УДК 539.4
DOI: 10.15372/PMTF202215064

АНАЛИЗ БИМОРФНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НАНОПРИВОДА ПРИ ПЕРВИЧНОМ РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

А. Кахазиан, А. Хаджнаиб, Х. М. Седихи

Ахвазский университет Шахида Чамрана, Ахваз, Иран
E-mails: abbaskaghazian@gmail.com, a.nayeb@scu.ac.ir, h.msedighi@scu.ac.ir

С использованием нелокальной теории упругости исследуются нелинейные вынужденные колебания биморфной пьезоэлектрической нанобалки. Поведение нанобалки моделируется с помощью теории балок Эйлера — Бернулли. Уравнения движения балки выводятся на основе принципа Гамильтона и дискретизируются с помощью метода Галеркина, при этом в качестве пробных функций используются моды колебаний многопролетных балок. Дискретизированные уравнения решаются методом возмущений. Выполнен параметрический анализ динамического поведения наноприводов. Показано, что при увеличении нелокального параметра материала уменьшается основная собственная частота нанобалки и увеличивается амплитуда отклика.

Ключевые слова: биморфная пьезоэлектрическая балка, нелокальная теория упругости, метод возмущений, нелинейные колебания

Введение. Для проектирования и изготовления микро- и наноприводов [1, 2] необходимо исследовать свойства новых, в частности пьезоэлектрических, материалов [3, 4]. При моделировании колебаний микро- и наноприводов требуется, во-первых, использовать нелинейные модели [5–7], поскольку возбуждающие силы имеют нелинейный характер и колебания происходят с большой амплитудой [5, 8], во-вторых, учитывать масштабные эффекты. Поведение материалов в нано- и микроконструкциях отличается от их поведения в макроконструкциях [9]. Поэтому при исследовании поведения наноконструкций используется нелокальная теория упругости (НЛТУ) [10, 11].

НЛТУ широко применяется при изучении поведения балок. С помощью этой теории в работе [12] изучено выпучивание нанобалок под действием осевых нагрузок при малых деформациях и получено замкнутое выражение для силы, при которой происходит потеря устойчивости. Установлено, что с увеличением масштабного коэффициента критическая нагрузка уменьшается. В работе [13] предложена модель упругой балки и с использованием НЛТУ исследованы собственные частоты нанотрубки при температурных колебаниях. Установлено, что собственные частоты, определенные с помощью НЛТУ, меньше частот, определенных с использованием классической теории упругости. В работе [14] вычислены собственные частоты консольной нанобалки и установлено, что с увеличением масштабного коэффициента в нелокальной модели собственные частоты, за исключением первой собственной частоты, уменьшаются. В [15] изучены нелинейные свободные колебания нанобалки, для вывода уравнений движения использован принцип Гамильтона.

Работа выполнена при финансовой поддержке исследовательского совета Ахвазского университета Шахида Чамрана (грант № SCU.EM1401.98).

С помощью НЛТУ в работе [16] изучены свободные и вынужденные колебания нанобалки, изготовленной из функционально-градиентного материала и покоящейся на упругом основании. Установлено, что с увеличением масштабного коэффициента амплитуда колебаний увеличивается. В [17] для изучения свободных колебаний вращающейся балки использованы нелинейная модель и НЛТУ. В [18] с помощью НЛТУ и модели балки Тимошенко вычислены собственные частоты нанобалки при различных краевых условиях. В работе [19] исследованы колебания хиральной нанотрубки с использованием модели балки Тимошенко и НЛТУ. В [20] НЛТУ использована при изучении колебаний и устойчивости нанобалки, покоящейся на упругом основании Винклера и подвергаемой воздействию магнитного поля.

В ряде работ НЛТУ применялась при моделировании нанобалок из пьезоэлектрического материала. В [21] НЛТУ использована при нахождении линейных собственных частот и собственных форм колебаний однослойной нанобалки из пьезоэлектрического материала. В работе [22] с помощью нелокальной модели определены нелинейные собственные частоты нанобалки, колеблющейся при воздействии переменного напряжения, при различных значениях температуры и параметра нелокальности. В [23] с использованием НЛТУ исследованы колебания и устойчивость нанобалки из пьезоэлектрического материала под действием термоэлектрических и механических нагрузок. Установлено, что с уменьшением масштабного коэффициента критическое напряжение уменьшается. В работе [24] с использованием НЛТУ изучены свободные колебания биморфной пьезоэлектрической балки и показано, что с увеличением масштабного коэффициента собственные частоты уменьшаются, причем уменьшение тем существеннее, чем выше собственные моды. В [25] с помощью НЛТУ исследованы свободные колебания пьезоэлектрической балки, а также влияние масштабного коэффициента и частоты приложенного к балке напряжения на собственные частоты колебаний. В [26] предложена модель харвестера (поглотителя энергии) и изучено влияние масштабного коэффициента на количество поглощаемой энергии. В работе [27] с использованием НЛТУ и квадратурных методов изучены свободные колебания пьезоэлектрической нанобалки. В [28] с помощью НЛТУ разработана модель пьезоэлектрической нанобалки с вырезами, а также получены и численно решены уравнения движения балки Бернулли — Эйлера.

В указанных выше работах в основном использовались линейные модели, а длина пьезоэлектрических слоев совпадала с длиной балки. При больших деформациях нанобалки растяжение срединной плоскости приводит к значительному увеличению жесткости балки. В случае пренебрежения этим явлением не учитываются такие нелинейные характеристики балки, как упрочнение и разупрочнение.

В большинстве конструкций пьезоэлектрический слой расположен только на части балки. Поэтому в данной работе с использованием НЛТУ исследуются нелинейные колебания биморфной пьезоэлектрической нанобалки с пьезоэлектрическими слоями, длина которых меньше длины нанобалки. Уравнения движения дискретизируются методом Галеркина и решаются с помощью метода гармонического баланса. Полученное решение сопоставляется с численным решением, полученным методом Рунге — Кутты.

1. Теоретическое обоснование модели. Для описания поведения пьезоэлектрического материала используются соотношения нелокальной теории упругости

$$\sigma_{ij} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \tag{1}$$

где σ_{ij}, ε_{kl}, E_k — напряжения, деформации и компоненты электрического поля соответственно; C_{ijkl} — тензор модулей упругости четвертого порядка; $e_0 a$ — малый масштабный параметр материала.

На рис. 1 представлена схема рассматриваемой нанобалки.

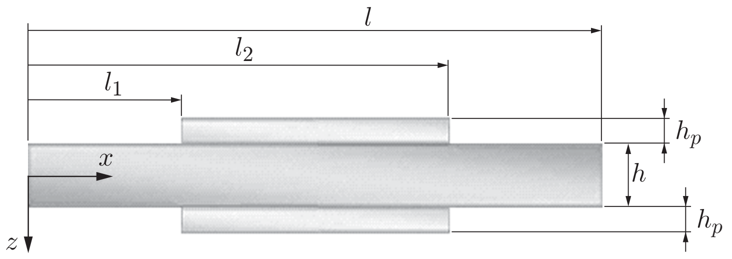

Рис. 1. Схема нанопривода, моделируемого нанобалкой из пьезоэлектрического материала

В пренебрежении напряжением, генерируемым в пьезоэлектрических слоях, функции полного электрического потенциала можно считать линейными:

$$\Phi^{(1)}(x,z,t) = z_1 V_0/h_p, \qquad \Phi^{(3)}(x,z,t) = z_2 V_0/h_p. \tag{2}$$

Здесь V_0, h_p, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(3)}$ — внешнее напряжение, толщина пьезоэлектрических слоев и потенциалы первого и третьего (пьезоэлектрических) слоев соответственно; координаты z_1, z_2 определяются следующим образом:

$$z_1 = -z - \frac{1}{2}(h+h_p), \qquad z_2 = -z + \frac{1}{2}(h+h_p), \tag{3}$$

h — толщина непьезоэлектрического слоя.

Подставляя (3) в (2), получаем

$$\Phi^{(1)} = \Big(-z - \frac{1}{2}(h+h_p)\Big)\frac{V_0}{h_p}, \qquad \Phi^{(3)} = \Big(-z + \frac{1}{2}(h+h_p)\Big)\frac{V_0}{h_p}.$$

Следовательно, выражения для составляющих электрического поля в направлении z имеют вид

$$E_z^{(1)} = -\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z_1} = -\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_1} = -\frac{V_0}{h_p}, \qquad E_z^{(3)} = -\frac{\partial\Phi^{(3)}}{\partial z_2} = -\frac{\partial\Phi^{(3)}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_2} = -\frac{V_0}{h_p}. \tag{4}$$

Выражения для смещений и деформаций в произвольной точке балки записываются в соответствии с геометрически нелинейной теорией Кармана [15]:

$$\begin{gathered} u(x,z,t) = U(x,t) - z\,\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}, \qquad v(x,z,t) = 0, \quad w(x,z,t) = W(x,t), \\ \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 = \frac{\partial U}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $u(x,z,t)$, $w(x,z,t)$ — компоненты вектора смещения произвольной точки балки в осевом и поперечном направлениях соответственно; $U(x,t)$, $W(x,t)$ — компоненты вектора смещения точек нейтральной оси балки в осевом и поперечном направлениях соответственно.

Выражение для потенциальной энергии пьезоэлектрической балки имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_s = \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^l\int_{-h/2-h_p}^{-h/2} (\sigma_{xx}^{(1)}\varepsilon_{xx} - D_z^{(1)}E_z^{(1)})G(x)\,dz\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^l\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}^{(2)}\varepsilon_{xx})G(x)\,dz\,dx\,dy + \\ + \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^l\int_{h/2}^{h/2+h_p} (\sigma_{xx}^{(3)}\varepsilon_{xx} - D_z^{(3)}E_z^{(3)})G(x)\,dz\,dx\,dy, \end{aligned}$$

где $G(x) = H(x - l_1) - H(x - l_2)$. С использованием соотношений (4) и (5), а также выражений для изгибающих моментов и обобщенных осевых усилий

$$M_1 = \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} (\sigma_{xx}^{(1)} z)\, dA, \qquad M_2 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}^{(3)} z)\, dA, \qquad M_3 = \int\limits_{h/2}^{h/2+h_p} (\sigma_{xx}^{(3)} z)\, dA,$$

$$N_1 = \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} (\sigma_{xx}^{(1)})\, dA, \qquad N_2 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}^{(3)})\, dA, \qquad N_3 = \int\limits_{h/2}^{h/2+h_p} (\sigma_{xx}^{(3)})\, dA$$

можно записать выражение для вариации потенциальной энергии

$$\delta\Pi_s = \int\limits_0^l \Big[-M_x^{(1)}\,\delta\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_x^{(1)}\,\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2\Big) G(x) - M_x^{(2)}\,\delta\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} +$$
$$+ N_x^{(2)}\,\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2\Big) + \Big(-M_x^{(3)}\,\delta\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - N_x^{(3)}\,\delta\Big(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2\Big)\Big) G(x) \Big]\, dx. \tag{6}$$

Выражения для вариаций кинетической энергии и работы внешних сил имеют следующий вид:

$$\delta\Pi_k = \frac{1}{2} \int\limits_0^l (m_1 G(x) + m_2 + m_3 G(x))\,\delta\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial U}{\partial t}\Big)^2\Big]\, dx,$$
$$\delta\Pi_f = \int\limits_0^l M_p G(x)\,\delta\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\, dx + \int\limits_0^l C\,\frac{\partial W}{\partial t}\,\delta W\, dx \tag{7}$$

(C — коэффициент демпфирования).

С использованием (6), (7) можно записать принцип Гамильтона

$$\delta H = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \Big(-M''(x)\,\delta W + (C\dot W + m(x)\ddot W + M_p G''(x))\,\delta W - N'(x)\,\delta U -$$
$$- m(x)\ddot U\,\delta U - \frac{\partial\,(N(x)W')}{\partial x}\,\delta W\Big)\, dx\, dt = 0,$$

где

$$m(x) = m_1 G(x) + m_2 + m_3 G(x), \qquad N(x) = N_x^{(1)} G(x) + N_x^{(2)} + N_x^{(3)} G(x),$$
$$M(x) = M_x^{(1)} G(x) + M_x^{(2)} + M_x^{(3)} G(x).$$

Из принципа Гамильтона следуют уравнения движения

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = m(x)\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial (N(x)W')}{\partial x} - C\,\frac{\partial W}{\partial t} - M_p\,\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} = m(x)\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

и краевые условия

$$x = 0, l: \qquad W' = 0 \quad \text{или} \quad M_x = 0,$$
$$x = 0, l: \qquad W = 0 \quad \text{или} \quad M'_x = 0,$$
$$x = 0, l: \qquad N_x W' = 0 \quad \text{или} \quad W = 0,$$
$$x = 0, l: \qquad N_x = 0 \quad \text{или} \quad U = 0.$$

1.1. *Соотношения нелокальной теории упругости.* Из соотношений (1) с учетом (4), (5) и малости отношения толщины балки к ее длине следует

$$G(x)N_x^{(1)} - (e_0a)^2 \frac{\partial^2(G(x)N_x^{(1)})}{\partial x^2} =$$
$$= G(x)\Big[N_E + A_{11}\Big(\frac{\partial U}{\partial x} + \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2\Big) - C_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{1}{2}\Big(\Big(-\frac{h}{2}\Big)^2 - \Big(-\frac{h}{2} - h_p\Big)^2\Big)\Big],$$
$$N_x^{(2)} - (e_0a)^2 \frac{\partial^2(N_x^{(2)})}{\partial x^2} = A_{11}\Big(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2\Big), \tag{8}$$
$$G(x)N_x^{(3)} - (e_0a)^2 \frac{\partial^2(G(x)N_x^{(3)})}{\partial x^2} = G(x)\Big[N_E + A_{11}(C_{11}^{(3)}\varepsilon_{xx} - e_{31}E_z^{(3)}) -$$
$$- C_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{h}{2} + h_p\Big)^2 - \Big(\frac{h}{2}\Big)^2\Big)\Big],$$

где N_E — осевая сила, обусловленная напряжением, приложенным к пьезоэлектрическим слоям. Умножая соотношения (8) на координату z и интегрируя полученные соотношения по толщине балки, имеем

$$G(x)M_x^{(1)} - (e_0a)^2 \frac{\partial^2(G(x)M_x^{(1)})}{\partial x^2} = G(x)\Big(-D_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} +$$
$$+ \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} C_{11}^{(1)}\, z\, \frac{\partial U}{\partial x}\, dz - \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} e_{31} z E_z^{(3)}\, dz + \frac{1}{2} \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} C_{11}^{(1)} z \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 dz\Big),$$

$$M_x^{(2)} - (e_0a)^2 \frac{\partial^2(M_x^{(2)})}{\partial x^2} = -D_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} C_{11}^{(2)} z \frac{\partial U}{\partial x}\, dz + \frac{1}{2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} C_{11}^{(2)} z \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 dz, \tag{9}$$

$$G(x)M_x^{(3)} - (e_0a)^2 \frac{\partial^2(G(x)M_x^{(3)})}{\partial x^2} = G(x)\Big(-D_{11}^{(3)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} +$$
$$+ \int\limits_{h/2}^{h/2+h_p} C_{11}^{(3)} z \frac{\partial U}{\partial x}\, dz - \int\limits_{h/2}^{h/2+h_p} e_{31} z E_z^{(3)}\, dz + \frac{1}{2} \int\limits_{h/2}^{h/2+h_p} C_{11}^{(3)} z \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 dz\Big),$$

где

$$D_{11}^{(1)} = \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} C_{11}^{(1)} z^2\, dz, \qquad D_{11}^{(2)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} C_{11}^{(2)} z^2\, dz.$$

В результате суммирования уравнений (8), (9) в случае, когда к пьезоэлектрическим слоям приложены напряжения с противоположными знаками, находим

$$N_x(x) - (e_0a)^2 \frac{\partial^2 (N_x(x))}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2\Big) A_{11}(x);$$

$$M_x(x) - (e_0a)^2 \frac{\partial^2 (M_x(x))}{\partial x^2} = -D_{11}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial^2 x} \qquad (10)$$

где

$$A_{11}(x) = G(x)A_{11}^{(1)} + A_{11}^{(2)} + G(x)A_{11}^{(3)}, \qquad N_x(x) = G(x)N_x^{(1)} + N_x^{(2)} + G(x)N_x^{(3)},$$

$$D_{11}(x) = G(x)D_{11}^{(1)} + D_{11}^{(2)} + G(x)D_{11}^{(3)}, \qquad M_x(x) = G(x)M_x^{(1)} + M_x^{(2)} + G(x)M_x^{(3)},$$

$$A_{11}^{(1)} = \int\limits_{-h/2-h_p}^{-h/2} C_{11}^{(1)}\, dA, \qquad A_{11}^{(2)} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} C_{11}^{(2)}\, dA, \qquad A_{11}^{(3)} = \int\limits_{h/2}^{h/2+h_p} C_{11}^{(3)}\, dA.$$

Используя граничные условия и пренебрегая инерционными силами в осевом направлении, получаем

$$0 = \frac{N_x(x)}{A_{11}(x)} - \frac{1}{2} \int\limits_0^l \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 dx.$$

Следовательно, выражение для растягивающей силы имеет вид

$$N_x(x) = \frac{A_{11}(x)}{2l} \int\limits_0^l \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 dx. \qquad (11)$$

Пренебрегая силами инерции в боковом направлении, получаем следующее уравнение:

$$M_x(x) = -D_{11}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (e_0a)^2 \Big[m(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + C \frac{\partial W}{\partial t} + M_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - {} - \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \frac{A_{11}(x)}{2l} \int\limits_0^l \Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 dx\Big]. \qquad (12)$$

1.2. *Уравнения движения в безразмерных переменных.* Подставляя (11), (12) в уравнение (10), получаем уравнение движения нанобалки. Введем следующие безразмерные переменные:

$$\bar W = \frac{W}{h}, \quad \bar x = \frac{x}{l}, \quad \bar M_p = \frac{M_p}{A_{11}h}, \quad \mu = \frac{e_0 a}{l}, \quad \bar D_{11} = \frac{D_{11}}{A_{11}l^2}, \quad \bar t = \frac{t}{\tau},$$

$$\tau = l\sqrt{\frac{m_b}{A_{11}}}, \quad \bar c = \frac{l^2 c}{A_{11}\tau}, \quad \bar m(\bar x) = 1 + \frac{m_p}{m_b} G(\bar x), \quad \bar M_s = \frac{M_s}{A_{11}h}.$$

Безразмерное уравнение движения имеет следующий вид:

$$-\Big(\bar D_{11}(\bar x) \frac{\partial^4 \bar W}{\partial \bar x^4} + 2 \frac{\partial^3 \bar W}{\partial \bar x^3} \frac{\partial \bar D_{11}(\bar x)}{\partial \bar x} + \frac{\partial^2 \bar W}{\partial \bar x^2} \frac{\partial^2 \bar D_{11}(\bar x)}{\partial \bar x^2}\Big) + {}$$

$$+ \mu^2 \Big[\bar C \frac{\partial^3 \bar W}{\partial \bar t\, \partial \bar x^2} + \bar M_p \frac{\partial^4 \bar G(\bar x)}{\partial \bar x^4} - \frac{\eta^2}{2} \Big(\frac{\partial^4 \bar W}{\partial \bar x^4} + \frac{2}{A_{11}} \frac{\partial^3 \bar W}{\partial \bar x^3} \frac{\partial A_{11}(\bar x)}{\partial \bar x} + {}$$

$$+\frac{1}{A_{11}}\,\frac{\partial^2\bar W}{\partial\bar x^2}\,\frac{\partial^2 A_{11}(\bar x)}{\partial\bar x^2}\Big)\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial\bar W}{\partial\bar x}\Big)^2\,d\bar x\Big]+$$

$$+\frac{\eta^2}{2}\,\frac{\partial^2\bar W}{\partial\bar x^2}\int\limits_0^1\Big(\frac{\partial\bar W}{\partial\bar x}\Big)^2\,d\bar x-\bar C\,\frac{\partial\bar W}{\partial\bar t}-\bar M_p\,\frac{\partial^2\bar G(\bar x)}{\partial\bar x^2}=\bar m(\bar x)\Big(\frac{\partial^2\bar W}{\partial\bar t^2}-\mu^2\,\frac{\partial^4\bar W}{\partial\bar t^2\,\partial\bar x^2}\Big).$$

1.3. *Модель с конечным числом степеней свободы.* Для того чтобы получить систему уравнений для модели с конечным числом степеней свободы, поперечный прогиб $\bar W(\bar x,\bar t)$ необходимо представить в виде линейной комбинации [29]

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(\bar t)\psi_i(\bar x),$$

где $\psi_i(\bar x)$ — допустимые функции; $q_i(\bar t)$ — обобщенные координаты. Собственные функции $\psi_i(\bar x)$ для многопролетной балки определены в работах [30–32].

1.4. *Анализ собственных колебаний.* При изучении влияния масштабного коэффициента на линейные собственные частоты уравнение движения записывается в следующем виде:

$$\bar m(\bar x)\,\frac{\partial^2\bar W}{\partial\bar t^2}-\mu^2\Big(\bar m(\bar x)\,\frac{\partial^4\bar W}{\partial\bar t^2\,\partial\bar x^2}+\frac{\partial^2\bar W}{\partial\bar t^2}\,\frac{\partial^2\bar m(\bar x)}{\partial\bar x^2}+2\,\frac{\partial\bar m(\bar x)}{\partial\bar x}\,\frac{\partial^3\bar W}{\partial\bar t^2\,\partial\bar x}\Big)+$$
$$+\bar D_{11}(\bar x)\,\frac{\partial^4\bar W}{\partial\bar x^4}+2\,\frac{\partial^3\bar W}{\partial\bar x^3}\,\frac{\partial\bar D_{11}(\bar x)}{\partial\bar x}+\frac{\partial^2\bar W}{\partial\bar x^2}\,\frac{\partial^2\bar D_{11}(\bar x)}{\partial\bar x^2}=0. \qquad (13)$$

Решение уравнения (13) будем искать в виде

$$\bar W(\bar x,\bar t)=\sum_{i=1}^{n} q_i(\bar t)\psi_i(\bar x).$$

Функции $\psi_i(\bar x)$ определены в работе [31]. В результате решения определяются собственные частоты.

1.5. *Вынужденные колебания.* При наличии демпфирования происходит диссипация всех мод колебаний. Если взаимодействием мод системы можно пренебречь, то уравнение (13) можно записать, используя одномодовую аппроксимацию относительно непосредственно возбуждаемой моды системы:

$$\ddot q a_1+\dot q a_2+q a_3+q^3 a_4=M_p. \qquad (14)$$

Приближенное решение уравнения (14) строится с использованием метода гармонического баланса. Между возбуждением и откликом имеется фазовый сдвиг. Обычно фазовый сдвиг добавляется к отклику, но в данной работе он учитывается в выражении для возбуждающей силы. Для этого уравнение (14) записывается в виде [33]

$$\ddot q+\dot q\bar a_2+q\bar a_3+q^3\bar a_4=\bar M_{pd}\cos(\omega t+\varphi)=\bar A_1\cos\omega t-\bar A_2\sin\omega t, \qquad (15)$$

где

$$\bar a_2=\frac{a_2}{a_1},\quad \bar a_3=\frac{a_3}{a_1},\quad \bar a_4=\frac{a_4}{a_1},\quad \bar A_1=\frac{A_1}{a_1},\quad \bar A_2=\frac{A_2}{a_1},\quad \bar M_{pd}=\frac{M_{pd}}{a_1}.$$

Если величина $\bar M_{pd}=\sqrt{\bar A_1^2+\bar A_2^2}$ известна, то отношение $\bar A_1/\bar A_2=\operatorname{tg}^{-1}\varphi$ можно вычислить. В первом приближении решение уравнения (15) представляется в следующем виде:

$$q=\alpha\cos\omega t. \qquad (16)$$

Значения собственных частот ν нанобалки
при различных значениях масштабного коэффициента μ

μ	ν, ГГц		
	Мода 1	Мода 2	Мода 3
0,10	0,3853	1,0605	2,3939
0,05	0,3973	1,1485	2,9006
0	0,4016	1,1830	3,1574

Подставляя (16) в уравнение (15) и используя разложение для функции $\cos^3 \omega t$, получаем

$$\Big[(\omega_n^2 - \omega^2)\alpha + \frac{3}{4}\,\bar a_4\alpha^3\Big] \cos\omega t - \bar a_2\omega\alpha \sin\omega t + \frac{\bar a_4\alpha^3}{4} \cos 3\omega t = \bar A_1 \cos\omega t - \bar A_2 \sin\omega t. \qquad (17)$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ в обеих частях уравнения (17), имеем два уравнения

$$(\omega_n^2 - \omega^2)\alpha + \frac{3}{4}\,\bar a_4\alpha^3 = \bar A_1, \qquad \bar a_2\omega\alpha = \bar A_2. \qquad (18)$$

Из (18) следует выражение для частотной характеристики

$$\bar M_{pd}^2 = \bar A_1^2 + \bar A_2^2 = \Big((\omega_n^2 - \omega^2)\alpha + \frac{3}{4}\,\bar a_4\alpha^3\Big)^2 + (\bar a_2\omega\alpha)^2.$$

2. Результаты исследования и их обсуждение. Ниже приводятся результаты численного и аналитического исследования влияния различных параметров системы на характер ее колебаний. Механические характеристики и геометрические параметры материалов нанобалки и пьезоэлектрических слоев имели следующие значения: для среднего слоя — толщина $h = 4$ нм, длина $l = 240$ нм, ширина балки $b = 4$ нм, модуль Юнга $E = 169$ ГПа, плотность $\rho = 2231$ кг/м^3 [24]; для пьезоэлектрических слоев — толщина $h_p = 4$ нм, ширина балки $b = 4$ нм, модуль Юнга $E = 59$ ГПа, плотность $\rho = 7800$ кг/м^3, пьезоэлектрический коэффициент $e_{31} = -12/54$ см$^{-2}$ [22]. Значение безразмерного коэффициента демпфирования принято равным $f = 10^{-5}$. В таблице приведены значения собственных частот нанобалки при $l_1 = 0{,}25l$, $l_2 = 0{,}75l$ и различных значениях масштабного коэффициента. Из результатов, представленных в таблице, следует, что при увеличении масштабного коэффициента значения первых трех собственных частот нанобалки уменьшаются. Этот результат соответствует результату, полученному в работе [25].

Прежде чем исследовать зависимость амплитуды отклика в средней точке нанобалки от частоты возбуждающей силы при различных условиях, необходимо провести сравнение полученного решения с численным решением. Для этого амплитудно-частотная диаграмма, полученная методом гармонического баланса, сравнивается с диаграммой, полученной численным методом. На рис. 2 приведены зависимости амплитуды колебаний a от частоты ω для нанобалки, полученные с использованием метода гармонического баланса и численного метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Для непрерывного возбуждения системы в стационарном режиме на пьезоэлектрическую накладку подавалось гармоническое напряжение переменного тока с амплитудой $v_0 = 0{,}1$ В. Из рис. 2 следует, что решения, полученные с использованием обоих методов, хорошо согласуются.

Далее приводятся результаты параметрического анализа задачи о колебаниях нанобалки.

На рис. 3 представлена зависимость амплитуды колебаний a от частоты ω для нанобалки при $l_1 = 0{,}25l$, $l_2 = 0{,}75l$ и $v_0 = 0{,}1$ В. Из анализа зависимостей, приведенных на

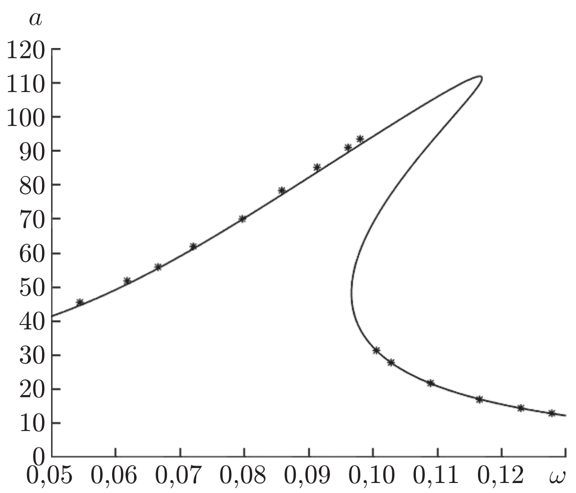

Рис. 2

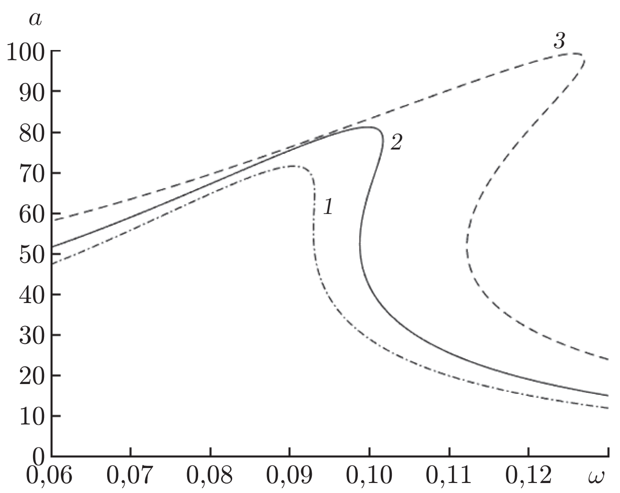

Рис. 3

Рис. 2. Зависимости амплитуды колебаний от частоты, полученные методом гармонического анализа (сплошная линия) и методом Рунге — Кутты (точки) при $f = 10^{-5}$, $l_1 = 0{,}25l$, $l_2 = 0{,}75l$, $\mu = 0$, $v_0 = 0{,}1$ В

Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний от частоты при $l_1 = 0{,}25l$, $l_2 = 0{,}75l$, $v_0 = 0{,}1$ В и различных значениях масштабного коэффициента:
1 — $\mu = 0$, *2* — $\mu = 0{,}05$, *3* — $\mu = 0{,}10$

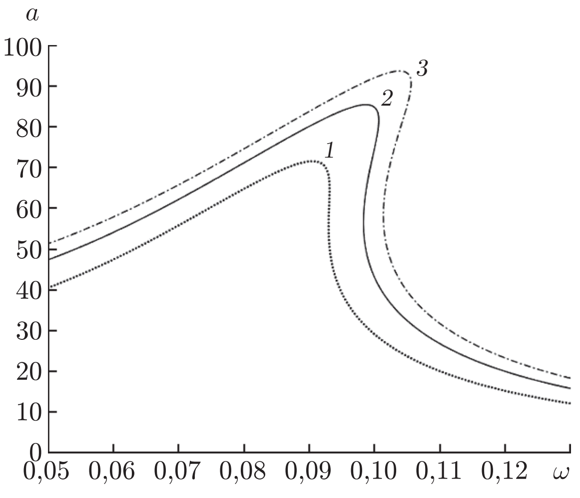

Рис. 4

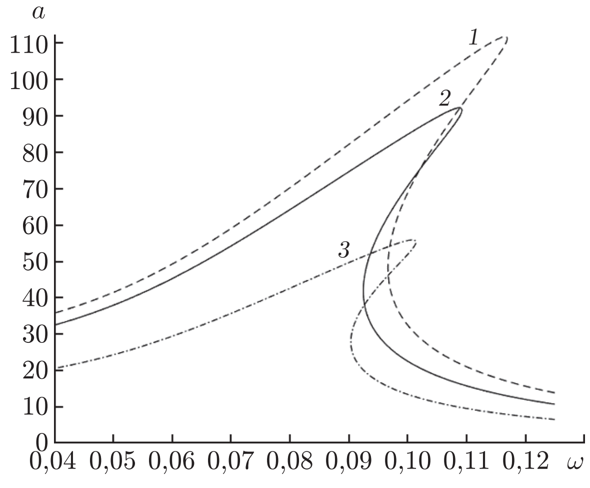

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость амплитуды колебаний от частоты при $l_1 = 0{,}25l$, $l_2 = 0{,}75l$, $\mu = 0$ и различных значениях амплитуды напряжения:
1 — $v_0 = 0{,}10$ В, *2* — $v_0 = 0{,}13$ В, *3* — $v_0 = 0{,}15$ В

Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний от частоты при $\mu = 0$, $f = 10$, $v_0 = 0{,}1$ В и различной длине пьезоэлектрических слоев:
1 — $l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}75$, *2* — $l_1 = 0{,}27$, $l_2 = 0{,}73$, *3* — $l_1 = 0{,}30$, $l_2 = 0{,}70$

рис. 3, следует, что при всех рассмотренных значениях масштабного коэффициента происходит упрочнение системы, при увеличении масштабного коэффициента увеличивается амплитуда колебаний. Таким образом, при использовании классической теории упругости в пренебрежении масштабным коэффициентом не выявляется упрочнение системы.

На рис. 4 приведена зависимость амплитуды колебаний от частоты при различных значениях амплитуды напряжения. Видно, что с увеличением амплитуды напряжения амплитуда колебаний увеличивается, а упрочнение системы становится более существенным.

На рис. 5 показана зависимость амплитуды колебаний от частоты при различной длине пьезоэлектрических слоев. Из приведенных зависимостей следует, что при фиксированной амплитуде напряжения с увеличением длины пьезоэлектрического слоя амплитуда возбуждающей силы и амплитуда колебаний балки увеличиваются. При увеличении длины пьезоэлектрического слоя упрочнение системы становится менее существенным. При этом скачок амплитуды на частотных кривых увеличивается.

Заключение. В работе с помощью НЛТУ исследованы вынужденные колебания биморфной пьезоэлектрической нанобалки. С использованием принципа Гамильтона выведены уравнения движения, которые затем были дискретизированы методом Галеркина и решены методом гармонического баланса. Из результатов параметрического анализа следует, что с увеличением масштабного коэффициента увеличивается амплитуда колебаний и происходит упрочнение системы. С увеличением длины пьезоэлектрического слоя увеличивается амплитуда колебаний и уменьшается упрочнение. Полученные результаты могут быть использованы при разработке пьезоэлектрических наноприводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abadian F., Soroush R., Yekrangi A.** Electromechanical performance of NEMS actuator fabricated from nanowire under quantum vacuum fluctuations using GDQ and MVIM // J. Appl. Comput. Mech. 2017. V. 3, N 2. P. 125–134.
2. **Wang K., Alaluf D., Rodrigues G., Preumont A.** Precision shape control of ultra-thin shells with strain actuators // J. Appl. Comput. Mech. 2021. V. 7. P. 1130–1137.
3. **Shirbani M. M., Shishesaz M., Hajnayeb A., Sedighi H. M.** Coupled magneto-electro-mechanical lumped parameter model for a novel vibration-based magneto-electro-elastic energy harvesting systems // Phys. E: Low-dimens. Systems Nanostructures. 2017. V. 90. P. 158–169.
4. **Shirbani M. M., Shishesaz M., Sedighi H. M., Hajnayeb A.** Parametric modeling of a novel longitudinal vibration-based energy harvester using magneto-electro-elastic materials // Microsystem Technol. 2017. V. 23, N 12. P. 5989–6004.
5. **Hajnayeb A., Khadem S.** Nonlinear vibrations of a carbon nanotube resonator under electrical and van der Waals forces // J. Comput. Theor. Nanosci. 2011. V. 8, N 8. P. 1527–1534.
6. **Hajnayeb A., Khadem S.** Nonlinear vibration and stability analysis of a double-walled carbon nanotube under electrostatic actuation // J. Sound Vibrat. 2012. V. 331, N 10. P. 2443–2456.
7. **Hajnayeb A., Khadem S.** An analytical study on the nonlinear vibration of a double walled carbon nanotube // Structur. Engng Mech. 2015. V. 54, N 5. P. 987–998.
8. **Hajnayeb A., Khadem S., Zamanian M.** Thermoelastic damping of a double-walled carbon nanotube under electrostatic force // Micro Nano Lett. 2011. V. 6, N 8. P. 698–703.
9. **Matveenko V. P., Oshmarin D. A., Iurlova N. A.** Application of electroconducting composite materials for additional damping of smart systems based on piezoelements // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, N 5. P. 742–751.
10. **Eringen A. C.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves // J. Appl. Phys. 1983. V. 54, N 9. P. 4703–4710.

11. **Kurt I., Kaya M. O.** Flapwise bending vibration analysis of a double tapered rotating nonlocal Euler — Bernoulli beam by the differential transform method // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, N 5. P. 959–968.
12. **Wang Q., Quek S.** Flexural vibration analysis of sandwich beam coupled with piezoelectric actuator // Smart Materials Structures. 2000. V. 9, N 1. 103.
13. **Murmu T., Pradhan S.** Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory // Comput. Materials Sci. 2009. V. 46, N 4. P. 854–859.
14. **Civalek Ö., Akgöz B.** Free vibration analysis of microtubules as cytoskeleton components: nonlocal Euler — Bernoulli beam modeling // Sci. Iran. Trans. B. Mech. Engng. 2010. V. 17, N 5. 367.
15. **Şimşek M.** Large amplitude free vibration of nanobeams with various boundary conditions based on the nonlocal elasticity theory // Composites. Pt B. Engineering. 2014. V. 56. P. 621–628.
16. **El-Borgi S., Fernandes R., Reddy J.** Non-local free and forced vibrations of graded nanobeams resting on a non-linear elastic foundation // Intern. J. Non-Linear Mech. 2015. V. 77. P. 348–363.
17. **Preethi K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J. N.** Nonlocal nonlinear bending and free vibration analysis of a rotating laminated nano cantilever beam // Mech. Adv. Materials Structures. 2018. V. 25, iss. 5. P. 439–450.
18. **Zhao H.-S., Zhang Y., Lie S.-T.** Explicit frequency equations of free vibration of a nonlocal Timoshenko beam with surface effects // Acta Mech. Sinica. 2018. V. 34, N 4. P. 676–688.
19. **Bensattalah T., Zidour M., Daouadji T. H.** A new nonlocal beam model for free vibration analysis of chiral single-walled carbon nanotubes // Composite Materials Engng. 2019. V. 1, N 1. P. 21–31.
20. **Jena S. K., Chakraverty S., Malikan M.** Vibration and buckling characteristics of nonlocal beam placed in a magnetic field embedded in Winkler — Pasternak elastic foundation using a new refined beam theory: an analytical approach // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135, N 2. P. 1–18.
21. **Ke L.-L., Wang Y.-S.** Thermoelectric-mechanical vibration of piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory // Smart Materials Structures. 2012. V. 21, N 2. 025018.
22. **Ke L.-L., Wang Y.-S., Wang Z.-D.** Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory // Composite Structures. 2012. V. 94, N 6. P. 2038–2047.
23. **Jandaghian A. A., Rahmani O.** On the buckling behavior of piezoelectric nanobeams: An exact solution // J. Mech. Sci. Technol. 2015. V. 29, N 8. P. 3175–3182.
24. **Nazemizadeh M., Bakhtiari-Nejad F.** Size-dependent free vibration of nano/microbeams with piezo-layered actuators // Micro Nano Lett. 2015. V. 10, N 2. P. 93–98.
25. **Kaghazian A., Hajnayeb A., Foruzande H.** Free vibration analysis of a piezoelectric nanobeam using nonlocal elasticity theory // J. Structur. Engng Mech. 2017. V. 61, N 5. P. 617–624.
26. **Foruzande H. R., Hajnayeb A., Yaghootian A.** Nanoscale piezoelectric vibration energy harvester design // AIP Adv. 2017. V. 7, N 9. 095122.
27. **Ragb O., Mohamed M., Matbuly M.** Free vibration of a piezoelectric nanobeam resting on nonlinear Winkler — Pasternak foundation by quadrature methods // Heliyon. 2019. V. 5, N 6. e01856.
28. **Eltaher M. A., Omar F.-A., Abdraboh A. M., et al.** Mechanical behaviors of piezoelectric nonlocal nanobeam with cutouts // Smart Structures Systems. 2020. V. 25, N 2. P. 219–228.
29. **Ghasemloonia A., Rideout D. G., Butt S. D., Hajnayeb A.** Elastodynamic and finite element vibration analysis of a drillstring with a downhole vibration generator tool and a shock sub // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2015. V. 229, N 8. P. 1361–1384.

30. **Ghafarirad H., Rezaei S., Sarhan A. A., Zareinejad M.** Continuous dynamic modelling of bimorph piezoelectric cantilevered actuators considering hysteresis effect and dynamic behaviour analysis // Math. Comput. Model. Dynamic. Systems. 2015. V. 21, N 2. P. 130–152.
31. **Kaghazian A., Foruzande H. R., Hajnayeb A., Mohammad Sedighi H.** Nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nanoactuator using nonlocal elasticity theory // Modares Mech. Engng. 2016. V. 16, N 4. P. 55–66.
32. **Zamanian M., Rezaei H., Hadiloo M., Hosseini S. A. A.** A comprehensive analysis on the discretization method of the equation of motion in piezoelectrically actuated microbeams // Smart Structures Systems. 2015. V. 16, N 5. P. 891–918.
33. **Rao S. S.** Mechanical vibrations / S. S. Rao, F. F. Yap. Boston: Addison-Wesley, 1995.

Поступила в редакцию 21/I 2022 г.,
после доработки — 12/IX 2022 г.
Принята к публикации 26/IX 2022 г.