

Таким образом, предложенный в [6] волновой механизм образования зоны химической реакции может быть успешно использован при определении характеристик зажигания, когда превращение исходного вещества описывается сложным химическим превращением. Этот механизм позволяет также найти минимальное время воздействия нагревателя $\tau_{кр}$ при импульсном подводе энергии. В этом случае нагреватель действует при $\tau < \tau_1$. В момент времени $\tau = \tau_1$ на поверхности ставится адиабатическое условие $\partial\Theta/\partial\xi = 0$. Ясно, что за $\tau_{кр}$ следует принять время формирования зоны реакции, способной к самостоятельному распространению, т. е. время установления теплового равновесия τ_0 .

На основании изложенного можно сделать следующие выводы.

1. Анализ нестационарной системы уравнений (1)–(4) позволил выявить три режима протекания процесса зажигания: псевдоотрыв, переходный и слияние.

2. Получены простые уравнения для расчета основных характеристик процесса зажигания ($\tau_{ин}$, τ_0 , τ_3 и $\xi_{взр}$) для каждого режима.

3. Определены границы, разделяющие режимы и последовательность смены режимов в зависимости от параметров процесса и температуры зажигания. Получены необходимые и достаточные условия смены режимов зажигания при увеличении T_3 .

4. Сравнение результатов численного интегрирования исходной системы уравнений с приближенным решением показало качественное и хорошее количественное соответствие. Разница составила $\sim 5\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мержанов А. Г., Аверсон А. Э./АН СССР. ОИХФ.—Препр.—Черноголовка, 1970.
2. Вилюнов В. Н. Теория зажигания конденсированных веществ.—Новосибирск: Наука, 1984.
3. Любченко И. С., Матвеев В. В. и др. // Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных и гетерогенных систем.—Черноголовка, 1980.
4. Любченко И. С., Матвеев В. В. и др. Докл. АН СССР, 1980, 254, 4, 926.
5. Глотов О. Г., Зарко В. Е. ФГВ, 1984, 20, 4, 3.
6. Сеплярский Б. С. // Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем.—Черноголовка, 1986.
7. Воронин К. Ю., Сеплярский Б. С. // Материалы Всесоюз. конф.—Томск, 1987.
8. Мержанов А. Г. // Тепломассообмен в процессах горения.—Черноголовка, 1980.

г. Куйбышев

Поступила в редакцию 12/XI 1988,
после доработки — 21/II 1989

УДК 536/533

Е. А. Гельман, Э. А. Штессель

О ТЕПЛОМ ЗАЖИГАНИИ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕПЛОПОТЕРЬ

Несмотря на то, что в настоящее время тепловая теория зажигания развита достаточно полно [1], вопрос о влиянии теплопотерь на характеристики зажигания разработан недостаточно. Вместе с тем при решении ряда практических задач приходится сталкиваться с ситуацией, когда на процесс зажигания могут оказывать влияние теплопотери. Естественно, в этом случае должны существовать критические условия зажигания [2]. Наиболее интересны с прикладной точки зрения положения, когда зажигание сопровождается теплопотерями, интенсивность которых меняется во времени или пространстве. В данной работе рассматриваются математические подходы к решению задач о закономерностях зажигания при наличии переменных теплопотерь.

© 1990 Гельман Е. А., Штессель Э. А.

3 Физика горения и взрыва № 2, 1990

33

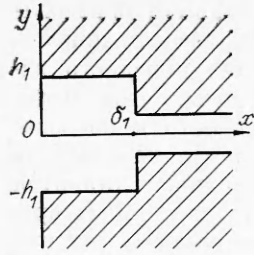


Рис. 1.

Рассмотрим простейшую макрокинетическую модель протекания экзотермической реакции. Область, содержащая химически активную среду, имеет вид плоскопараллельной полосы переменной ширины (рис. 1):

$$x \in (0, \infty), \quad -h(x) \leq y \leq h(x),$$

$$h(x) = \begin{cases} h_1 & \text{при } x < \delta_1, \\ h_2 & \text{при } x > \delta_1. \end{cases}$$

В начальный момент времени температура среды равна T_0 . Зажигание инициируется постоянной температурой T в плоскости $x = 0$. На границе $y = \pm h$ осуществляется теплообмен с окружающей средой с коэффициентом теплоотвода $\sigma(x)$, где

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1 & (x < \delta_1), \\ \sigma_2 & (x > \delta_1). \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности в предположении реакции нулевого порядка имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Qk_0 \exp(-E/RT).$$

Начальные и граничные условия:

$$T(x, y, 0) = T_0; \quad x = 0: T = T_*; \quad x = \infty: \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$y = 0: \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = h(x): -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \sigma(x)(T - T_0).$$

Здесь t — время; $T(x, y, t)$ — температура; Q — тепловой эффект реакции; c — теплоемкость; ρ — плотность; E — энергия активации; λ — коэффициент теплопроводности.

Проведем усреднение по y [2], в качестве весовой берем собственную функцию задачи

$$\lambda \frac{d^2 v}{dy^2} + \omega v = 0; \quad y = 0: \frac{dv}{dy} = 0; \quad y = h: \sigma v + \lambda \frac{dv}{dy} = 0.$$

Отсюда $v = \nu \cos \nu y / \sin \nu h$, $\omega = \lambda \nu^2$, где ν находится из условия

$$\nu \operatorname{tg} \nu h = \sigma / \lambda.$$

После усреднения в безразмерных переменных [3] имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \exp[u/(1 + \beta u)] - \kappa(u - u_0), \quad \eta \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$u = (E/RT_*^2)(T - T_*), \quad u_0 = (E/RT_*^2)(T_0 - T_*),$$

$$\tau = kt/c\rho, \quad \eta = x(k/\lambda)^{1/2}, \quad \sigma = \sigma_1(k/\lambda)^{1/2},$$

$$\kappa = \lambda \nu^2 / k, \quad k = (Qk_0 E / RT_*^2) \exp(-E/RT_*).$$

Начальные и граничные условия:

$$u(\eta, 0) = u_0, \quad u(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем для простоты изложения полагаем $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 > 0$, тогда

$$\kappa = \begin{cases} 0 & (x < \delta), \\ \alpha & (x > \delta). \end{cases}$$

Здесь $\alpha = \nu^2 \lambda / k$, а ν является корнем уравнения

$$\nu \operatorname{tg}(\nu h_2) = \sigma_2 / \lambda.$$

Пусть a, c, b — последовательные нули функции

$$f(u, \alpha) = \exp[u/(1 + \beta u)] - \alpha(z - u_0), \quad a < 0 < b \leq \infty.$$

Полагая фиксированными α, u_0 , назовем надкритическими те значения параметра δ , при которых нестационарное решение $u(\eta, \tau)$ задачи (1), (2) стремится к верхнему стационарному решению при $\tau \rightarrow \infty$. Нижняя грань множества этих значений δ называется критическим значением ($\delta_{кр}$).

Для нахождения $\delta_{кр}$ используем известный стационарный подход [3]: $\delta_{кр}$ равно максимальному значению δ , при котором существует промежуточное (т. е. лежащее между a и b) стационарное решение задачи (1), (2).

При $\int_a^0 f(u, \alpha) du > 0$ зажигание имеет место уже при $\delta = 0$, поскольку при этом условии в задаче (1), (2), когда $\delta = 0$, нет промежуточных стационарных решений. Поэтому в дальнейшем предполагаем выполненным условие $\int_a^0 f(u, \alpha) du \leq 0$.

Исследуем решения $z_\delta(x)$ стационарной задачи

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \Phi_\delta(z, \eta) = 0, \quad \eta \in (0, \infty), \quad z(0) = 0,$$

$$\Phi_\delta(z, \eta) = \begin{cases} f_1(z) & (z < \delta), \\ f_0(z) & (z > \delta), \end{cases} \quad (3)$$

$$f_1(z) = \exp[z/(1 + \beta z)], \quad f_0(z) = f_1(z) - \alpha(z - z_0).$$

Рассмотрим класс решений, ограниченных снизу и имеющих неположительную начальную производную $\frac{dz}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$. Наша задача — найти решение, имеющее максимальное значение параметра δ . Оказывается, такое решение монотонно на всей полуоси и имеет нулевую производную при $\eta = 0$. Ниже коротко приведем доказательство этого утверждения.

Пусть $(0, \bar{\eta})$ — отрезок монотонности функции $z_\delta(\eta)$; $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\delta)$ — первая точка минимума этой функции; $\gamma = z_\delta(\bar{\eta})$. Тогда на отрезке $(0, \bar{\eta})$ вместо (3) можно рассматривать задачу

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} + F_d(v) = 0, \quad \eta \in (0, \bar{\eta}), \quad v = v_d(\eta),$$

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{dz}{d\eta} \Big|_{\eta=0}, \quad (4)$$

$$F_d(v) = \begin{cases} f_1(v) & (v > d), \\ f_0(v) & (v < d), \end{cases} \quad v \in (\gamma, 0).$$

Решения $v_d(\eta)$ и $z_\delta(\eta)$ совпадают на $(0, \bar{\eta})$, если d и δ связаны соотношением $z_\delta(\delta) = d$. Уравнение (4) после замены переменных $p(\hat{v}) = \frac{dv}{d\eta} \Big|_{\eta=\arg \hat{v}}$, где $\arg \hat{v}$ — точка η , в которой $v(\eta) = \hat{v}$, записывается в виде

$$\frac{dp^2}{dv} = -2F_d(v).$$

Отсюда для каждого решения $v_d(\eta)$ связь между параметрами

$$\delta, d, \gamma = \min_{\eta} v_d(\eta), \quad p_d(0) = \frac{dv_d}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$$

выражается соотношениями

$$\delta = \int_a^0 \left(p_d^2(0) + 2 \int_u^0 f_1 ds \right)^{-1/2} du, \quad (5)$$

$$\int_\gamma^d f_0 du + \int_d^0 f_1 du = -p_d^2(0). \quad (6)$$

Для семейства решений $v_d(\eta)$, имеющих заданную производную $\left. \frac{dv_d}{d\eta} \right|_{\eta=0} = p(0)$, имеем тождество

$$\int_\gamma^d f_0 du + \int_d^0 f_1 du = -p^2(0), \quad \gamma \in (a, 0), \quad d \in (\gamma, 0)$$

Дифференцируя его по γ , получим

$$\frac{d}{d\gamma} (d(\gamma)) = f_0(\gamma)/(f_0(d) - f_1(d)) > 0 \quad (7)$$

($f_0(\gamma) < 0$ в силу уравнения (3)). Из (5) и (7) делаем вывод, что максимальное δ (δ_{\max}) имеет решение, монотонное на полуоси, для него $\gamma = a$.

Сравним теперь значения δ_1 и δ_2 для двух монотонных решений $v_{d_1}(\eta)$ и $v_{d_2}(\eta)$ соответственно, где $p_{d_1}(0) = 0$, $p_{d_2}(0) < 0$.

Покажем, что $d_1 < d_2$. Предполагая от противного, что $d_1 > d_2$, согласно (6), имеем

$$0 = -(p_{d_1}(0))^2 = \int_a^{d_1} f_0 du + \int_{d_1}^0 f_1 du \equiv \int_a^{d_2} f_0 du + \int_{d_2}^{d_1} f_0 du + \int_{d_2}^0 f_1 du + \int_{d_1}^0 f_1 du < -p_{d_2}^2(0) < 0.$$

Получили противоречие. Теперь, пользуясь (5), находим $\delta_1 > \delta_2$. Утверждение доказано.

Таким образом, получаем выражение для максимального значения δ в классе решений задачи (1), (2), имеющих неположительную начальную производную:

$$\delta_{\max} = \int_a^0 \left(2 \int_u^0 \exp[s/(1 + \beta s)] ds \right)^{-1/2} du, \quad (8)$$

где d определяется из равенства

$$\int_a^d \{ \exp[u(1 + \beta u)] - \alpha(u - u_0) \} du + \int_d^0 \exp[u/(1 + \beta u)] du = 0.$$

Поскольку не учтены стационарные решения с положительной производной при $\eta = 0$, то δ_{\max} — есть нижняя оценка $\delta_{кр}$. Однако многочисленные варианты решения на ЭВМ нестационарной задачи (1), (2) показывают, что δ_{\max} является для $\delta_{кр}$ хорошим приближением.

Решалась задача (1), (2) с $\beta = 0,02$. На рис. 2 представлена зависимость $\delta_{\max}(\alpha)$ при фиксированных значениях u_0 ; δ_{\max} рассчитана по

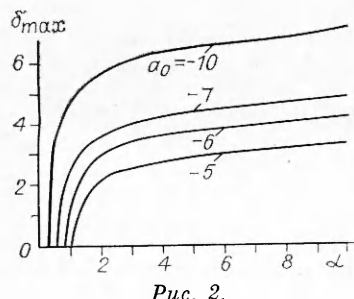


Рис. 2.

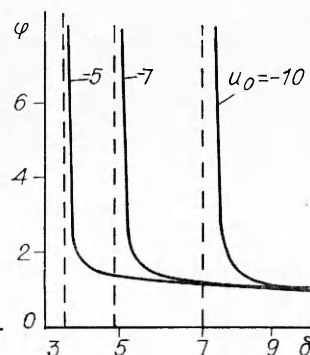


Рис. 3.

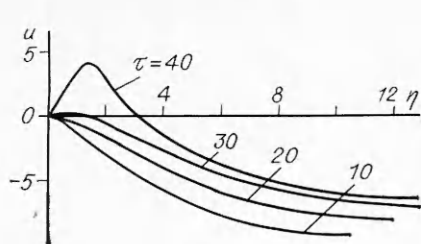


Рис. 4.

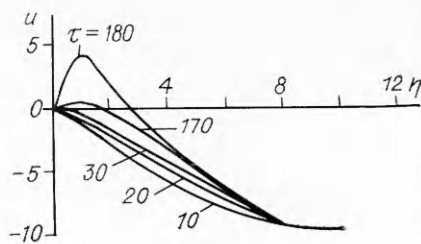


Рис. 5.

(8). Нестационарные характеристики зажигания представлены на рис. 3 функцией $\varphi(\delta, u_0) = \tau_a/\tau^*$, где $\tau_a = \tau_a(\delta)$ — время задержки зажигания как функция от δ при $\alpha = 1$; τ^* — время задержки зажигания при $\alpha = 0$; τ^* как функция различных параметров задачи исследована в [4, 5]. На рис. 4 представлены профили решения $u(\eta, \tau)$ через промежуток времени $\Delta\tau = 10$, $\alpha = 0$, $u_0 = -10$; на рис. 5 — профили решения $u(\eta, \tau)$ для варианта: $\alpha = 1$, $u_0 = -10$, $\delta = 7,3$. Для этого варианта $\delta_{\max} = 7,1$, следовательно, $7,1 < \delta_{\text{кр}} < 7,3$. Решение $u(\eta, \tau)$ долго находится вблизи стационарного решения, поскольку δ близко к $\delta_{\text{кр}}$.

Таким образом, несмотря на то, что рассматривается зажигание полубесконечной реагирующей среды, наличие переменного по координате теплоотвода приводит к существованию критических условий. При каждой фиксированной температуре инициирования существует предельное значение толщины теплоизолированного слоя, зависящего от интенсивности теплоотвода вне его, выше которого зажигание будет иметь место. Область над кривыми на рис. 2 соответствует зажиганию, под кривыми — его отсутствию. Это по сути дает возможность определить минимально необходимый участок реагирующей среды, который необходимо теплоизолировать, чтобы при имеющей место интенсивности теплоотдачи зажигание было осуществлено.

В заключение отметим, что примененный здесь метод можно использовать в широком круге задач, в которых содержатся параметры, кусочно-постоянно зависящие от пространственной координаты.

Авторы выражают признательность С. И. Худяеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
2. Барзыкин В. В., Худяев С. И. Докл. АН СССР, 1966, 169, 6, 1366.
3. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975.
4. Аверсон А. Э., Барзыкин В. В., Мержанов А. Г. Докл. АН СССР, 1965, 169, 1, 158.
5. Merzhanov A. G., Averson A. E. Comb. Flames, 1974, 16, 1, 89.

п. Чернооголовка

*Поступила в редакцию 5/IX 1988,
после доработки — 6/XII 1988*

УДК 536.46 : 535.21.215

В. П. Марусин, В. Т. Кузнецов, А. И. Скорик

ОСОБЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ЗАЖИГАНИЯ СИСТЕМЫ ПХА + УРОТРОПИН ТЕПЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

Известно, что в теории зажигания конденсированных веществ наименее исследован вопрос об устойчивости зажигания, т. е. условиях перехода от зажигания, определяемого по появлению пламени, к самоподдерживающемуся горению после прекращения теплового воздействия.

© 1990 Марусин В. П., Кузнецов В. Т., Скорик А. И.