

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОСТОЯНИЯ
ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев, Т. Н. Мартынова

(Воронеж)

Свойства уравнений осесимметричного состояния при условии пластичности Треска рассматривались в работах [1-3].

В работе [4] рассмотрены уравнения осесимметричной задачи идеально-пластического материала в случае, когда напряженное и деформированное состояние соответствует ребру произвольной кусочно-линейной поверхности текучести, интерпретирующей условие пластичности в пространстве главных напряжений.

В настоящей работе рассмотрены уравнения осесимметричной задачи изотропного идеально-пластического материала в случае, когда напряженное и деформированное состояние соответствует грани произвольной кусочно-линейной поверхности текучести. Показано, что в этом случае исходная система уравнений всегда имеет действительные характеристики, совпадающие с траекториями главных напряжений (изостатами). Показано, что при этом не могут существовать линии разрыва скоростей перемещений.

Отметим, что если в случае соответствия напряженного и деформированного состояния ребру поверхности текучести задача является статически определимой [4], то для грани поверхности текучести всегда имеет место кинематическая определимость. Последнее для условия пластичности Треска отмечалось в работах [1, 3]. В работе рассмотрены также автомодельные решения, соответствующие коническим и сферическим течениям идеально-пластического материала.

Высказываются соображения о том, что напряженное и деформированное состояние, соответствующее грани призмы текучести, не может соответствовать основным типам осесимметричных течений идеально-пластического материала.

1. Рассмотрим пространство главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Уравнение грани поверхности текучести в этом пространстве имеет вид

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 = 1 \quad (1.1)$$

Предположим, что условие пластичности (1.1) не зависит от первого инварианта тензора напряжений, тогда

$$a + b + c = 0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим осесимметричное состояние тела при условии пластичности (1.1) в цилиндрических координатах ρ, z, θ . Направление θ по условию является главным, в дальнейшем примем $\sigma_0 = \sigma_3, \sigma_1 \geq \sigma_2, \varepsilon_0 = \varepsilon_3$.

Рассматривая условие пластичности (1.1) в качестве пластического потенциала, запишем ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_1 = \lambda a, \quad \varepsilon_2 = \lambda b, \quad \varepsilon_3 = \lambda c, \quad \lambda \geq 0 \quad (1.3)$$

Откуда

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad b\varepsilon_1 - a\varepsilon_2 = 0 \quad (1.4)$$

Имеют место соотношения

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_\rho \cos^2 \psi + \varepsilon_z \sin^2 \psi + 2\varepsilon_{\rho z} \sin \psi \cos \psi$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_\rho \sin^2 \psi + \varepsilon_z \cos^2 \psi - 2\varepsilon_{\rho z} \sin \psi \cos \psi$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_\theta, \quad (\varepsilon_\rho - \varepsilon_z) \sin 2\psi - 2\varepsilon_{\rho z} \cos 2\psi = 0 \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)$$

Здесь u , w — компоненты скорости перемещения вдоль осей ρ , z ; ψ — угол между первым главным направлением и осью ρ .

Из (1.4) и (1.5) получим

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = 0, \quad (\varepsilon_\rho - \varepsilon_z)^2 + 4\varepsilon_{\rho z}^2 = \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 \varepsilon_\theta^2 \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) перепишем в компонентах скорости перемещения

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\rho} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 \frac{u^2}{\rho^2} \quad (1.7)$$

Система двух уравнений (1.7) относительно двух неизвестных u , w является замкнутой, и, следовательно, рассматриваемое осесимметричное состояние всегда является «кинематически определимым» (строго говоря, «кинематически определимой» задача будет лишь при соответствующем задании граничных условий).

Первому из уравнений (1.7) удовлетворим, полагая

$$u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$$

второе уравнение (1.7) примет вид

$$\left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{c\rho}\right)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \quad (1.8)$$

Тип нелинейного уравнения (1.8) может быть исследован, следуя [5, 6]. Легко показать, что уравнение (1.8) принадлежит к гиперболическому типу, а его характеристики имеют вид

$$\frac{dz}{d\rho} = \operatorname{tg} \psi \quad (\alpha\text{-линии}), \quad \frac{dz}{d\rho} = -\operatorname{ctg} \psi \quad (\beta\text{-линии}) \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что характеристики совпадают с траекториями главных напряжений (изостатами).

Запишем соотношения вдоль характеристик. Переходя в соотношениях (1.5) к дифференцированию вдоль характеристик (1.9), из (1.4) получим после некоторых преобразований

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} \cos \psi + \frac{\partial w}{\partial s_\alpha} \sin \psi - \frac{a}{c} \frac{u}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial s_\beta} \sin \psi - \frac{\partial w}{\partial s_\beta} \cos \psi + \frac{b}{c} \frac{u}{\rho} = 0 \quad (1.10)$$

где ds_α , ds_β — соответственно длины дуг характеристик α , β .

В случае условия пластиичности Треска ($a = 0$ или $b = 0$) соотношения (1.10) означают, как следует из (1.4), что соответствующий элемент характеристик α или β не удлиняется.

Условие отсутствия сдвига вдоль характеристик имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s_\beta} + \frac{\partial w}{\partial s_\alpha}\right) \cos \psi - \left(\frac{\partial u}{\partial s_\alpha} - \frac{\partial w}{\partial s_\beta}\right) \sin \psi = 0 \quad (1.11)$$

Рассмотрим задачу Коши для определения компонент скоростей перемещений. Пусть на дуге AB кривой L в плоскости ρz , показанной на фиг. 1, даны значения u , w . Прежде всего покажем, что данные значения u , w определяют на L угол ψ .

Пусть нормаль n к контуру L образует с осью ρ угол χ . Из соотношений (1.5) и (1.4), переходя к дифференцированию вдоль контура L , получим

$$\cos 2(\psi + \chi) = \frac{c}{a-b} \left[\frac{2\rho}{u} \left(\frac{du}{ds} \sin \chi + \frac{dw}{ds} \cos \chi \right) - 1 \right] \quad (1.12)$$

где ds — элемент дуги контура L .

Соотношение (1.12) определяет угол ψ вдоль L .

Задача Коши ставится для соотношений (1.9)–(1.11). Исходная система соотношений (1.9)–(1.11) может быть решена методом конечных разностей. Существенно, что задача Коши не может быть поставлена при произвольных значениях u, w на L . В самом деле, из (1.12) следует, что должно иметь место неравенство

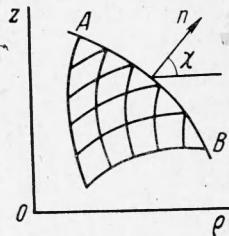


Рис. 1

$$\left| \frac{c}{a-b} \left[\frac{2\rho}{u} \left(\frac{du}{ds} \sin \chi - \frac{dw}{ds} \cos \chi \right) - 1 \right] \right| < 1 \quad (1.13)$$

В случае, когда левая часть выражения (1.13) равна единице, $\psi = -\chi$ и контур L совпадает с характеристикой.

Отметим, что задача Коши для соответствующих уравнений при условии Треска, исследовалась в работе [8], в которой задача Коши ставится для переменных $u, \psi, \omega = 1/2(\partial w / \partial \rho - \partial u / \partial z)$; автор не вывел ограничения типа (1.13).

Вырожденные случаи имеют место при $a = b$ и при $c = 0$ ($a = -b$). Случай $a = b$ соответствует граням A_1F_1, C_1D_1 условия максимального приведенного напряжения [7] (фиг. 2). Система (1.7) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad (1.14)$$

Легко убедиться, что решение системы уравнений (1.14) соответствует перемещению материала как жесткого целого.

Случай $a = -b$ соответствует граням AB, DE условия пластиичности Треска (фиг. 2). Этот случай, исследованный в работе [1], приводит к тривиальному полю скоростей перемещений

$$u = 0, \quad w = w(\rho) \quad (1.15)$$

2. Рассмотрим поле напряжений. Используя формулы

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1/2(\sigma_\rho + \sigma_z) + 1/2[(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2]^{1/2} \\ \sigma_2 &= 1/2(\sigma_\rho + \sigma_z) - 1/2[(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2]^{1/2} \\ \sigma_3 &= \sigma_\theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

перепишем условие пластиичности (1.1) в виде

$$[2c\sigma_\theta + (a+b)(\sigma_\rho + \sigma_z) - 2]^2 - (a-b)^2[(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2] = 0 \quad (2.2)$$

Рассматривая условие (2.2) в качестве пластического потенциала, запишем соотношения ассоциированного закона пластического течения

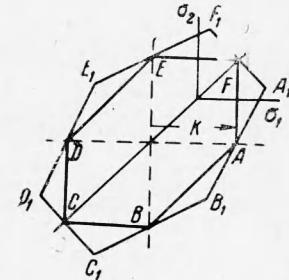
$$\frac{\epsilon_\rho - \epsilon_z}{\sigma_\rho - \sigma_z} = \frac{-(\epsilon_\rho + \epsilon_z)(a-b)^2}{(a+b)[2c\sigma_\theta + (a+b)(\sigma_\rho + \sigma_z) - 2]} - \frac{\epsilon_{\rho z}}{\tau_{\rho z}} = \lambda \quad (2.3)$$

Для компонент напряжений имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= p + q \cos 2\psi, \quad \sigma_z = p - q \cos 2\psi, \quad \tau_{\rho z} = q \sin 2\psi \\ p &= 1/2(\sigma_1 + \sigma_2), \quad q = 1/2(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя соотношения (2.4) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \quad (2.5)$$



Фиг. 2

получим систему двух уравнений относительно двух неизвестных p и q

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial q}{\partial \rho} \cos 2\psi + \frac{\partial q}{\partial z} \sin 2\psi &= \frac{\sigma_0 - \sigma_\rho}{\rho} + 2q \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - 2q \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.6) \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial \rho} \sin 2\psi - \frac{\partial q}{\partial z} \cos 2\psi &= -\frac{\tau_{xz}}{\rho} - 2q \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - 2q \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned}$$

Функция ψ в уравнениях (2.6) считается известной из решения задачи для компонент скорости перемещения. Система (2.6) принадлежит к гиперболическому типу, уравнения характеристики определяются (1.9).

Таким образом, уравнения для определения компонент скорости перемещений и напряжений имеют совпадающие характеристики.

3. Покажем, что при условии соответствия напряженного и деформированного состояния грани призмы текучести в пластическом поле не могут возникать линии разрыва скоростей перемещений. Из ассоциированного закона (2.3) следует, что в ортогональной системе координат xy

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-(\varepsilon_x + \varepsilon_y)(a - b)^2}{(a + b)[2c\sigma_0 + (a + b)(\sigma_x + \sigma_y) - 2]} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = \lambda, \quad a + b \neq 0 \quad (3.1)$$

Предположим, что линия x совпадает с линией разрыва касательных скоростей перемещений (разрывы нормальных скоростей ведут к нарушению сплошности среды и здесь не рассматриваются). Тогда $\varepsilon_{xy} \rightarrow \infty$, и из (3.1) следует, что на линии разрыва

$$\sigma_x = \sigma_y, \quad 2c\sigma_3 + (a + b)(\sigma_1 + \sigma_2) = 2 \quad (3.2)$$

Учитывая условие (1.1), перепишем второе соотношение в виде

$$c\sigma_3 + b\sigma_1 + a\sigma_2 = 1 \quad (3.3)$$

Из условий (3.3) и (1.1) следует, что

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 0 \quad \text{при } a - b \neq 0 \quad (3.4)$$

Состояние, определяемое (1.1), (3.4), соответствует ребрам F , C призмы на фиг. 2. Условие $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ соответствует частному случаю, при котором касательное напряжение в плоскости ρz тождественно равно нулю. Вырожденный случай $a = b$ рассмотрен выше.

Итак, если касательное напряжение в плоскости ρz тождественно не равно нулю, то поле скоростей перемещений, соответствующее грани призмы текучести, не может иметь линий разрыва.

В случае соответствия напряженного и деформированного состояния ребру призмы текучести из ассоциированного закона течения следует [4]

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} \quad (3.5)$$

Отсюда при $\varepsilon_{xy} \rightarrow \infty$ имеет место $\sigma_x - \sigma_y \rightarrow 0$. Из условия пластичности $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$ следует, что $\tau_{xy} \rightarrow k$. Линии разрыва скоростей перемещений всегда совпадают с линиями скольжения, причем линии скольжения являются характеристиками.

4. Уравнения (1.8) допускают класс автомодельных решений вида [2]

$$u = \rho^n u_1(\xi), \quad w = \rho^n w_1(\xi), \quad \xi = z/\rho \quad (4.1)$$

В этом случае уравнения (1.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \xi u_1' - (n+1)u_1 - w_1' &= 0 \\ (\xi u_1' - nu_1 + w_1')^2 + (u_1' + nw_1 - \xi w_1')^2 &= \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 u_1^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

где штрих означает производную по ξ .

Перейдем к компонентам скоростей в сферической системе координат $r\varphi\theta$. На фиг. 3 вектор oa имеет компоненты $ob = u$, $oc = w$ в цилиндрической системе координат и $oe = U$, $of = W$ в сферической системе координат. Очевидно

$$U = u \cos \varphi + w \sin \varphi, \quad W = -u \sin \varphi + w \cos \varphi \quad (4.3)$$

Полагая $U = \rho^n U_1(\xi)$, $W = \rho^n W_1(\xi)$ и учитывая, что

$$\cos \varphi = (1 + \xi^2)^{-1/2}, \quad \sin \varphi = \xi(1 + \xi^2)^{-1/2}$$

легко преобразовать систему уравнений (4.2) к компонентам $U_1(\xi)$, $W_1(\xi)$.

Решение системы уравнений рассмотрим для двух случаев: $U_1 = 0$, $W_1 = 0$ (конические течения), $U_1 \neq 0$, $W_1 \neq 0$ (сферические течения). Для конических течений уравнения примут вид

$$\begin{aligned} (n+2)U_1 &= 0 \\ [U_1'(1+\xi^2) + 2U_1\xi]^2 - \kappa_1 U_1^2 &= 0 \\ \kappa_1 &= \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 - 9 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.4) имеет решение при $n = -2$, $\kappa_1 \geq 0$. При этом второе уравнение (4.4) примет вид

$$[U_1'(1+\xi^2) + U_1(2\xi + \kappa)][U_1'(1+\xi^2) + U_1(2\xi - \kappa)] = 0 \quad (\kappa^2 = \kappa_1) \quad (4.5)$$

Из решения уравнения (4.5) получим

$$U = \rho^{-2} U_1 = C r^{-2} e^{\pm \kappa \varphi}, \quad W = 0, \quad C = \text{const}, \quad \rho = r \cos \varphi, \quad \tan \varphi = \xi \quad (4.6)$$

Постоянная C характеризует количество материала, протекаемого через фиксированное сечение $r = \text{const}$. В рассматриваемом случае квазистатического течения постоянная C не влияет на значения компонент напряжений, так как радиальная скорость U направлена к центру ($U < 0$); положим $C = -1$. Компоненты скорости деформации в сферической системе координат, соответствующие (4.6), имеют вид

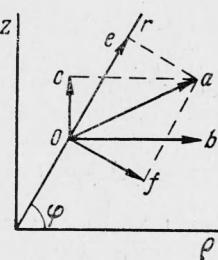
$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r} = 2r^{-3} e^{\pm \kappa \varphi}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \mp \kappa r^{-3} e^{\pm \kappa \varphi} \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\varphi = \frac{U}{r} = -r^{-3} e^{\pm \kappa \varphi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Каждое значение κ соответствует вполне определенной грани призмы пластичности. Из (4.6), (4.7) следует, что каждой определенной грани призмы пластичности соответствует коническое течение со своим значением скорости деформации сдвига $\varepsilon_{r\varphi}$. Согласно ассоциированному закону течения (2.3), имеет место $\varepsilon_{r\varphi} = \lambda \tau_{r\varphi}$.

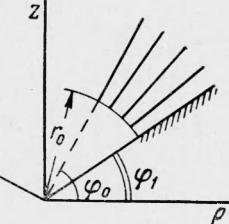
Если на конической матрице (фиг. 4) задано определенное касательное напряжение $\tau_{r\varphi} \neq 0$, то $\varepsilon_{r\varphi} \neq 0$ и решение может быть построено только при некотором определенном значении κ . Для гладкой матрицы $\tau_{r\varphi} = 0$ при $\varphi = \varphi_1 \neq 0$; имеет место $\kappa = 0$. Тогда из (4.4) получим

$$a:b:c = 2:-1:-1 \quad \text{или} \quad a:b:c = 1:-2:1 \quad (4.8)$$

Соотношения (4.8) соответствуют граням A_1B_1 , E_1D_1 и B_1C_1 , E_1F_1 условия пластичности максимально приведенного напряжения [8] (фиг. 2).



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, если предположить, что напряженное и деформированное состояние идеально-пластического материала при коническом течении соответствует некоторой грани призмы пластичности, то для гладкой матрицы с углом раствора $\varphi_1 \neq 0$ решение можно построить только для условия пластичности максимального приведенного напряжения. При этом соотношения (4.6), (4.7) имеют вид

$$U = -r^{-2}, \quad W = 0, \quad \varepsilon_r = 2r^{-3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -r^{-3}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = 0, \quad \kappa = 0 \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что направления r, φ будут главными. Следовательно, напряжения σ_r, σ_φ будут главными напряжениями. Согласно (4.9),

$$\varepsilon_r : \varepsilon_\varphi : \varepsilon_\theta = 2 : -1 : -1 \quad (4.10)$$

Уравнение грани условия пластичности максимального приведенного напряжения, соответствующей закону течения (4.10), имеет вид

$$2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta = k \quad (4.11)$$

Из условия положительности мощности диссипации механической энергии $D = \sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \sigma_\theta \varepsilon_\theta > 0$ найдем, что $k > 0$. Таким образом, коническое течение (4.9) соответствует грани A_1B_1 (фиг. 2). При этом компоненты напряжений изменяются лишь в определенных пределах

$${}^{1/3}k \leq \sigma_r - \sigma_\theta \leq {}^{2/3}k, \quad -{}^{1/3}k \leq \sigma_\varphi - \sigma_\theta \leq {}^{1/3}k \quad (4.12)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + (\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (4.13)$$

Используя соотношение (4.11), из первого уравнения (4.13) найдем

$$\sigma_r = -k \ln r + f(\varphi) \quad (4.14)$$

Полагая, что при прессовании материала в конической матрице (фиг. 4) поверхность $r = r_0$ свободна от напряжений ($\sigma_r = 0$ при $r = r_0$), найдем

$$\sigma_r = -k \ln(r/r_0), \quad r \geq r_0 \quad (4.15)$$

Из (4.13), (4.15), (4.11) получим

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + g(r) \cos^2 \varphi - {}^{1/2}k, \quad \sigma_\theta = \sigma_r - g(r) \cos^2 \varphi - {}^{1/2}k \quad (4.16)$$

В случае сплошного тела, составляя интегральное уравнение равновесия пластической массы между сечениями $r = r_0, r = R$ и матрицей ($\varphi = \varphi_1$), получим, что $g(r) = 0$. Выражения (4.16) принимают вид

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma_r - {}^{1/2}k \quad (4.17)$$

Таким образом, напряженное состояние материала, заполняющего всю полость гладкой конической матрицы при коническом течении, соответствует одной прямой (4.17) условия пластичности (точке A на фиг. 2).

В случае тела с полостью (фиг. 4) из (4.12) и (4.16) получим

$$-{}^{1/3}k \leq 2g(r) \cos^2 \varphi \leq {}^{1/3}k \quad (4.18)$$

Условия (4.18) не могут быть удовлетворены, если на внутренней границе тела ($\varphi = \varphi_0$) отсутствуют напряжения ($\sigma_\varphi = 0$). Для удовлетворения неравенства (4.18) необходимо на внутренней границе материала приложить давление $\sigma_\varphi = -kp(r)$ при $\varphi = \varphi_0$, заключенное в пределах

$$\ln \frac{r}{r_0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_1} \geq p(r) \geq \ln \frac{r}{r_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_1} \quad (4.19)$$

где φ_1 — угол раствора матрицы (фиг. 4). Достаточное условие для изменения значений величины давления p можно записать в виде

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_1} \geq p \geq \ln \frac{R}{r_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_1} \quad (4.20)$$

Отметим, что конические течения вообще не могут соответствовать грани призмы Треска. В самом деле, граням AB, DE (фиг. 2) соответствуют тривиальные решения [1], а для граней AF, BC, CD, EF всегда $\kappa_1 = -8$, и из (4.4) следует, что $U = 0$. Для случая сферических течений ($U_1 = 0, W_1 \neq 0$) исходные уравнения примут вид

$$W_1' (1 + \xi^2) - (n + 1) \xi W_1 = 0, \quad \xi^2 \left[1 - \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right] + (1-n)^2 = 0 \quad (4.21)$$

Из второго уравнения (4.21) следует, что

$$\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 - 1 = 0, \quad n - 1 = 0 \quad (4.22)$$

Из (4.22) получим, что $ab = 0$. Условие равенства нулю величины a или b означает, что напряженное состояние может соответствовать только граням призмы Треска AF, BC, CD, EF (фиг. 2). Из (4.21) вытекает

$$U = 0, \quad W = rB \sec \varphi, \quad B = \text{const} \quad (4.23)$$

5. Сферическое течение, соответствующее полю скоростей (4.23), подробно исследовано в работе [7]. Это течение является единственным возможным: никаким граням произвольных кусочно-линейных условий текучести (кроме граней призмы Треска) не могут соответствовать сферические течения. Более того, течение (4.23) может реализоваться только при отсутствии трения на сферической матрице. В случае шероховатой сферической матрицы напряженное состояние при сферическом течении не может соответствовать граням призмы Треска и любых других кусочно-линейных условий текучести.

В работе [7] Липпман высказывает соображения о том, что среди всех возможных напряженных и деформированных состояний осесимметричной задачи, соответствующих условию пластичности Треска, основную роль должны играть состояния, соответствующие граням призмы Треска. С подобными утверждениями трудно согласиться. Большой класс задач о вдавливании штампов, вытяжке осесимметричных заготовок и т. п. нельзя решить в рамках жестко-пластического анализа без введения линий разрыва скоростей перемещений, тогда как уравнения, соответствующие граням любой призмы условия пластичности, не допускают возможности разрыва скоростей перемещений. Причем на оси $z(r=0)$ условие полной пластичности имеет место всегда.

Вместе с тем Липпман не отмечает, что задача Коши для состояний, соответствующих граням призмы, может быть поставлена лишь при ограничениях (1.13) на скорость перемещения.

Анализ течений, рассмотренных в настоящей работе и работе [7], обнаруживает их весьма частный характер.

Поступила 28.III.1964

ЛИТЕРАТУРА

- Шилд Р. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии. Сб. перев. «Механика», № 1, Изд. иностр. лит., 1957.
- Ивлев Д. Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска. Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 6.
- Сох А., Еасон Г., Норкин Н. Philos. Trans., 1961, A 254, 1.
- Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния. ПМТФ, 1963, № 3.
- Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехтеоретиздат, М., 1953.
- Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. Гостехиздат, 1945.
- Липпман Г. Теория главных траекторий при осесимметричной пластической деформации. Сб. перев. «Механика», № 3, Изд. иностр. лит., 1963.
- Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля. ПММ, 1944, т. 8, вып. 3.