

15. Galderbank P. H., Johnson D. S. L., Loudon I. Mechanics and mass transfer of the single bubbles in free rise through some Newtonian and non-Newtonian liquids // Chem. Engng Sci.— 1970.— V. 25, N 2.

Поступила 27/X 1987 г.

УДК 532.517.3

О ВЫЧИСЛЕНИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ АТТРАКТОРОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

С. И. Лукащук, Г. Е. Фалькович, А. И. Черных

(Новосибирск)

В основе современного подхода к проблеме возникновения турбулентности лежит предположение о конечномерности явлений, определяющих развитие неустойчивостей. Экспериментальные данные по ламинарно-турбулентному переходу [1, 2] свидетельствуют в пользу этой точки зрения, хотя строгая математическая формулировка такого утверждения — теорема о центральном многообразии [3, 4] — доказана только для бифуркаций потери устойчивости стационарной точкой. В настоящее время имеются интуитивные аргументы [5], делающие правдоподобным существование конечного набора возбужденных степеней свободы, определяющих динамику системы на больших временах для более сложных режимов движения, чем предельный цикл.

В связи с этим представляет значительный интерес определение числа независимых переменных, однозначно описывающих потенциально бесконечномерное движение диссипативной сплошной среды, когда число степеней свободы, реально вовлеченных в движение, заранее неизвестно. Задание необходимого числа таких переменных выполняет взаимно однозначное отображение фазового пространства асимптотического режима движения в евклидово пространство, размерность которого будем называть размерностью вложения.

В настоящей работе предлагается прямой способ определения размерности вложения непосредственно из экспериментальных данных, основанный на изучении функциональной зависимости между переменными. Наряду с размерностью вложения рассматриваются скейлинговые размерности [6, 7] и возможность их измерения в эксперименте. Затем экспериментальные данные, полученные при исследовании ламинарно-турбулентного перехода в круговом течении Куэтта, анализируются с точки зрения размерностей.

1. Размерность вложения. Пусть для некоторой диссипативной динамической системы измеряется зависимость от времени большого числа различных величин $x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Если движение конечномерно, число независимых переменных равно n_e и первые n_e из измеренных x_i взаимно однозначно связаны с фазовыми координатами аттрактора, то всякая измеряемая величина x_k при $k > n_e$ является функцией (вообще говоря, неизвестной) фазовых переменных x_1, \dots, x_{n_e} и ее эволюция со временем функционально представима через зависимость от времени фазовых координат: $x_k(t) = f_k(x_1(t), \dots, x_{n_e}(t))$. Если для всякого k проверять наличие или отсутствие функциональной зависимости $x_{k+1}(t)$ от предыдущих k измеряемых величин $x_1(t), \dots, x_k(t)$, то ясно, что функциональная зависимость первый раз появится при $k = n_e$, поскольку сами фазовые переменные функционально независимы. Если движение бесконечномерно, то возникновение такой функциональной зависимости невозможно ни при каком k .

Геометрически функциональная зависимость изображается гладкой поверхностью в $(k + 1)$ -мерном пространстве. Если x_i^0 — точка, через которую проходит фазовая кривая в момент времени t_0 , то при движении на аттракторе за бесконечно большие времена фазовая кривая будет возвращаться сколь угодно близко к ней. Введем k -мерную евклидову метрику $\rho_k(t, t_0) = \left[\sum_{i=1}^k (x_i(t) - x_i^0)^2 \right]^{1/2}$. Возьмем сферу радиуса ε с центром

в точке x_i^0 . Пусть $d(\varepsilon)$ — наибольшее значение $d(t, t_0) = |x_{k+1}(t) - x_{k+1}^0|$ для всех точек фазовой кривой, попавших внутрь этой сферы за бесконечное время. Тогда при наличии гладкой функциональной зависимости при малых ε будут получаться малые $d(\varepsilon)$ и должна существовать константа C такая, что выполняется условие $d(\varepsilon) < C\varepsilon$. Если функциональной зависимости нет, то $x_{k+1}(t)$ принимает значения, не зависящие от $x_i(t)$

($i \leq k$), и, следовательно, возможно, что $d(t, t_0) \neq 0$ даже при $\rho_k = 0$. В этом случае $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} d(\varepsilon) > 0$.

Критерий вложения имеет простую геометрическую интерпретацию. Спроектируем фазовую кривую на плоскость переменных $\rho(t, t_0)$, $d(t, t_0)$. Тогда $d(\varepsilon)$ как функция ε имеет смысл огибающей сверху для этой проекции. В случае вложения огибающая входит в точку с координатами $(0, 0)$ с ненулевым наклоном. В противном случае огибающая подходит к вертикальной оси с ненулевым значением $d(0)$, соизмеримым с размерами аттрактора.

Рассмотрим пример фазовой траектории, намотанной на двумерный тор: $x_1 = (a + b \cos \varphi_2) \cos \varphi_1$, $x_2 = (a + b \cos \varphi_2) \sin \varphi_1$, $x_3 = b \sin \varphi_2$, где $a > b > 0$. Пусть фазовая траектория задается уравнениями $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t$ с несоизмеримыми ω_1 и ω_2 . Локально тор двумерен, однако координаты точки на его поверхности (φ_1, φ_2) не определяются однозначно двумя декартовыми координатами. Связано это с тем, что фиксированным значениям, например, координат (x_1, x_2) соответствует прямая, которая в случае общего положения протыкает тор в двух точках. Если предложенным способом проверять функциональную зависимость координаты x_3 от x_1 и x_2 , то на двумерной плоскости (ρ, d) $d(0)$ будет равно длине отрезка, отсекаемого точками протыкания на прямой, заданной уравнениями $x_1 = x_1(t_0)$, $x_2 = x_2(t_0)$. Проверка на функциональную зависимость от всех трех декартовых координат любой из координат, взятой с запаздыванием, даст $d(0) = 0$, и, следовательно, двумерный тор вложим в трехмерное пространство.

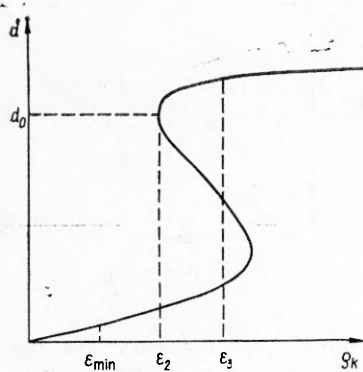
Если фазовая траектория незамкнута, то за бесконечное время ее проекция на плоскость (ρ, d) всюду плотно заполняет окрестность любой точки, через которую она проходит. В этом случае существуют такие t , что проекция проходит сколь угодно близко к оси d и огибающая сверху $d(\varepsilon)$ определена корректно при любых сколь угодно малых ε .

В эксперименте измерения выполняются в течение времени T_m через малые, но конечные интервалы ΔT . Ограничение конечности T_m приводит к тому, что плоскость (ρ, d) заполняется не всюду плотно. Линия конечной длины в случае общего положения в строгом смысле вкладывается в трехмерное пространство. Следовательно, при $k \geq 3$ существует ε_p такое, что внутрь сферы $|x - x^0| = \varepsilon_p$ попадает только та часть фазовой кривой, которая проходит через точку x^0 в момент времени t_0 .

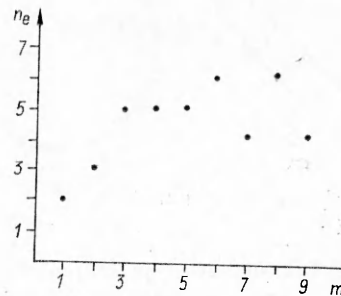
Все это означает невозможность предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и необходимость определения промежуточной асимптотики $d(\varepsilon)$ в некотором диапазоне масштабов (ε_{\min} , ε_{\max}). В качестве ε_{\min} следует принять значение, в несколько раз превосходящее ε_p , усредненное по аттрактору. Для ε_{\max} должно выполняться условие $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_{\max} \leq R$ (R — размер аттрактора).

Проводя по огибающей $d(\varepsilon)$ методом наименьших квадратов прямую в этом диапазоне масштабов и экстраполируя ее к $\varepsilon = 0$, получим новую формулировку критерия вложения. Если отрезок, отсекаемый прямой на оси d , по модулю много меньше диапазона изменения d , то достигнута размерность вложения.

Заметим, что выбор ε_{\max} становится слишком субъективным. Кроме того, обработка экспериментальных реализаций показала, что огибающая двумерной проекции слева и сверху часто имеет вид, как на рис. 1. Согласно только что сформулированному критерию, аттрактор вкладывается в пространство, если ограничиться как можно меньшими масштабами и положить $\varepsilon_{\max} < \varepsilon_2$. Против этого есть несколько возражений. Во-первых, с увеличением длины реализации ε_2 может уменьшиться и критерий перестанет выполняться. Во-вторых, возможно, что на сфере радиуса ε_2 , x_{k+1} как функция x_i ($i = 1, \dots, k$) неоднозначна. В-третьих, как правило, $\varepsilon_2 \ll d_0$, где d_0 сравнимо с размерами аттрактора, и добавление x_{k+1} как новой координаты значительно увеличивает расстояние по метрике до тех точек, до которых оно было чуть больше ε_2 , а $d \approx d_0$.



Р и с. 1



Р и с. 2

Эти соображения и наблюдения приводят к такой окончательной форме критерия вложения, в которой вообще не упоминаются малые масштабы. Размерность пространства увеличивалась до тех пор, пока огибающая не становилась однозначной функцией, выходящей из нуля и целиком лежащей ниже прямой $d = C\rho_k$ (C невелико). Полученная таким путем оценка размерности вложения может быть иногда понижена. Однако для этого, как видно из проделанного анализа, в каждом конкретном случае необходимо детальное исследование.

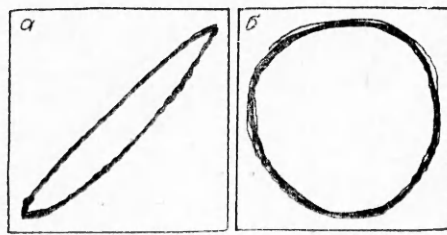
2. Эксперимент. Размерность вложения и скейлинговая размерность по сетям [6, 7] вычислялись для аттракторов ламинарно-турбулентного перехода в круговом течении Куэтта — Тейлора с вращающимся внутренним цилиндром. Измерения проводились на гидродинамическом стенде, описанном в [8]. Диаметр внутреннего цилиндра $d_i = 35$ мм. Жидкость заполняет зазор между цилиндрами толщиной $\Delta = 10$ мм и высотой 280 мм. Для такой геометрии основному состоянию течения соответствуют конфигурация из 28 вихрей Тейлора и изгибаемая мода колебаний вихрей с шестью периодами на длине окружности. С помощью электродиффузионной методики [9] измерялось локальное касательное напряжение одновременно в трех различных точках на внутренней поверхности неподвижного цилиндра, отвечающих границам соседних пар вихрей Тейлора. Измеренные сигналы накапливались и обрабатывались с помощью ЭВМ.

Эксперимент проводился в диапазоне $0,015 Re_c - 1,05 Re_c$, где $Re_c = 1030$ — критическое число Рейнольдса возникновения азимутальных волн ($Re = \omega d_i \Delta / 2\nu$, ω — угловая скорость вращения цилиндра, ν — кинематическая вязкость). Типичная экспериментальная реализация состоит из 64 или 128 тысяч точек для каждого канала при частоте квантования 16 Гц. Число Рейнольдса во время измерений поддерживалось с точностью не хуже 0,15 %.

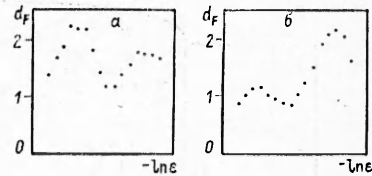
Нами использовались два способа построения фазового пространства: первый совпадал с общепринятым [10—13] построением из одной измеряемой переменной, во втором пространство строилось по трем измеряемым величинам, отсчеты которых брались в один и тот же момент времени, после чего выполнялся сдвиг на постоянный интервал T .

Фазовое пространство строилось по медленным огибающим сигналам, вычисленным фильтрацией на частоте колебаний азимутальных волн. Отфильтрованная огибающая представляла собой массив из 8000 точек с интервалом между точками, равным одной секунде, что соответствует примерно 80 точкам на характерный период медленной огибающей. При построении фазового пространства большой размерности сдвиг по времени брался равным 40 интервалам квантования, т. е. примерно половине этого периода.

Ряд перестроек течения, наблюдаемых в эксперименте, описан в [9]. Ниже изучаются режимы, отвечающие двумерным торам и следующим за ними аттракторам. Номера режимов $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ соответствуют $Re = 1051,8; 1058,2; 1060,3; 1061; 1062,9; 1064; 1065; 1066; 1066,8$.



Р и с. 3



Р и с. 4

3. Вычисление размерностей и обсуждение результатов. На рис. 2 изображена зависимость размерности вложения от номера эксперимента. Двумерная проекция в координатах (ρ_k, d) строилась для 15 точек, равномерно распределенных вдоль реализации сигнала, и результат наложения их друг на друга выводился на экран графического дисплея. Наложение нескольких проекций уменьшает вероятность занижения размерности, поскольку решение о вложении определяется худшим из всех случаев.

О ранее изученных режимах известно, что $m = 1$ отвечает предельному циклу, $m = 2$ — резонансному тору с числом вращения $13/31$, $m = 3$ — резонансному тору с числом вращения $3/7$ [9]. При $m = 3$ размерность вложения $n_e = 4$, что слишком много для тора. Это может быть связано с тем, что точки протыкания фазовой траекторией трансверсальной плоскости не ложатся на замкнутую кривую, гомеоморфную окружности, как это должно быть для тора, а образуют довольно рассеянное облако [9]. Рассеяние может быть обусловлено как экспериментальным шумом, так и тем, что аттрактор реально не тор. Как видно из рис. 2, число переменных, достаточное для описания течения, остается небольшим в области ламинарно-турбулентного перехода. Следует также отметить немонотонность зависимости n_e от Re , означающую, что с ростом нелинейности аттрактор может как усложняться, так и упрощаться.

Обсудим теперь результаты измерения размерности по сетям. При этом определяется число точек $N(\epsilon)$ в покрывающей аттрактор сети с размером ячейки ϵ . Размерность предельного цикла должна быть равна единице. На рис. 3 показана проекция цикла на плоскость исходных переменных (а) и плоскость переменных, найденных методом временных рядов (б). На рис. 4 приведена зависимость локального наклона d_F кривой $\ln N$ от $\ln \epsilon$, полученной по методу сетей в диапазоне масштабов от $2 \cdot 10^{-1}$ до $4 \cdot 10^{-2}$ для этих двух способов построения фазового пространства. Значения $\ln N$ вычислялись для 20 значений ϵ с равными интервалами в логарифмическом масштабе. Наклон определялся методом наименьших квадратов по трем точкам. Видно, что только в случае б намечился участок в области промежуточных масштабов с наклоном, близким единице. Отсутствие такого участка в случае а связано с сильной вытянутостью цикла вдоль диагонали. Из-за этого исчезают такие масштабы, на которых через квадрат площадью ϵ^2 проходит только одна ветвь цикла, но зашумленность траектории еще не сказывается.

При $m = 2$, согласно рис. 2, следует использовать три переменных. Примем диапазон изменения сигналов на каждой из них равным единице, тогда шаг дискретизации таков, что среднее расстояние между двумя последовательными по времени точками порядка 10^{-2} . Диапазон изменения ϵ от $2 \cdot 10^{-1}$ до $2 \cdot 10^{-3}$ разобьем на 14 шагов, равномерных в логарифмической шкале. Зависимость наклона кривой $\ln N$ от $\ln(\epsilon^{-1})$ представлена на рис. 5. Видно, что на первых шести точках (т. е. в диапазоне $\epsilon = 2 \cdot 10^{-1} - 3,8 \cdot 10^{-2}$) размерность по сетям близка к 2. Вычисляя d_F как среднюю по шести точкам, получим $d_F = 2,07 \pm 0,04$. Указанная здесь погрешность есть вычисляемая стандартным образом (по среднеквадратичному отклонению) погрешность интерполяции. Точность измерения гидродинамических параметров из эксперимента не хуже 10^{-3} . Подчеркнем, что мы с вышеуказанной точностью ($4 \cdot 10^{-2}$) находим не раз-

мерность по ее буквальному топологическому определению (включающему предел при $N \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$), а скейлинговый индекс для некоторого интервала масштабов и конечного набора точек. Измерение размерности при $m = 2$ согласуется с утверждением [9] о двумерности аттрактора. Значительно менее достоверными представляются числа d_F (также близкие к 2), полученные при $m > 2$. Это связано с тем фактом, что с ростом числа k используемых переменных погрешность определения d_F растет приближенно по закону $\Delta d \sim e^{-1/d}$. Этот рост обусловлен эффективным уменьшением числа точек в фазовом пространстве по каждой из k переменных.

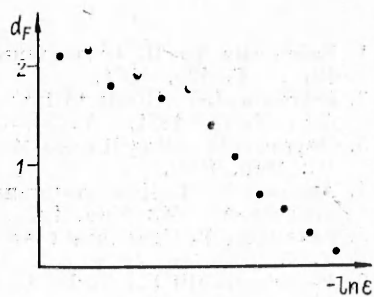


Рис. 5

Этот рост обусловлен эффективным уменьшением числа точек в фазовом пространстве по каждой из k переменных. Например, для $m = 5$: $k = 3, d_F = 2,15 \pm 0,07$; $k = 4, d_F = 2,14 \pm 0,14$; $k = 5, d_F = 2,06 \pm 0,29$; $k = 6, d_F = 1,91 \pm 0,36$. Отсюда, в частности, следует, что попытки найти достаточное число переменных по насыщению зависимости $d_F(k)$ связаны со значительными трудностями. Для более достоверного измерения скейлинговых размерностей надо увеличивать число точек в исходной реализации, причем не за счет уменьшения шага дискретизации (от которого d_F практически не зависит), а путем увеличения времени наблюдения. Это требует постановки новых экспериментов.

Следует указать, что, поскольку априори оценить погрешность, внесенную в определение скейлинговых размерностей конечностью и дискретностью траектории, затруднительно, вряд ли при нынешних экспериментальных и вычислительных возможностях имеет смысл говорить об измерении дробной части d_F . Для доказательства стохастичности аттрактора более подходящим представляется измерение положительных ляпуновских показателей [12—18]. Однако как целочисленная величина d_F — содержательная характеристика размерности многообразия, в которое аттрактор может быть отображен локально [6, 12, 18]. Предложенная же нами размерность вложения (глобальная характеристика) равна размерности евклидова пространства, в которое это многообразие вложимо без самопересечений. Регулярная процедура построения минимального набора переменных, необходимого для локального описания аттрактора (локальных координат на многообразии), отсутствует. Поэтому представляется важным оценить сверху число переменных общего положения, необходимых для описания течения. Эту оценку и дает размерность вложения n_e .

Благодаря отказу от локального характера критерия вложения для вычисления n_e приходится обрабатывать массивы данных, существенно меньшие, чем для определения скейлинговых размерностей. Алгоритм нахождения n_e прост, не требует большого объема вычислений и легко реализуем с помощью компьютера.

Отказ от локального характера критерия вложения приводит также к тому, что размерность вложения n_e , например, сложной периодической траектории может оказаться больше трех. Завышенное по сравнению с локальным критерием значение n_e может служить в этом случае свидетельством сложного устройства цикла и большой вероятности превращения его при шевелении параметров системы в более сложный режим движения, уже не допускающий понижения n_e .

Сказанное позволяет сделать общий вывод: определение размерности вложения должно быть первым шагом в изучении конечномерной динамики сплошной среды или конечномерной системы с очень большим числом степеней свободы.

Авторы благодарны В. С. Львову и А. А. Предтеченскому за обсуждение работы и Е. А. Кузнецову за стимулирующее влияние при ее написании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН.— 1978.— Т. 125, № 1.
2. Eckmann J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems // Rev. Modern Phys.— 1981.— V. 53.— P. 643.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1978.
5. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики.— М.: Мир, 1984.— Т. 2.
6. Farmer J., Ott E., Yorke J. The dimension of chaotic attractors // Physica D.— 1983.— V. 7.— P. 153.
7. Лукацук С. Н., Предтеченский А. А., Фалькович Г. Е., Черных А. И. О вычислении размерностей аттракторов по экспериментальным данным.— Новосибирск, 1985.— (Препр./ИАиЭ СО АН СССР; № 280).
8. Львов В. С., Предтеченский А. А., Черных А. И. Бифуркации и хаос в системе вихрей Тейлора: натурный и численный эксперимент // ЖЭТФ.— 1981.— Т. 80, № 3.
9. Лукацук С. Н., Предтеченский А. А. Наблюдение резонансных торов в фазовом пространстве течения Куэтта // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274, № 6.
10. Packard N., Gruitchfield J. et al. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett.— 1980.— V. 45, N 9.
11. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture notes in mathematics.— Berlin: Springer-Verlag, 1980.— V. 898.
12. Brandstater A., Swift J. et al. Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system // Phys. Rev. Lett.— 1983.— V. 51, N 16.
13. Brandstater A., Swift J., Swinney H., Wolf A. A strange attractor in a Couette — Taylor experiment // Turbulent and chaotic phenomena in fluids: Proc. IUTAM Symp., Kyoto, 1983.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
14. Malraison B., Aften P. et al. Dimensions of strange attractors. An experimental determination for the chaotic regime of two convective systems // J. de Phys. Lett.— 1983.— V. 49.— P. 897.
15. Roux J., Simoyi R., Swinney H. Observation of the strange attractor // Physica D.— 1983.— V. 8.— P. 257.
16. Guckenheimer J., Buzina J. Dimension measurements for geostrophic turbulence // Phys. Rev. Lett.— 1983.— V. 51.— P. 1438.
17. Giglio M., Musazzi S., Umberto S. Low-dimensionality turbulent convection // Phys. Rev. Lett.— 1984.— V. 53.— P. 2402.
18. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ.— 1984.— Т. 39, № 12.

Поступила 19/Х 1987 г.

УДК 532.593

СТРУКТУРА ВНУТРЕННИХ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ СРЕДНИМ СЛОЕМ

А. В. Аксенов, В. В. Можаяв, В. Е. Скороваров,
А. А. Шеронов

(Москва)

При определении угла зоны волновых возмущений внутренних корабельных волн по амплитудным характеристикам возникают трудности нахождения границы этой зоны [1, 2]. В настоящей работе делается попытка зафиксировать границы этой области по линиям горбов и впадин волнового возмущения в следе за движущимся источником.

В случае поверхностных корабельных волн линии постоянной фазы имеют точку возврата. При этом одному семейству гладких кривых соответствует длинноволновая часть спектра возмущений (поперечные волны), а другому — коротковолновая (продольные волны) [3]. Прямая, проходящая через точки возврата линий постоянной фазы, образует с осью движения источника угол, равный полураствору угла Кельвина. Эффективность возбуждения того или иного участка спектра возмущений определяется соотношением между характерным горизонтальным размером источника и максимальной длиной волны или значением обычного числа Фруда.

Возбуждение отдельных участков спектра внутренних корабельных волн в трехслойной жидкости со стратифицированным средним слоем осуществлялось изменением