

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ СЫПУЧИХ СРЕД

Е. И. Краус, С. В. Лавриков*, А. Е. Медведев,
А. Ф. Ревуженко*, И. И. Шабалин

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск

* Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск
E-mails: kraus@itam.nsc.ru, lvk@isuni.ru, medvedev@itam.nsc.ru,
revuzhenko@isuni.ru, shabalin@sbras.nsc.ru

Рассматривается плоская задача о направленном переносе масс в сыпучей среде в результате сложного нагружения с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. Для описания эффекта предложено использовать гипопластическую модель сыпучей среды и модель подобия вязкой несжимаемой жидкости. Для гипопластической модели разработан конечно-элементный алгоритм и построено численное решение краевой задачи. Для модели подобия вязкой несжимаемой жидкости получено приближенное аналитическое решение исходной задачи. Для обеих моделей выполнены расчеты кинематики деформирования, проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Показано, что обе модели качественно описывают процесс деформирования и эффект направленного переноса масс, наблюдаемые в экспериментах.

Ключевые слова: сыпучая среда, сложное нагружение, перенос масс, гипопластическая модель, конечные элементы, краевая задача, вязкость, малый параметр, дифференциальное вращение.

1. ЭФФЕКТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ

При специальном виде нагружения неупругих тел наблюдается эффект дифференциального вращения. Для выяснения сути этого эффекта рассмотрим плоскую деформацию области в форме эллипса, на границе которой задан постоянный вектор скорости, направленный по касательной к границе:

$$|\mathbf{v}| = \text{const}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к границе эллипса. При таком нагружении эллиптическая область преобразуется сама в себя. При этом любая материальная точка на границе движется вокруг центра по замкнутой эллиптической траектории. Внутренние точки также движутся вокруг центра по замкнутым траекториям, близким к эллиптическим. Периоды обращения внутренних точек оказываются зависящими от расстояния $|\mathbf{r}|$ между этими точками и центром. Следовательно, имеет место эффект дифференциального вращения. Для наблюдателя, связанного с материальной точкой на границе, эффект проявляется в виде направленного переноса масс (рис. 1). Ясно, что данный процесс зависит от реологии среды, степени сжатия эллипса и условий нагружения. Детальное изучение эффекта дифференциального вращения представляет интерес по ряду причин.

1. Различие периодов обращения внутренних материальных точек приводит к тому, что с увеличением времени внутренние деформации среды накапливаются и могут стать

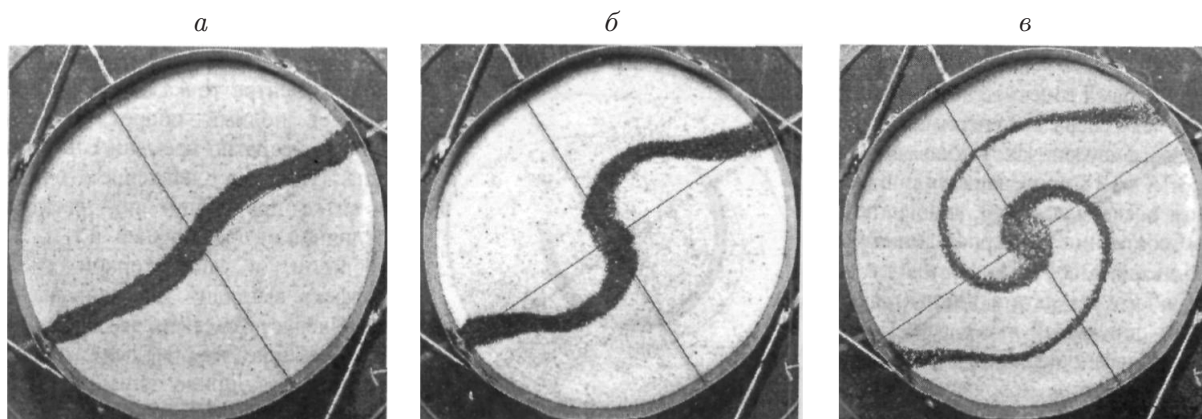


Рис. 1. Экспериментальная картина деформирования [1–4], полученная на сухом кварцевом песке, для эллипса с соотношением большой и малой полуосей $\bar{a}/\bar{b} \approx 1,1$ после 3 (а), 5 (б) и 30 (в) циклов нагружения:
жирная линия — линия вдоль большой оси эллипса, выделенная перед началом деформирования

сколь угодно большими. Это обстоятельство может быть использовано при обработке материалов давлением, при получении бездефектных упаковок сыпучих материалов и т. д.

2. Эффект дифференциального вращения может быть использован при экспериментальных исследованиях определяющих уравнений реологически сложных сред. Нетрудно показать, что если скорость на границе эллипса изменить, так чтобы постоянным был не модуль скорости $|\mathbf{v}|$, а секториальная скорость, т. е. если задать краевые условия вида

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = \text{const}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.2)$$

то внутри области может реализоваться только однородное распределение деформаций. Данное утверждение равносильно следующему. Если правый конец горизонтально расположенного стержня сместить вправо на некоторое расстояние, а левый — влево на то же расстояние, то середина стержня останется неподвижной (предполагается, что материал однороден и реологически устойчив, а процесс нагружения является квазистатическим). Как известно, течения с однородным распределением деформаций являются идеальным объектом геометрических исследований. При малых коэффициентах сжатия эллипса рассматриваемые течения с условиями на границе (1.1) близки к идеальным течениям с граничными условиями (1.2). Имеет значение также то обстоятельство, что в стационарном режиме материальный элемент в центре эллиптической области испытывает строго нейтральное нагружение: все инварианты тензоров напряжений и скоростей деформаций постоянны, а само нагружение осуществляется только за счет поворота осей тензоров.

3. Описанный способ нагружения можно рассматривать как кинематическое моделирование движения приливных волн планет. В этом случае обнаруженный эффект представляет собой направленный перенос масс Земли под действием приливных сил.

Исследованию данного эффекта посвящен ряд работ [1–3, 5, 6]. В настоящей работе проводится моделирование описанного эффекта направленного переноса масс на основе двух моделей неупругих сред.

2. ПЛОСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

2.1. Гипопластическая модель. Рассмотрим задачу о расчете направленного переноса масс при сложном нагружении на основе гипопластической модели сыпучей среды [7].

Согласно [4] определяющие уравнения модели, связывающие тензор напряжений T и тензор скоростей деформаций D , имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{T} = C_1 \operatorname{tr}(T + S) + C_2 \frac{\operatorname{tr}((T + S)D)}{\operatorname{tr}(T + S)} (T + S) + \\ + \left(\frac{C_3 T^2 + C_4 T^{*2}}{\operatorname{tr}(T)} + \frac{C_5 T^3 + C_6 T^{*3}}{\operatorname{tr}(T^2)} \right) \sqrt{\operatorname{tr}(D^2)}, \\ \dot{e} = (1 + e) \operatorname{tr}(D), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} S = sE, \quad s = [s_0 + k(p/p_0)^\beta \ln((1 + e)/(1 + e_0))](p/p_0)^\alpha, \\ k = -s_0 / [(p_r/p_0)^\beta \ln((1 + e_r)/(1 + e_0))], \quad T^* = T - pE/3, \quad p = \operatorname{tr}(T), \end{aligned} \quad (2.2)$$

E — единичный тензор; e — пористость. Константы модели определялись экспериментально для сухого кварцевого песка и согласно [4] равны

$$\begin{aligned} C_1 = -103,01, \quad C_2 = -197,61, \quad C_3 = 37,24, \\ C_4 = 1572,92, \quad C_5 = -394,69, \quad C_6 = -1265,66, \\ p_r = -0,5 \text{ МПа}, \quad p_0 = -0,729 \text{ МПа}, \quad s_0 = -0,149 \text{ МПа}, \\ e_r = 0,73, \quad e_0 = 0,54, \quad \alpha = 0,6, \quad \beta = 0,1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Модель (2.1)–(2.3) представляет собой существенно нелинейную систему уравнений (в том числе для приращений), что позволяет в рамках одних и тех же уравнений описать как состояние активного нагружения, так и разгрузку. Эта модель исследована в ряде численных экспериментов по реализации однородного напряженно-деформированного состояния при различных путях нагружения. Показано, что эта модель качественно и количественно хорошо описывает реальное поведение сыпучих сред [5].

2.2. Переход к двумерной задаче. Уравнения (2.1)–(2.3) записаны для пространственного случая. Однако эффект направленного переноса наблюдается в плоскости вращения главных осей деформаций. Поэтому имеет смысл рассматривать плоскую задачу. В случае плоского напряженного состояния систему уравнений (2.1)–(2.3) можно записать в виде замкнутой системы уравнений для приращений компонент тензора напряжений $\Delta\sigma_{11}$, $\Delta\sigma_{22}$, $\Delta\sigma_{12}$ и поля перемещений $\Delta\mathbf{u} = \{\Delta u_1, \Delta u_2\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \\ \Delta\sigma_{11} = A_{11} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + A_{12} \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) + A_{13} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + A_{14} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} + A_{15} \Delta L, \\ \Delta\sigma_{22} = A_{21} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + A_{22} \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) + A_{23} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + A_{24} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} + A_{25} \Delta L, \\ \Delta\sigma_{12} = A_{31} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + A_{32} \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) + A_{33} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + A_{34} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} + A_{35} \Delta L, \\ \Delta\sigma_{33} = A_{41} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + A_{42} \left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right) + A_{43} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + A_{44} \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3} + A_{45} \Delta L = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3}\right)^2},$$

$$\Delta e = (1 + e)\left(\frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_3}{\partial x_3}\right).$$

Здесь и ниже использовано следующее правило обезразмеривания величин: $\sigma = 10^{-1}\bar{\sigma}\rho gh$, $s = (4/3)\bar{s}a$ (σ , s и $\bar{\sigma}$, \bar{s} — размерные и безразмерные напряжение и длина соответственно; ρ — плотность среды; g — ускорение свободного падения; h — глубина залегания слоя среды, для которого рассчитывается эффект дифференциального вращения; a — длина большой полуоси эллипса).

Уравнения (2.4) представляют собой обычные уравнения равновесия для приращений компонент плоского тензора напряжений, уравнения (2.5) — определяющие соотношения гипопластической модели, где коэффициенты A_{ij} ($i = \bar{1}, 4, j = \bar{1}, 5$) зависят только от напряжений σ_{ij} , пористости e и констант модели и не зависят от приращений напряжений и приращения пористости. В (2.5) через ΔL обозначена нелинейная часть уравнений модели. Уравнение $\Delta\sigma_{33} = 0$ служит для исключения из (2.5) величины $\partial \Delta u_3 / \partial x_3$, учитывающей изменение объема среды при деформировании (дилатансию).

Краевые условия (1.1) для уравнений (2.4), (2.5) принимают вид

$$\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\Delta \mathbf{u}| = d = \text{const}, \quad (2.6)$$

где d — параметр нагружения.

Таким образом, система (2.4), (2.5) при заданных краевых условиях (2.6) представляет собой замкнутую модель для расчета приращений напряжений $\Delta\sigma_{ij}$, смещений Δu_i и пористости Δe .

Для численного решения задачи (2.4)–(2.6) используем метод конечных элементов (МКЭ). Стандартная техника решения краевых задач с помощью МКЭ позволяет свести исходную дифференциальную систему уравнений к алгебраической системе высокого порядка. В данном случае в силу нелинейности определяющих уравнений (2.5) с использованием МКЭ получаем алгебраическую систему нелинейных уравнений вида

$$F_1(y_1, \dots, y_m) = 0, \quad \dots, \quad F_m(y_1, \dots, y_m) = 0. \quad (2.7)$$

Здесь компонентами вектора $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ являются приращения перемещений Δu_1 , Δu_2 в узлах сетки конечно-элементного разбиения ($m = 2N$; N — число узлов сетки). На каждом шаге нагружения нелинейная система (2.7) решается с помощью итерационного метода Ньютона

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k - J^{-1}(\mathbf{y}^k) \cdot F(\mathbf{y}^k), \quad (2.8)$$

где k — номер итерации; J — матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial y_1 & \dots & \partial F_1 / \partial y_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F_m / \partial y_1 & \dots & \partial F_m / \partial y_m \end{pmatrix}.$$

Критерием остановки итерационного процесса (2.8) служит выполнение условия $\max_{1 \leq i \leq m} |F_i(\mathbf{y}^k)| < \varepsilon$ (ε — заданная малая величина). В силу нелинейности уравнений для приращений полное решение задачи будем строить в виде итерационного процесса:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \Delta\sigma_{ij}^n, \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^n, \quad e^{n+1} = e^n + \Delta e^n, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.9)$$

Здесь приращения на n -м шаге нагружения находятся из решения краевой задачи (2.4)–(2.6).

Для численной реализации итерационного процесса (2.9) необходимо определить начальное напряженное состояние среды. Экспериментальные исследования [1–3, 5, 6] показали, что каково бы ни было состояние среды в начальный момент, через определенное время процесс деформирования выходит на стационарный режим. В этом режиме все напряжения с течением времени не меняются. Свойства сыпучих материалов таковы, что среда приспособляется к условиям деформирования и “забывает” историю нагружения. Иными словами, в стационарном режиме напряженное состояние зависит только от текущих условий нагружения и не зависит от напряженного состояния в начальный момент времени. Таким образом, итерационный процесс (2.9) необходимо осуществлять до тех пор, пока процесс деформирования не выйдет на стационарный режим. В качестве критерия выхода процесса деформирования на стационарный режим будем использовать условие вида $\max_{i,j} |\Delta \bar{\sigma}_{ij}^n / \bar{d}| \ll 1$, где $\Delta \bar{\sigma}_{ij}^n$ — приращение безразмерных напряжений, полученное на n -й итерации процесса (2.9); \bar{d} — безразмерный параметр нагружения в граничном условии (2.6). Таким образом, критерий выхода процесса деформирования на стационарный режим заключается в следующем: рассчитанные приращения напряжений близки к нулю независимо от порядка малости параметра нагружения.

Предварительный анализ модели при однородном деформировании показал, что она адекватно описывает процесс выхода на стационарный режим деформирования [5]. При этом для однородного деформирования (с условиями (1.2) на внешней границе) стационарное состояние определяется достаточно просто, по крайней мере, для этого не требуется решать краевую задачу. В то же время, как отмечено выше, для малых эксцентриситетов эллипса при условиях нагружения типа (1.1) и (1.2) получаются близкие результаты. Поэтому если в качестве начального напряженного состояния среды для задачи (2.4)–(2.6) использовать состояние, которое достигается в стационарном режиме при однородном деформировании с условием на внешней границе (1.2), то можно ожидать, что полученное решение для приращений $\Delta \sigma_{ij}$ будет стремиться к нулю, т. е. к стационарному режиму деформирования.

2.3. Результаты расчетов. Выберем следующие параметры расчетной области и начальное напряженное состояние среды, соответствующие решению задачи при однородном деформировании с условиями на границе (1.2):

$$\begin{aligned} a = 130 \text{ мм}, \quad h = 80 \text{ мм}, \quad g = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad \rho = 2,5 \text{ г/см}^3, \\ \bar{a} = 0,75, \quad \bar{b} = 0,68, \quad e = 0,83711; \quad \varepsilon = 10^{-9}, \\ \bar{\sigma}_{33} = -10, \quad \bar{\sigma}_{11} = 1,25\bar{\sigma}_{33}, \quad \bar{\sigma}_{22} = 1,19\bar{\sigma}_{33}, \quad \bar{\sigma}_{12} = 0,7\bar{\sigma}_{33}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь \bar{a} , \bar{b} — безразмерные длины большой и малой полуосей эллипса соответственно. Напряженное состояние (2.10) получено как однородное стационарное состояние среды при анализе гипопластической модели (2.1)–(2.3).

Численное решение задачи (2.4), (2.5) с граничными условиями (2.6) показывает, что полученные приращения компонент тензора напряжений уже после первой итерации равны нулю с относительной погрешностью 5 %, т. е. $\max_{i,j} |\Delta \bar{\sigma}_{ij}^n / \bar{d}| \approx 0,05$. Как и ожидалось, стационарное состояние с достаточной точностью достигается за одну итерацию процесса (2.9). Таким образом, найденное уже на первой итерации приращение поля перемещений $\Delta \mathbf{u}$ представляет собой искомое стационарное поле скоростей, реализуемое в сыпучей среде при сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций.

На основе найденного поля $\Delta \mathbf{u}$ численно с помощью метода Эйлера строились траектории движения материальных точек среды. Расчеты показали, что полученные траектории

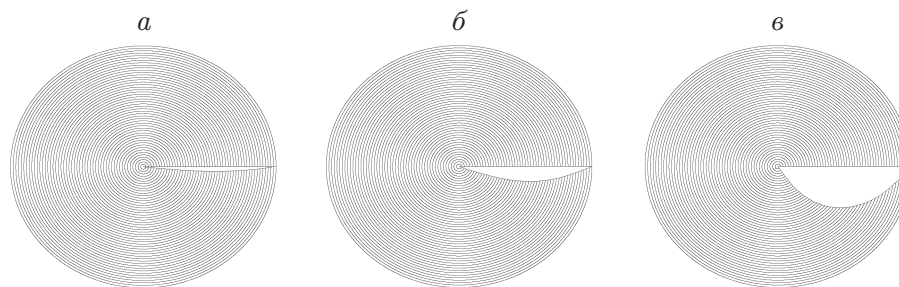


Рис. 2. Расчетная картина деформирования после 3 (а), 10 (б) и 30 (в) циклов нагружения ($\bar{a}/\bar{b} \approx 1,1$)

представляют собой замкнутые линии, форма которых близка к эллиптической. Однако периоды обращения разных точек по найденным траекториям различны. Перед началом деформирования отметим материальные точки, лежащие на большой полуоси эллипса. Расчеты показали, что по истечении одного полного цикла деформирования (один полный оборот материальной точки внешней границы эллипса вокруг центра) все внутренние точки не возвращаются в первоначальные положения, а занимают новые положения. Однако в силу малости эксцентриситета эллипса новые положения незначительно отличаются от исходных. Тем не менее с увеличением числа циклов нагружения это отличие увеличивается. На рис. 2 показаны начальные положения, траектории и конечные положения наблюдаемых материальных точек среды после первых 3, 10 и 30 циклов нагружения. Видно, что исходная прямая, которую составляли наблюдаемые точки большой полуоси, трансформировалась в кривую, соответствующую экспериментальной (см. рис. 1).

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПОДОБИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Как известно, при малых скоростях нагружения поведение сыпучих материалов (песков) подобно поведению вязких жидкостей. В работе [4] приведены результаты экспериментов, которые показывают соответствие поведения сухого кварцевого песка, глицерина и меда при сложном плоском нагружении.

3.1. Уравнения сыпучей среды. При малых деформациях уравнения движения среды (в декартовой системе координат) имеют вид [8, 9]

$$\begin{aligned} \rho_s \tau_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, & \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + 2(\mu_d + \chi_d p), \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, & \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где τ_0 — начальная объемная концентрация твердой фазы; γ_{ij} — девиатор тензора деформаций; σ_{ij} — тензор напряжений; u_i — перемещения; p — давление в среде; $\chi_d = \chi_d(\tau_0)$ — зависимость коэффициента расширения от τ_0 [9]; $\mu_d(\tau_0) = 2\mu_s \tau_0 / (3 - \tau_0)$ — модуль сдвига пористого материала [10]; μ_s — модуль сдвига сплошного материала; $i, j = 1, 2, 3$.

Зависимость коэффициента расширения $\chi_d = \chi_d(\tau_0)$, приведенная в работах [8, 9], показана на рис. 3. Зависимость $\chi_d = \chi_d(\tau_0)$ учитывает только переупаковку сыпучей среды от минимальной (кубическая упаковка) с концентрацией $\tau_0 = \pi/6 \approx 0,524$ до максимальной (тетраэдрическая упаковка) с концентрацией $\tau_0 = \pi/(3\sqrt{2}) \approx 0,74$. В уравнения (3.1) добавлены деформации от упругого сжатия материала частиц (μ_d — модуль сдвига пористого материала [10]). Таким образом, в системе уравнений (3.1) учитываются как переупаковка сыпучего материала, так и упругое сжатие частиц.

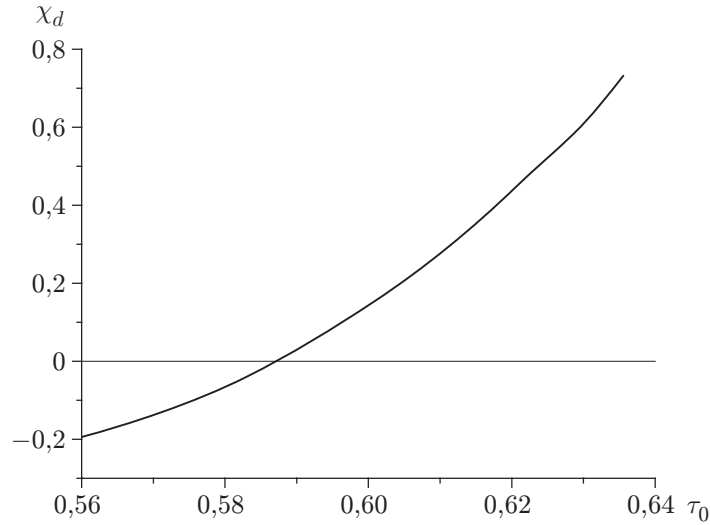


Рис. 3. Зависимость коэффициента расширения χ_d от начальной объемной концентрации τ_0 [9]

В работе [9] приведен функциональный вид зависимости $\chi_d = \chi_d(\tau_0)$, но эта зависимость достаточно сложна. Поэтому зависимость $\chi_d = \chi_d(\tau_0)$ будем аппроксимировать квадратичной формулой

$$\chi_d = \chi_d(\tau_0) \approx 30,630\,543 - 114,207\,259\tau_0 + 105,654\,025\tau_0^2. \quad (3.2)$$

При $\tau_0 = 0,56$ $\chi_d = -0,1924$, при $\tau_0 = 0,5874$ $\chi_d = 0$, при $\tau_0 = 0,64$ $\chi_d = 0,8138$.

В дальнейшем предполагается, что начальная объемная концентрация твердой фазы $\tau_0 = \text{const}$, т. е. пористость $e_0 = 1 - \tau_0$ в процессе деформирования не меняется. Как известно, в процессе деформирования сыпучие среды уплотняются (эффект дилатансии). В экспериментах [4. С. 59] после пяти циклов нагружения дилатансия исчерпывает себя — начальная пористость $e_0 = 0,435$ ($\tau_0 = 0,565$) принимает значение $e_0 = 0,364$ ($\tau_0 = 0,636$), соответствующее стационарному состоянию. При этом коэффициент расширения увеличивается от значения $\chi_d = -0,169$ до значения $\chi_d = 0,731$.

3.2. Линейное приближение. В линейном приближении система уравнений (3.1) сводится к следующей [9]:

$$\nabla P = \chi_d \Delta \mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.3)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор перемещений; $P = \ln(\chi_d p + \mu_d)$. Уравнения (3.3) имеют вид уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, записанных для перемещений.

3.3. Уравнения движения. Рассмотрим плоское сложное деформирование среды. В полярной системе координат (r, φ) система уравнений (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \chi_d \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), & \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= \chi_d \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \\ & & \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$; u — перемещение по нормали; v — перемещение по касательной к нормали.

При $r = r_w$ перемещения равны перемещениям стенки по нормали и по касательной:

$$u = \frac{\partial r_w}{\partial t} \Delta t, \quad v = l \frac{\partial^2 r_w}{\partial t \partial \varphi} \Delta t \quad (3.5)$$

(Δt — шаг по времени; $l = \text{const} \leq 1$ — коэффициент проскальзывания среды на стенке).

На оси цилиндра ($r = 0$) должны выполняться условия

$$u = v = 0. \quad (3.6)$$

3.4. Деформация цилиндра. Рассмотрим малые деформации стенки цилиндрического сосуда (заполненного сыпучей или вязкой средой) по закону

$$r_w(t, \varphi) = r_0[1 + 0,5m \cos 2\alpha(t, \varphi)], \quad (3.7)$$

где эксцентриситет эллипса m — малый параметр, квадратом которого можно пренебречь; $\alpha(t, \varphi) = \varphi + \pi(1 - 4t/t_e)/2$; t_e — время полного оборота эллипса (3.7) или время одного цикла нагружения.

3.5. Введение малых параметров. В уравнениях (3.4) выполним следующее преобразование переменных:

$$t = t_e \tilde{t}, \quad r = r_0 \tilde{r}, \quad u = r_0 \tilde{u}, \quad v = (r_0/m) \tilde{v}, \quad P = (\chi_d/m^2) \tilde{P}. \quad (3.8)$$

В безразмерных переменных (3.8) система уравнений (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} &= m^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right) - m \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} &= m \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} \right) + m^2 \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}, \\ m \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi} + m \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть m мало, поэтому далее члены порядка m^2 отбрасываются. В результате система (3.9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} &= -m \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} = m \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} \right), \\ m \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi} + m \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Пусть $\partial \tilde{P}/\partial \tilde{r} = 0$ с точностью до членов порядка m^2 . Тогда в размерных переменных (3.8) система уравнений (3.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \quad \frac{1}{r} \frac{1}{\chi_d} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система уравнений (3.11) имеет общее решение в виде

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= -\frac{r}{4\chi_d} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - 1 \right] \frac{d^2 P}{d\varphi^2} - \frac{r}{2} \frac{dC(\varphi)}{d\varphi}, \\ v(r, \varphi) &= \frac{r}{4\chi_d} \left[2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - 1 \right] \frac{dP}{d\varphi} + rC(\varphi), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где давление $P(\varphi)$ и функция $C(\varphi)$ находятся из граничных условий (3.5).

Граничные условия (3.5) можно записать в виде

$$u = -2\pi \frac{\Delta t}{t_e} \frac{\partial r_w}{\partial \varphi}, \quad v = 8l\pi \frac{\Delta t}{t_e} (r_w - r_0). \quad (3.13)$$

Подставляя в граничные условия (3.13) решение (3.12), получим систему уравнений для функций $P(\varphi)$ и $C(\varphi)$:

$$\frac{\ln r_w - 1}{2\chi d} \frac{d^2 P}{d\varphi^2} + \frac{dC(\varphi)}{d\varphi} - 4\pi \frac{\Delta t}{t_e} \frac{\partial \ln r_w}{\partial \varphi} = 0,$$

$$C(\varphi) = 8l\pi \frac{\Delta t}{t_e} \left(1 - \frac{1}{r_w}\right) - \frac{2 \ln r_w - 1}{4\chi d} \frac{dP}{d\varphi}.$$

Решение системы уравнений (3.12) с граничными условиями (3.5), (3.6) имеет следующий вид (с точностью до квадрата малого параметра m):

$$u(t, r, \varphi) = 2\pi r (\Delta t / t_e) m [2(2l - 1) \ln(r / r_0) + 1] \sin 2\alpha(t, \varphi),$$

$$v(t, r, \varphi) = 4\pi r (\Delta t / t_e) m [2(2l - 1) \ln(r / r_0) + l] \cos 2\alpha(t, \varphi), \quad (3.14)$$

$$P(t, \varphi) = 4\pi r (\Delta t / t_e) m (2l - 1) \sin 2\alpha(t, \varphi) + P_0$$

($P_0 = \text{const}$ — начальное давление в среде). Решение (3.14) удовлетворяет граничным условиям (3.5), (3.6).

Точка с координатами (r_*, φ_*) за время Δt переместится в точку (r, φ) , координаты которой определяются формулами [11. С. 56–63]

$$r = r_* + u(t, r_*, \varphi_*), \quad \varphi = \varphi_* + v(t, r_*, \varphi_*) / r_*.$$

3.6. Результаты расчетов. Решение (3.14) позволяет рассчитать положения материальных точек среды в процессе деформирования. На рис. 4 показаны картины деформирования, полученные по закону (3.7) после 5 и 25 циклов нагружения и соответствующие экспериментальным кривым на рис. 1, б, в. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: радиус недеформированного цилиндра $r_0 = 20,03$ мм, эксцентриситет

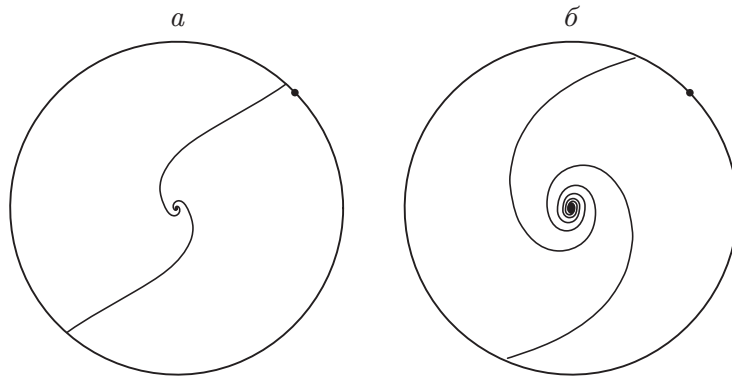


Рис. 4. Теоретическая картина деформирования после 5 (а) и 25 (б) циклов нагружения:

линия — геометрическое место материальных точек, которые до начала деформирования образовывали большую ось эллипса; точка — начальное положение конца выделенной линии на большой оси эллипса

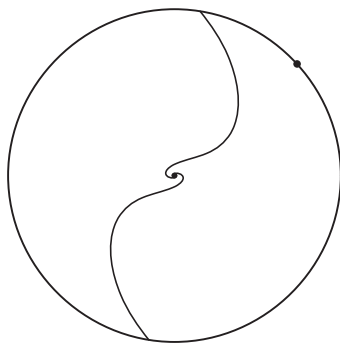


Рис. 5. Теоретическая картина деформирования после пяти циклов нагружения при $l = 1$:

точка — начальное положение конца выделенной линии на большой оси эллипса

эллипса $m = \sqrt{1 - (\bar{b}/\bar{a})^2} = 0,094385$ (соотношение большой и малой полуосей эллипса $\bar{a}/\bar{b} \approx 1,0045$), объемная концентрация песка $\tau_0 = 0,63$ (согласно формуле (3.2) коэффициент расширения $\chi_d = 0,61$), скорость вращения эллипса $1/t_e = 3,78 \text{ с}^{-1}$, параметр проскальзывания $l = 0,35$. Выбор коэффициента проскальзывания $l = 0,35$ обоснован качественным соответствием экспериментальной и теоретической картин деформирования (см. рис. 1, 4). Для случая $l = 1$ картина деформирования представлена на рис. 5. Видно, что картина течения не совпадает с полученной в эксперименте (см. рис. 1). Проскальзывание объясняется трехмерностью течения, когда верхняя поверхность среды является свободной, что можно учесть, уменьшая коэффициент проскальзывания.

4. АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работах [1–4] приведены результаты лабораторных экспериментов по сложному нагружению с непрерывным поворотом главных осей деформаций для сыпучих сред, вязких жидкостей и ряда смесей сыпучих и вязких сред. Если в процессе нагружения зафиксировать систему координат, связанную с осями эллипса, то результаты можно интерпретировать следующим образом: все материальные точки среды движутся по замкнутым траекториям с различными периодами обращения вокруг центра эллипса. За время, в течение которого какая-либо точка внешней границы описывает полный оборот вокруг центра (один цикл нагружения), все внутренние точки не успевают совершить полный оборот, т. е. “запаздывают”. Таким образом, обнаруживается эффект дифференциального вращения — направленный перенос масс. В силу запаздывания внутренних точек этот эффект аналогичен эффекту “западного дрейфа”.

Анализ результатов численных экспериментов на основе гипопластической модели позволяет сделать вывод, что модель предсказывает эффект направленного переноса масс по типу “западного дрейфа”.

Из проведенного исследования следует, что модель подобия вязкой несжимаемой жидкости также качественно предсказывает поведение реальных сред. Учитывая, что степень проявления эффекта дифференциального вращения в экспериментах существенно зависит от коэффициента сжатия эллипса (чем выше степень сжатия, тем сильнее эффект), можно сделать вывод, что при сложном нагружении степень проявления эффекта дифференциального вращения среды, вычисленная на основе модели подобия вязкой несжимаемой жидкости, превышает степень проявления эффекта, вычисленную на основе гипопластической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** О возможном механизме перемещения масс Земли // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1097–1099.
2. **Ревуженко А. Ф.** Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ. 1986. № 5. С. 150–158.
3. **Ревуженко А. Ф.** О приливном механизме переноса масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 6. С. 13–20.
4. **Ревуженко А. Ф.** Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2000.
5. **Lavrikov S. V., Revuzhenko A. Ph.** Complex loading of heterogeneous materials with redistribution of internal mass // Theor. Appl. Fracture Mech. 1998. V. 29. P. 85–91.
6. **Колымбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 133–142.
7. **Kolymbas D., Herle I., von Wolfersdorff P.-A.** Hypoplastic constitutive equation with internal variables // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1995. V. 19. P. 415–436.
8. **Вайсман А. М., Гольдштик М. А.** Деформирование зернистой среды // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 1. С. 61–64.
9. **Гольдштик М. А.** Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984.
10. **Киселев С. П.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев, В. М. Фомин, М. Ш. Шавалиев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992.
11. **Треффц Е.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1934.

Поступила в редакцию 9/VII 2008 г.
