ДОКЛАДЫ АН ВШ РФ
2013 январь–июнь № 1 (20)
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 517.946

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО СФЕРИЧЕСКИМ СРЕДНИМ

А.Х. Бегматов, Г.М. Джайков

Новосибирский государственный технический университет
Новосибирский государственный университет
begah@ngs.ru

Изучается задача интегральной геометрии в полосе на семействе кривых сферического типа с заданной весовой функцией. Доказана теорема единственности и получена явная формула для образа Фурье решения рассмотренной задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций.

Ключевые слова: задачи интегральной геометрии, сферические средние, преобразование Фурье, формула обращения.

Введение

В работе исследуются задачи восстановления функции в полосе, если известны интегралы от этой функции по кривым заданного семейства. Такие задачи называются задачами интегральной геометрии [1].

Для первой постановки кривые представляют собой полуокружности произвольного радиуса с центром на фиксированной прямой. Во второй постановке рассматриваются окружности, касающиеся фиксированной прямой. Вопросы единственности решения подобных задач рассматривались в работах [2, 3].

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [4]. Формулы обращения для задачи интегральной геометрии на семействах парабол получены в [5, 6]. В работе [7] изучены вопросы единственности решения широкого класса задач интегральной геометрии на плоскости. В работе [8] приводятся теорема единственности решения задачи интегральной геометрии на кривых эллиптического типа и аналитическое представление решения в терминах образов Фурье по первой переменной.

В первом разделе приводятся постановки двух задач восстановления функции по интегральным данным. В первом случае центры полуокружностей лежат на оси $y=0$. Во втором случае окружности, по которым ведется интегрирование, опираются на ось $y=0$. Исследуются вопросы единственности решения интегральных уравнений Вольтерра, связанных с изучаемыми задачами интегральной геометрии. Во втором разделе доказана новым методом теорема единственности решения задачи восстановления функции, если известны интегралы от этой функции по всевозможным окружностям в полосе с заданной весовой функцией. Получено аналитическое представление решения в терминах образов Фурье по первой переменной.

Работа частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, грант № 16.740.11.0057.

1. Сферические средние и единственность решения интегрального уравнения Вольтерра

Рассмотрим операторное уравнение

$$\int_{\Gamma(x,y)} g(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi = f(x,y).$$

относительно функции двух переменных $u(x,y)$.

Обозначим $L_H = \{(x,y): x \in R^1, 0 \le y \le H\}$.

Задача 1. В полосе L_H восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если известны интегралы от нее по кривым семейства $\{\Upsilon(x,y)\}$:

$$\int_{\Upsilon(x,y)} u(\xi,\eta)d\xi = f(x,y), \tag{1}$$

где произвольная кривая семейства представлена выражением

$$\Upsilon(x,y) = \left\{(\xi,\eta): (x-\xi)^2 + \eta^2 = y^2, 0 \le \eta \le y \le H\right\}.$$

Задача 2. В полосе L_H восстановить функцию двух переменных $u(x,y)$, если известны интегралы от нее по кривым семейства $\{\Gamma(x,y)\}$:

$$\int_{\Gamma(x,y)} u(\xi,\eta)ds = f(x,y), \tag{2}$$

где произвольная кривая семейства определяется выражением

$$\Gamma(x,y) = \left\{(\xi,\eta): (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = y^2, 0 \le \eta \le 2y \le H\right\}.$$

Исследуем единственность решения (1) и (2) путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода [9].

Предложение 1. Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех (x,y) из полосы L_H, весовая функция $g(x,y,\xi,\eta) = 1$.

Тогда решение уравнения (1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе L_H единственно.

Доказательство. Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\int_0^y \frac{u(x-h,\eta) + u(x+h,\eta)}{h} \eta d\eta = f(x,y), \tag{3}$$

где $h = \sqrt{y^2 - \eta^2}$.

Применим к обеим частям уравнения (3) преобразование Фурье по переменной x:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x,y)\,dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\left[\int_{0}^{y}\frac{u(x-h,\eta)+u(x+h,\eta)}{h}\eta d\eta\right]dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\frac{u(x-h,\eta)+u(x+h,\eta)}{h}\eta dx d\eta,$$

$$\int_{0}^{y}\hat{u}(\lambda,\eta)\cos\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)\frac{\eta}{\sqrt{y^2-\eta^2}}d\eta=\hat{f}_1(\lambda,y),\ \hat{f}_1(\lambda,y)=\hat{f}(\lambda,y)/2.$$

Мы получили интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции $\hat{u}(\lambda,y)$

$$\int_{0}^{y}\hat{u}(\lambda,\eta)\frac{H(\lambda,y,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta=\hat{f}_1(\lambda,y), \tag{4}$$

где

$$H(\lambda,y,\eta)=\frac{\eta\cos\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y+\eta}}. \tag{5}$$

Здесь и всюду далее через $\hat{u}(\lambda,y)$ и $\hat{f}(\lambda,y)$ обозначены преобразования Фурье по переменной x функций $u(x,y)$, $f(x,y)$ соответственно. Уравнение (4) имеет интегрируемую особенность на диагонали $y=\eta$. Как видно из формулы (5), функция $H(\lambda,y,\eta)$ непрерывна в области $0<\eta\le y<H$ и $H(\lambda,y,y)=\sqrt{\frac{y}{2}}\ne 0.$

Используя выражение (5) для функции $H(\lambda,y,\eta)$, нетрудно показать, что частная производная первого порядка по переменной y этой функции имеет слабую особенность на диагонали $y=\eta$:

$$H'_y(\lambda,y,\eta)=$$

$$=\frac{-\eta\left[2y\sqrt{y+\eta}\sin\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)+\sqrt{y-\eta}\cos\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)\right]}{2\sqrt{y-\eta}\sqrt{(y+\eta)^3}}.$$

Мы можем свести уравнение (4) к уравнению Вольтерра второго рода, применяя прием Абеля [10]. Для этого умножим равенство (4) на $\left(t-y\right)^{-1/2}$ и проинтегрируем по y в пределах от нуля до t. Меняя в возникающем повторном интеграле порядок интегрирования, находим

$$\int_0^t \frac{\hat{f}_1(\lambda,y)}{\sqrt{t-y}}dy = \int_0^t \frac{dy}{\sqrt{t-y}} \int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta) H(\lambda,y,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} =$$

$$= \int_0^t \hat{u}(\lambda,\eta)\left[\int_\eta^t \frac{H(\lambda,y,\eta)}{\sqrt{t-y}\sqrt{y-\eta}}dy\right]d\eta. \qquad (6)$$

Стоящая здесь под интегралом в квадратных скобках функция

$$T(t,\eta,\lambda) = \int_\eta^t \frac{H(\lambda,y,\eta)}{\sqrt{t-y}\sqrt{y-\eta}}dy$$

имеет конечное значение, отличное от нуля, при $t=\eta$. Чтобы убедиться в этом, сделаем замену переменной

$$y = t\cos^2\varphi + \eta\sin^2\varphi .$$

Тогда функция $T(t,\eta,\lambda)$ примет следующий вид:

$$T(\lambda,t,\eta) = 2\int_0^{\pi/2} H\left(\lambda, t\cos^2\varphi + \eta\sin^2\varphi, \eta\right)d\varphi, \qquad (7)$$

где

$$H\left(\lambda, t\cos^2\varphi + \eta\sin^2\varphi, \eta\right) =$$

$$= \frac{\eta\cos\left(\lambda\sqrt{t-\eta}\cos\varphi\sqrt{t\cos^2\varphi + \eta\left(1+\sin^2\varphi\right)}\right)}{\sqrt{t\cos^2\varphi + \eta\left(1+\sin^2\varphi\right)}}.$$

Отсюда, полагая $\eta = t$, находим

$$T(\lambda,t,t) = \pi\frac{\sqrt{2t}}{2} \neq 0 .$$

Используя формулу (7), легко также убедиться в том, что функция $T(\lambda,t,\eta)$ имеет непрерывную производную по переменной t всюду за исключением диагонали

$\eta = t$. На диагонали $T_t(\lambda, t, \eta)$ имеет интегрируемую особенность вида $(t-\eta)^{-1/2}$. Дифференцируя равенство (6) и деля на $T(\lambda, t, t)$, получаем для отыскания $\hat{u}(\lambda, t)$ при каждом фиксированном λ интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\hat{u}(\lambda, t) + \int_0^t \hat{u}(\lambda, \eta) \frac{T_t(\lambda, t, t)}{T(\lambda, t, t)} d\eta = \frac{1}{T(\lambda, t, t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\hat{f}_1(\lambda, y)}{\sqrt{t-y}} dy \tag{8}$$

с ядром, имеющим интегрируемую особенность на диагонали. Как следует из общей теории, решение таких уравнений единственно [10].

Теперь рассмотрим операторное уравнение (2) на семействе окружностей.

Предложение 2. Пусть функция $f(x, y)$ известна для всех (x, y) из полосы L_H, весовая функция $g(x, y, \xi, \eta) = 1$.

Тогда решение уравнения (2) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе L_H единственно.

Доказательство. Уравнение (2) можно представить в другой форме:

$$\int_0^{2y} \frac{u(x-h, \eta) + u(x+h, \eta)}{h} y d\eta = f(x, y), \tag{9}$$

где $h = \sqrt{y^2 - (y-\eta)^2}$.

Применив к уравнению (9) преобразование Фурье по x, получим

$$\int_0^{2y} \hat{u}(\lambda, \eta) \cos\left(\lambda \sqrt{y^2 - (y-\eta)^2}\right) \frac{y}{\sqrt{y^2 - (y-\eta)^2}} d\eta = \hat{f}_1(\lambda, y),$$

или

$$\int_0^{2y} \hat{u}(\lambda, \eta) \frac{y \cos\left(\lambda \sqrt{(2y-\eta)\eta}\right)}{\sqrt{2y-\eta}\sqrt{\eta}} d\eta = \hat{f}_1(\lambda, y).$$

Сделаем замену $2y = y_1$:

$$\int_0^{y_1} \hat{u}(\lambda, \eta) \frac{H_1(\lambda, y_1, \eta)}{\sqrt{y_1 - \eta}} d\eta = \hat{f}_1(\lambda, y_1), \tag{10}$$

где

$$H_1(\lambda, y_1, \eta) = \frac{y_1 \cos\left(\lambda \sqrt{(y_1-\eta)\eta}\right)}{2\sqrt{\eta}}. \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что функция $H_1(\lambda, y_1, \eta)$ непрерывна в области $0 < \eta \le y_1 < H$ и $H_1(\lambda, y_1, y_1) = \frac{\sqrt{y_1}}{2} \ne 0$. Мы можем показать, что $\frac{\partial}{\partial y_1} H_1(\lambda, y_1, \eta)$ имеет слабую особенность на диагонали $y_1 = \eta$:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} H_1(\lambda, y_1, \eta) = \frac{\cos\left(\lambda\sqrt{(y_1-\eta)\eta}\right)}{2\sqrt{\eta}} - \frac{\lambda y_1}{4\sqrt{y_1-\eta}} \sin\left(\lambda\sqrt{(y_1-\eta)\eta}\right).$$

Чтобы свести уравнение (10) к уравнению Вольтерра второго рода, применим прием Абеля. Умножим уравнение (10) на $(t-y_1)^{-1/2}$ и проинтегрируем его по y_1 в пределах от нуля до t:

$$\int_0^t \frac{\hat{f}_1(\lambda, y_1)}{\sqrt{t-y_1}} dy_1 = \int_0^t \frac{dy_1}{\sqrt{t-y_1}} \int_0^{y_1} \hat{u}(\lambda, \eta) H_1(\lambda, y, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{y_1-\eta}} =$$

$$= \int_0^t \hat{u}(\lambda, \eta) \left[\int_\eta^t \frac{H_1(\lambda, y_1, \eta)}{\sqrt{t-y_1}\sqrt{y_1-\eta}} dy_1 \right] d\eta. \tag{12}$$

В последнем уравнении весовая функция

$$T(t, \eta, \lambda) = \int_\eta^t \frac{H_1(\lambda, y_1, \eta)}{\sqrt{t-y_1}\sqrt{y_1-\eta}} dy_1 \tag{13}$$

имеет конечные значения, отличные от нуля, при $t = \eta$.

Сделаем замену, как в задаче 1. Тогда уравнение (12) преобразуется к виду

$$T(\lambda, t, \eta) = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(t\cos^2\varphi + \eta\sin^2\varphi\right)\cos\left(\lambda\sqrt{(t-\eta)\eta}\cos\varphi\right)}{\sqrt{\eta}} d\varphi.$$

Полагая $\eta = t$, находим

$$T(\lambda, t, t) = \frac{\pi\sqrt{t}}{2} \ne 0.$$

На диагонали $\eta = t$ $T_t(\lambda, t, \eta)$ имеет интегрируемую особенность вида $(t-\eta)^{-1/2}$. Дифференцируя равенство (10), получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\hat{u}(\lambda, t) + \int_0^t \hat{u}(\lambda, \eta) \frac{T_t(\lambda, t, t)}{T(\lambda, t, t)} d\eta = \frac{1}{T(\lambda, t, t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\hat{f}_1(\lambda, y_1)}{\sqrt{t-y_1}} dy_1. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) также единственно.

2. Формула обращения и единственность решения задачи 1

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ известна в полосе $L_H = \{(x,y): x \in R^1, 0 \le y \le H < \infty\}$, весовая функция $g(x,\xi) \equiv 1$. Тогда решение уравнения (1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе L_H единственно и имеет место представление

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi y}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \frac{\eta ch\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\hat{f}(\lambda,\eta)\,d\eta .$$

Доказательство теоремы 1. Уравнение (1) запишем, как и ранее, в виде

$$\int_0^y \left(u(x-h,\eta)+u(x+h,\eta)\right)\frac{\eta}{h}d\eta = f(x,y), \tag{15}$$

где $h=\sqrt{y^2-\eta^2}$.

При $t \in [0;1]$ рассмотрим функцию

$$F(x,y,t) = \int_0^y \left(u\left(x-\sqrt{1-t}\cdot h,\eta\right)+u\left(x+\sqrt{1-t}\cdot h,\eta\right)\right)\frac{\eta}{h}d\eta . \tag{16}$$

Нетрудно показать, что $F(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial y \partial t} = -\frac{y}{2}\frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial x^2}, \tag{17}$$

а также краевым условиям

$$F(x,0,t)=0; \quad F(x,y,0)=f(x,y). \tag{18}$$

Подействуем на уравнение (17) и условия (18) преобразованием Фурье по переменной x:

$$\frac{\partial^2 \hat{F}(\lambda,y,t)}{\partial y \partial t} - \frac{\lambda^2 y}{2}\frac{\partial^2 \hat{F}(\lambda,y,t)}{\partial \lambda^2} = 0, \tag{19}$$

$$\hat{F}(\lambda,0,t)=0; \quad \hat{F}(\lambda,y,0)=\hat{f}(x,y). \tag{20}$$

Краевая задача Гурса (19)–(20), как известно, имеет единственное решение [2]. В свою очередь, дважды непрерывно дифференцируемая и финитная по первой переменной функция $F(x,y,t)$ однозначно определяется по своему образу Фурье $\hat{F}(\lambda,y,t)$.

Далее, рассмотрим функцию $F(x,y,t)$ при $t=1$:

$$F(x,y,1)=2\int_0^y u(x,\eta)\frac{\eta}{h}d\eta. \tag{21}$$

Интегральное уравнение типа Абеля (21) имеет единственное решение [10]. Таким образом, мы показали единственность решения задачи интегральной геометрии (1).

Теперь применим к обеим частям уравнения (15) преобразование Фурье по переменной x. С учетом выкладок в начале доказательства предложения 1 запишем

$$2\int_0^y \hat{u}(\lambda,\eta)\cos(\lambda h)\frac{\eta}{h}d\eta=\hat{f}(\lambda,y). \tag{22}$$

Подействуем на (22) вольтерровским оператором с ядром

$$\frac{\eta ch\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}$$

и применим теорему Фубини к левой части получившегося уравнения:

$$\int_0^y \frac{\eta ch\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\hat{f}(\lambda,\eta)d\eta=$$

$$=2\int_0^y\int_0^\eta \frac{\eta t\cdot ch\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\hat{u}(\lambda,t)\frac{\cos\left(\lambda\sqrt{\eta^2-t^2}\right)}{\sqrt{\eta^2-t^2}}dtd\eta$$

$$=2\int_0^y\int_0^\eta \frac{\eta t\cdot ch\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y^2-\eta^2}\sqrt{\eta^2-t^2}}\hat{u}(\lambda,t)\cos\left(\lambda\sqrt{\eta^2-t^2}\right)dtd\eta.$$

Получим уравнение

$$\int_0^y \frac{\eta ch\left(\lambda\sqrt{y^2-\eta^2}\right)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\hat{f}(\lambda,\eta)d\eta=2\int_0^y t\hat{u}(\lambda,t)K_1(\lambda,y,t)dt, \tag{23}$$

где

$$K_1(\lambda, y, t) = \int_0^1 \frac{ch\left(\lambda\sqrt{y^2 - t^2}\sqrt{1 - s^2}\right)\cos\left(\lambda\sqrt{y^2 - t^2}\, s\right)}{\sqrt{1 - s^2}} ds .$$

Учитывая выражение для табличного интеграла

$$\int_0^a \frac{ch\left(c\sqrt{a^2 - x^2}\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos bx dx = \frac{\pi}{2}, \text{ при } b = c > 0,\ a > 0 ,$$

(см. [11]) получаем, что ядро K_1

$$\int_0^1 \frac{ch\left(\lambda\sqrt{y^2 - t^2}\sqrt{1 - s^2}\right)\cos\left(\lambda\sqrt{y^2 - t^2}\, s\right)}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \frac{\pi}{2}.$$

С учетом этого равенства перепишем (23) в виде

$$\pi\int_0^y \eta\hat{u}(\lambda, \eta)\, d\eta = \int_0^y \frac{\eta ch\left(\lambda\sqrt{y^2 - \eta^2}\right)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} \hat{f}(\lambda, \eta)\, d\eta .$$

Продифференцировав обе части последнего уравнения, приходим к выражению

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi y}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \frac{\eta ch\left(\lambda\sqrt{y^2 - \eta^2}\right)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} \hat{f}(\lambda, \eta)\, d\eta .$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Гельфанд И.М.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. – М.: Физматгиз, 1962. – 646 с.

[2] **Курант Р.** Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[3] **Лаврентьев М.М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

[4] **Лаврентьев М.М.** Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением / М.М. Лаврентьев // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т. 37. – № 4. – С. 851–857.

[5] **Бегматов Акр. Х.** Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости / Акр. Х. Бегматов // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36. – № 2. – С. 243–247.

[6] **Бегматов Акб. Х.** Задача интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве / Акр. Х. Бегматов // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41. – № 1. – С. 3–14.

[7] **Бегматов Акб. Х.** О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости / Акб. Х. Бегматов // ДАН. – 2009. – Т. 427. – № 4. – С. 439–441.

[8] **Бегматов Акб. Х.** Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе / Акб. Х. Бегматов, Н.Н. Петрова // ДАН. – 2011. – Т. 436. – № 2. – С. 151–154.

[9] **Романов В.Г.** Некоторые обратные задачи для гиперболического типа / В.Г. Романов. – Новосибирск: Наука, 1972. – 163 с.

[10] **Трикоми Ф.** Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 301 с.

[11] **Прудников А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1993. – 753 с.

A.H. Begmatov, G.M. Djaikov

RECONSTRUCTION OF A FUNCTION FROM ITS SPHERICAL MEANS

We study the problem of integral geometry in a strip on a family of curves of spherical type with a given weight function. We prove a uniqueness theorem and obtain an explicit expression for the Fourier transform of the solution of considered problem of integral geometry in a class of smooth finite functions.

Keywords: Problems of integral geometry; Spherical means; Fourier transforms; Inversion formula.

Статья поступила 26 июня 2012