 4. — С. 829 – 831.
2. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // ФТПРПИ. — 1974. — № 4. — С. 130 – 133.
3. **Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф.** О свойстве дискретности горных пород // Физика Земли. — 1982. — № 12. — С. 3 – 18.
4. **Кочарян Г. Г.** Геомеханика разломов. — М.: Геос, 2016. — 424 с.
5. **Викулин А. В., Иванчин А. Г.** О современной концепции блочно-иерархического строения геосреды и некоторых ее следствиях в области наук о Земле // ФТПРПИ. — 2013. — № 3. — С. 67 – 84.
6. **Гриняев Ю. В., Лихачев В. А., Панин В. Е.** Структурные уровни деформации твердых тел. — Новосибирск: Наука, 1985. — 229 с.
7. **Физическая мезомеханика** и компьютерное конструирование материалов / под ред. В. Е. Панина. — Новосибирск: Наука, 1985. — Т. 1. — 298 с., Т. 2. — 320 с.
8. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — 736 с.
9. **Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.** Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, Физматлит, 1988. — 368 с.
10. **Немыцкий В. В., Слудская М. И., Черкасов А. Н.** Курс математического анализа. Т. 1. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1940. — 459 с.
11. **Девис М.** Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980. — 236 с.
12. **Альбеверно С., Фенстад Й., Хуэнг-Крон Р., Линдстрем Т.** Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. — М.: Мир, 1990. — 616 с.
13. **Ревуженко А. Ф.** Математический анализ функций неархимедовой переменной. Специализированный математический аппарат для описания структурных уровней геосреды. — Новосибирск: Наука, 2012. — 327 с.
14. **Лавриков С. В.** О расчете напряженно-деформированного состояния разупрочняющегося блочного массива вблизи выработки // Физ. мезомеханика. — 2010. — Т. 13. — № 4. — С. 53 – 63.
15. **Павлов И. С.** Упругие волны в двумерной зернистой среде // Проблемы прочности и пластичности. — 2005. — Вып. 67. — С. 119 – 131.
16. **Павлов И. С., Потапов А. И.** Двумерная модель зернистой среды // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 2. — С. 110 – 121.

17. Povstenko Y. Fractional nonlocal elasticity and solutions for straight screw and edge dislocations, Phys. Mesomech., 2020, Vol. 23, No. 6. — P. 547 – 555.

18. Makarov P. V., Bakeev R. A., and Smolin I. Yu. Modeling of localized inelastic deformation at the mesoscale with account for the local lattice curvature in the framework of the asymmetric Cosserat theory, Phys. Mesomech., 2019, Vol. 22, No. 5. — P. 392 – 401.

19. Rys M. and Petryk H. Gradient crystal plasticity models with a natural length scale in the hardening law, Int. J. Plasticity, 2018, Vol. 111. — P. 168 – 187.

20. Pouriayevali H. and Xu B.-X. Decomposition of dislocation densities at grain boundary in a finite deformation gradient crystal-plasticity framework, Int. J. Plasticity, 2017, Vol. 96. — P. 36 – 55.

21. Ерофеев В. И., Павлов И. С. Параметрическая идентификация кристаллов, имеющих кубическую решетку, с отрицательным коэффициентов Пуассона // ПМТФ. — 2015. — Т. 56. — № 6. — С. 94 – 101.

22. Zenkour A. M. and Radwan A. F. A nonlocal strain gradient theory for porous functionally graded curved nanobeams under different boundary conditions, Phys. Mesomech., 2020, Vol. 23, No. 6. — P. 601 – 615.

23. Chih-Ping Wu and Jung-Jen Yu. A review of mechanical analyses of rectangular nanobeans and single-, double-, and multi-walled carbon nanotubes using Eringen’s nonlocal elasticity theory, J. Arch. Appl. Mech., 2019, Vol. 89. — P. 1761 – 1792.

24. Седечи М., Ягутян А. Исследование на основе уравнений теории упругости динамической неустойчивости колебаний углеродных нанотрубок, расположенных вблизи графитовых листов // ПМТФ. — 2016. — Т. 57. — № 1.

25. Павлов И. С., Лазарев В. А. Нелинейные упругие волны в двумерной нанокристаллической среде // Вестн. науч.-технол. развития. Национальная технологическая группа. — 2008. — № 4 (8). — С. 45 – 53.

26. Лобода О. С., Кравцов А. М. Влияние масштабного фактора на модель упругости трехмерного нанокристалла // Изв. РАН МТТ. — 2005. — № 4. — С. 27 – 41.

27. Ревуженко А. Ф. Трехмерная модель линейно упругого тела со структурой // Физ. мезомеханика. — 2021. — № 3. — С. 26 – 35.

28. Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F. Model of linear elasticity theory with a structural parameter and stress concentration analysis in solids under deformation, AIP Conf. Proc., 2018, 2051 (1), 020167. DOI: 10.1063/1.5083410.

29. Lewandowski M. J. and Stupkiewicz S. Size effects in wedge indentation predicted by a gradient-enhanced crystal-plasticity model, Int. J. Plasticity, 2017, Vol. 98. — P. 54 – 78.

30. Liu D. and Dunstan D. J. Material length scale of strain gradient plasticity: A physical interpretation, Int. J. Plasticity, 2017, Vol. 98. — P. 156 – 174.

31. Habib Pouriayevali and Bai-Xiang Xu. A study of gradient strengthening based on a finite-deformation gradient crystal-plasticity model, Continuum Mech. Thermodyn., 2017, Vol. 29. — P. 1389 – 1412.

32. Dabiao Liu and Dunstan D. J. Material length scale of strain gradient plasticity: A physical interpretation, Int. J. Plasticity, 2017, Vol. 98. — P. 156 – 174.

33. Aifantis E. C. Internal length gradient (ILG) material mechanics scales and disciplines, J. Adv. Appl. Mech., 2016, Vol. 49. — P. 1 – 110.

Поступила в редакцию 22/IV 2022
После доработки 28/IV 2022
Принята к публикации 06/V 2022