

УДК 532.517.4: 533.6.011.8

РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РИХТМАЙЕРА — МЕШКОВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДИФFUЗИОННОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ ДВУХ ГАЗОВ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Г. А. Руев, А. В. Федоров*, В. М. Фомин*

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин),
630008 Новосибирск

* Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: ruev@sibstrin.ru, fedorov@itam.nsc.ru

На основе сформулированной ранее математической модели механики двухскоростной двухтемпературной смеси газов исследуется эволюция первоначально возмущенного слоя смешения двух газов различной плотности при воздействии на него ударных волн в двумерном нестационарном приближении. Численно решены задачи о взаимодействии ударных волн с синусоидально возмущенным диффузионным слоем. Получено удовлетворительное согласие результатов расчетов по изменению ширины области перемешивания с экспериментальными данными.

Ключевые слова: ударная волна, слой смешения, неустойчивость Рихтмайера — Мешкова, двухскоростная двухтемпературная газодинамика смесей.

Введение. Традиционно слой смешения рассматривается как поверхность разрыва плотности, т. е. как контактный разрыв. Взаимодействие ударной волны с возмущенным контактным разрывом порождает неустойчивость Рихтмайера — Мешкова [1, 2]. На заключительной стадии в области первоначального контактного разрыва образуется область турбулентного перемешивания, разделяющая потоки сжатых газов.

Многочисленные работы по численному моделированию развития неустойчивости Рихтмайера — Мешкова (см., например, [3–5]), основанные на уравнениях Эйлера, не учитывали влияние процессов взаимопроникновения газов. Кроме того, известно, что замена ступенчатого профиля плотности на контактном разрыве на непрерывное распределение в некотором слое конечной ширины может приводить к снижению скорости роста возмущений на начальной стадии развития неустойчивости Рихтмайера — Мешкова. Это отмечалось, например, в работах [6, 7], в которых проводились теоретические исследования нарастания амплитуды возмущения, и в экспериментальных работах [8–10]. Поэтому представляет интерес исследование данной проблемы на основе уравнений двухскоростной двухтемпературной смеси газов, когда каждый компонент имеет собственную скорость и температуру. Данный подход позволяет описать как процессы взаимопроникновения газов, так и взаимодействие слоя смешения с ударной волной. На необходимость применения моделей многокомпонентных смесей для описания разрушения контактной границы и образования области смеси указывалось в работе [11]. В [5] построена полуэмпирическая модель турбулентного перемешивания многокомпонентной среды, основанная на использовании

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00453) и Министерства образования Российской Федерации (проект Тематического плана НГАСУ от 1.03.2003 г.).

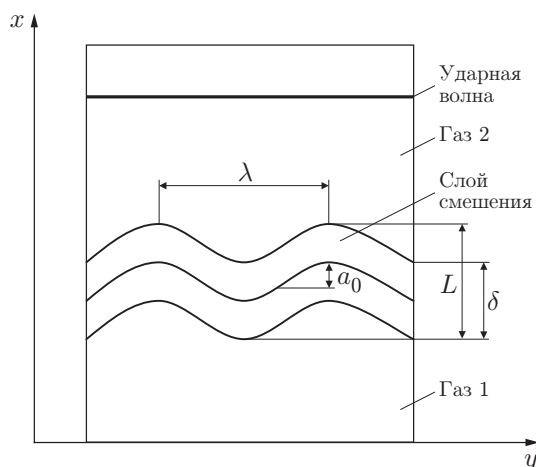


Рис. 1. Постановка задачи

для каждого компонента своей скорости. В этой модели предполагается, что турбулентное перемешивание возникает сразу. Ниже на основе уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики смесей исследуются процессы, протекающие на начальных стадиях развития неустойчивости Рихтмайера — Мешкова.

Постановка задачи. Исследуем эволюцию переходного слоя, разделяющего два чистых газа с разной плотностью, в рамках модели двумерного нестационарного течения двухскоростной двухтемпературной смеси при воздействии на слой ударной волны. Постановку задачи иллюстрирует рис. 1. Стационарная ударная волна распространяется из газа 2 в газ 1. В момент времени $t = 0$ ударная волна приходит на границу слоя. Форма средней линии слоя смешения описывается уравнением $x_0(y) = a_0(1 - \cos(\theta y))$, где a_0 — амплитуда возмущения; $\theta = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны возмущения. Полная ширина слоя смешения обозначена L , начальная диффузионная ширина слоя — δ .

Параметры смеси в слое описываются уравнениями двухскоростной двухтемпературной газодинамики смесей [12]

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial F_i^{(2)}}{\partial y} = W_i,$$

$$U_i = \begin{bmatrix} \rho_i \\ \rho_i u_i \\ \rho_i v_i \\ E_i \end{bmatrix}, \quad F_i^{(1)} = \begin{bmatrix} \rho_i u_i \\ \rho_i u_i^2 + p_i \\ \rho_i u_i v_i \\ u_i E_i + p_i u_i \end{bmatrix}, \quad F_i^{(2)} = \begin{bmatrix} \rho_i v_i \\ \rho_i v_i u_i \\ \rho_i v_i^2 + p_i \\ v_i E_i + p_i v_i \end{bmatrix},$$

$$W_i = \begin{bmatrix} 0 \\ K(u_j - u_i) \\ K(v_j - v_i) \\ Ku_i(u_j - u_i) + Kv_i(v_j - v_i) + \beta_i K((u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2) + q(T_j - T_i) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$p_i = kn_i T_i, \quad E_i = \rho_i(e_i + (u_i^2 + v_i^2)/2), \quad e_i = kT_i/(\gamma_i - 1), \quad \rho_i = m_i n_i, \quad i, j = 1, 2 \quad (i \neq j).$$

Здесь ρ_i — плотность, u_i, v_i — компоненты скорости, e_i — внутренняя энергия, p_i — давление, T_i — температура, m_i — масса, n_i — числовая плотность молекулы i -го вида; x, y — декартовы координаты; t — время; k — постоянная Больцмана; $K = 16\rho_1\rho_2\Omega_{12}^{(1,1)}/(3(m_1 + m_2))$; $\Omega_{12}^{(1,1)}$ — интеграл столкновений; $\beta_i = m_i T_i/(m_1 T_1 + m_2 T_2)$;

$q = 3m_1K/(m_1 + m_2)$; $c_{iv} = k/(m_i(\gamma_i - 1))$; γ_i — показатель адиабаты. Для потенциала взаимодействия твердых сфер имеем соотношение

$$K = \frac{16}{3} \frac{\rho_1 \rho_2}{m_1 m_2} \sqrt{\frac{k\pi}{2}} \sqrt{\frac{T_1}{m_1} + \frac{T_2}{m_2}} \sigma_{12}, \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

(σ_i — диаметр молекулы i -го газа).

При малых (или нулевых) значениях концентрации j -го газа будем использовать уравнения Эйлера для чистого i -го газа, а параметры другого газа будем определять из соотношений

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial n_j u_j}{\partial x} + \frac{\partial n_j v_j}{\partial y} = 0, \quad u_j = u_i, \quad v_j = v_i, \quad T_j = T_i.$$

Переход к тяжелому газу осуществляется, если значение молярной концентрации легкого газа $x_j = n_j/(n_1 + n_2) < 1\%$, к легкому, если массовая концентрация тяжелого газа $\alpha_j = \rho_j/(\rho_1 + \rho_2) < 1\%$.

Формирование начальной области смешения. В работе [13] получено асимптотическое решение задачи по формированию начального диффузионного слоя в одномерном приближении. Предполагая, что в каждом сечении y распределение параметров остается одномерным и при наличии возмущений, из [13] для молярной концентрации в слое получим соотношение

$$x_1 = \frac{1 - \Phi(\eta)}{2} \quad \left(\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\omega^2} d\omega, \quad \eta = \frac{x - x_0(y)}{2\sqrt{Dt}}, \quad D = \frac{x_1 x_2 p}{K} \right), \quad (2)$$

удовлетворяющее начальному распределению молярной концентрации: $x_1 = 1$ при $x < x_0(y)$, $x_1 = 0$ при $x > x_0(y)$.

Метод расчета. В качестве метода расчета для пространственной аппроксимации системы (1) используется метод расщепления вектора потоков, предложенный в [14]. Для сохранения свойства монотонности решения в областях больших градиентов порядок аппроксимации понижается ограничителем `minmod`, используемым при построении TVD-схем [15]. При этом применялась неявная аппроксимация правых частей системы (1), предложенная в [12], что позволило не усиливать ограничение на временной шаг, которое налагается условием Куранта.

Расчеты проводились в прямоугольной области $[x_n, x_k; 0, \lambda/2]$. На нижней и верхней границах (x_n, x_k) ставились условия равенства нулю производных. Для исключения влияния граничных условий при выходе волн на эти границы производилось расширение расчетной области. На боковых границах ставились условия симметрии.

В начальный момент времени распределение концентрации описывается формулой (2). Остальные параметры перед фронтом ударной волны следующие: $u_i = v_i = 0$, $T_i = T_0 = 300$ К, $p = p_0 = 0,5$ атм, $n = n_0 = p_0/(kT_0)$, $n_i = x_i n_0$. Ударная волна в начальный момент находится в сечении x (на границе слоя), где максимальная концентрация газа 1 (молярная, если газ 1 легкий, или массовая, если газ 1 тяжелый) равна 1%. Параметры за фронтом ударной волны определяются из соотношений Ренкина — Гюгонно для газа 2.

Переход ударной волны из легкого газа в тяжелый. Известно, что при переходе ударной волны из легкого газа в тяжелый через возмущенный контактный разрыв наблюдаются преломленная и отраженная ударные волны. При этом формы этих волн подобны форме возмущения исходной контактной границы. Аналогичная картина имеет место при прохождении ударной волны через возмущенный слой смешения. Однако наличие переходной области приводит к задержке роста возмущений и к некоторым особенностям развития неустойчивости Рихтмайера — Мешкова.

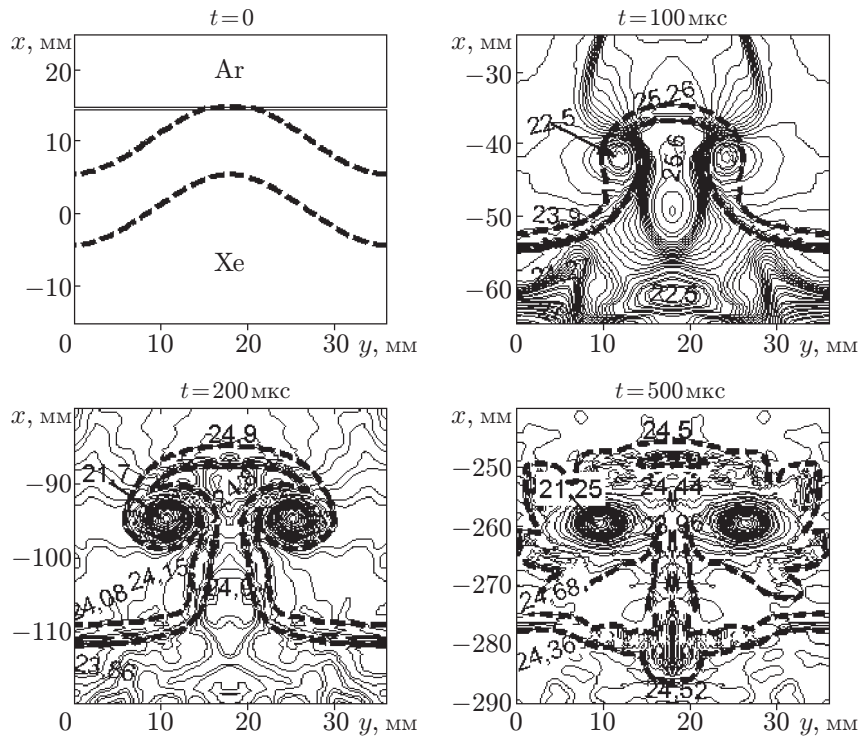


Рис. 2. Изолинии полного давления смеси в различные моменты времени при прохождении ударной волны из аргона в ксенон

На рис. 2 представлены изолинии полного давления смеси в разные моменты времени при прохождении ударной волны из аргона в ксенон (цифры на графиках — значения безразмерного давления p/p_0). Штриховыми линиями показаны границы слоя смешения, соответствующие 1 %-й молярной концентрации аргона и 1 %-й массовой концентрации ксенона. Расчет проводился при следующих значениях параметров: $m_1/m_2 = 3,28$, $\sigma_2/\sigma_1 = 3,66/4,94$, число Маха $M = 3,5$, число Атвуда $A = (\rho_h - \rho_l)/(\rho_h + \rho_l) = 0,53$, $\lambda = 36$ мм, $a_0 = 5$ мм, $\delta = 10$ мм. Для рассматриваемых одноатомных газов $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$. При прохождении ударной волны из легкого газа в тяжелый форма преломленной ударной волны подобна форме начального возмущения слоя смешения. По мере удаления от слоя смешения фронт ударной волны выпрямляется. Одновременно внутри слоя смешения формируются отраженные волны сжатия, опрокидывание которых происходит вне слоя в газе 2. В результате взаимодействия ударной волны со слоем смешения происходит сжатие слоя и одновременно уменьшение амплитуды возмущения. После выхода ударной волны из слоя смешения начинается рост амплитуды возмущения, обусловленный повышенным и пониженным значениями давления на участках, где ударная волна является соответственно локально сходящейся или локально расходящейся. В результате возникает струя тяжелого газа, направленная в сторону легкого газа. Начиная с некоторого момента (для рассматриваемого случая $t \approx 100$ мкс) на боковых границах струи начинается формирование грибовидной структуры, обусловленное возникновением вихрей с центром внутри слоя смешения, т. е. начинает развиваться неустойчивость Кельвина — Гельмгольца.

На рис. 3 приведено поле средней массовой скорости смеси в системе отсчета, движущейся со скоростью центра масс слоя смешения. Возникновение вихревой структуры приводит к интенсивному росту слоя смешения в поперечном направлении и к замедлению его роста в продольном направлении. Увеличение ширины слоя ведет к взаимодействию соседних струй друг с другом и в дальнейшем — к возникновению области турбулент-

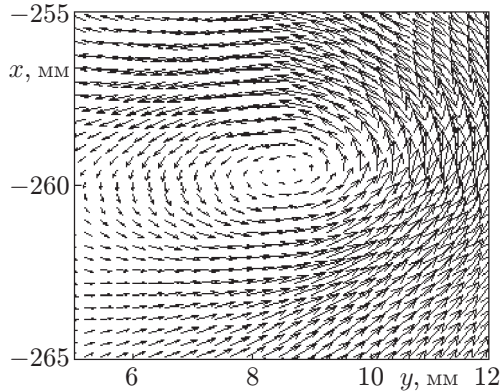


Рис. 3. Изолинии поля средней массовой скорости смеси вблизи центра вихря при $t = 500$ мкс

ного перемешивания. Со временем происходит выпрямление преломленной и отраженной ударных волн, параметры которых стремятся к значениям, полученным в работе [13] для одномерного случая.

На рис. 4 приведены изолинии молярной концентрации легкого газа при различных значениях длин волн возмущения и отношениях масс молекул (чисел Атвуда) в моменты времени $t = 50, 200$ мкс после начала взаимодействия ударной волны со слоем смешения. Рассматривался переход ударной волны из аргона в ксенон и из гелия в ксенон ($m_1/m_2 = 32,8$, $\sigma_2/\sigma_1 = 2,19/4,94$, $A = 0,82$, $M = 3,5$). Из рис. 4 следует, что при уменьшении длины волны возмущения происходит более раннее формирование грибовидной структуры на поверхности струи и более интенсивное расширение струи в поперечном направлении, что приводит к взаимодействию соседних струй друг с другом. До возникновения вихрей слой смешения достаточно тонкий и может рассматриваться как поверхность разрыва. Однако развитие вихревой структуры приводит к интенсивному перемешиванию и увеличению ширины слоя, что не позволяет рассматривать его как поверхность разрыва. С увеличением отношения масс молекул возрастает глубина проникновения тяжелого газа в легкий.

На рис. 5 показано изменение во времени полной ширины слоя смешения для различных значений длины волны возмущения и чисел Атвуда. Ударная волна проходила из легкого газа (аргон или гелий) в ксенон. После сжатия слоя смешения ударной волной на линейной стадии развития неустойчивости Рихтмайера — Мешкова меньшей длины волны возмущения (кривые 1, 3) соответствует более быстрое увеличение ширины слоя. Однако на нелинейной стадии уменьшение λ ведет к снижению темпа роста толщины слоя смешения. Это обусловлено более интенсивным расширением слоя в поперечном направлении при уменьшении длины волны. Для случая малых значений λ (кривая 2) характерно отсутствие линейной стадии, так как формирование струи тяжелого газа и возникновение вихрей начинаются, когда ударная волна еще находится в слое. С увеличением отношения масс молекул уменьшается время начала роста амплитуды возмущений и увеличивается скорость роста ширины слоя (кривая 4). На рис. 5 приведены также результаты расчета (кривая 5) при малой начальной диффузионной ширине слоя ($\delta_0 = 1$ мм), которые близки к результатам расчета на основе уравнений Эйлера (кривая 6), полученным в работе [4] для разрывного в начальный момент профиля плотности. Видно, что полная ширина слоя начиная с некоторого момента времени после сжатия ударной волной слабо зависит от δ_0 . Однако полная относительная ширина слоя L/L_0 уменьшается почти в два раза при увеличении в два раза начального значения δ_0 .

На рис. 6 приведено сравнение скорости роста амплитуды возмущения при переходе ударной волны из гелия в аргон, разделенных в начальный момент слоем смешения, с экспериментальными данными [10]. Здесь $T = A\theta u(t - t_1)$; a — значение амплитуды

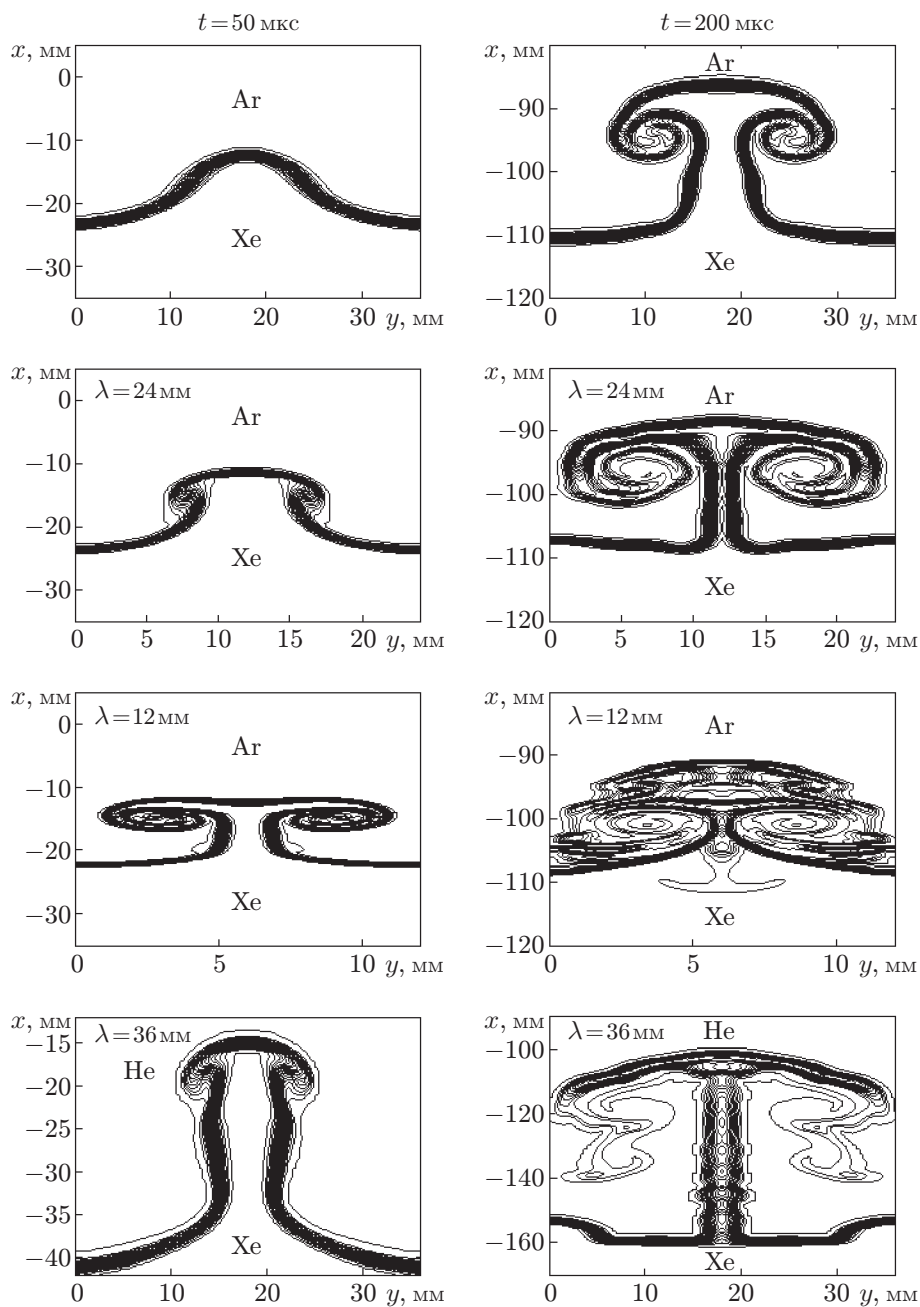


Рис. 4. Изолинии молярной концентрации легкого газа при различных значениях λ и λ в моменты времени $t = 50, 200 \mu\text{s}$

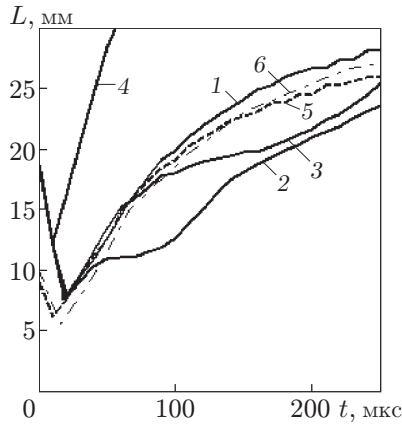


Рис. 5

Рис. 5. Изменение во времени полной ширины слоя смешения для различных значений λ и δ_0 при $M = 3,5$, $a_0 = 5$ мм: кривые 1–3 — $\text{Ar} \rightarrow \text{He}$, $\delta_0 = 10$ мм (1 — $\lambda = 36$ мм; 2 — $\lambda = 12$ мм; 3 — $\lambda = 24$ мм); кривая 4 — $\text{He} \rightarrow \text{Ar}$, $\lambda = 36$ мм, $\delta_0 = 10$ мм; кривая 5 — $\text{Ar} \rightarrow \text{Xe}$, $\lambda = 36$ мм, $\delta_0 = 1$ мм; кривая 6 — результаты расчета [4]

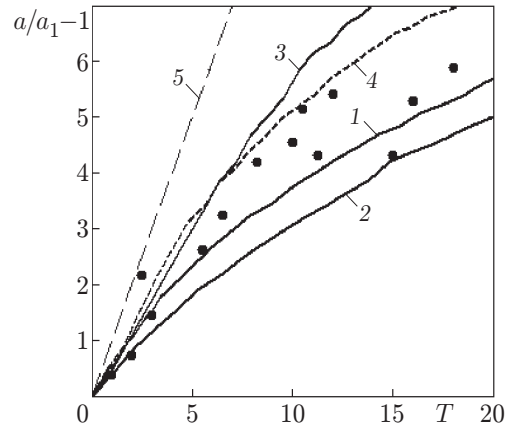


Рис. 6

Рис. 6. Изменение во времени амплитуды возмущения при переходе ударной волны ($M = 2,5$) из гелия в аргон для различных значений λ , a_0 , δ_0 : 1 — $\lambda = 15$ мм, $a_0 = 1$ мм, $\delta_0 = 8$ мм; 2 — $\lambda = 15$ мм, $a_0 = 1$ мм, $\delta_0 = 18$ мм; 3 — $\lambda = 30$ мм, $a_0 = 1$ мм, $\delta_0 = 8$ мм; 4 — $\lambda = 30$ мм, $a_0 = 2$ мм, $\delta_0 = 8$ мм; 5 — расчет по формуле Рихтмайера; точки — эксперимент [10]

возмущения (расстояние между точками максимального и минимального проникновения тяжелого газа в легкий); u — средняя скорость движения слоя смешения, полученная в одномерных расчетах; t_1 — момент выхода ударной волны из слоя; a_1 — значение a при $t = t_1$. Расчеты проводились при $M = 2,5$. Видно, что результаты расчета соответствуют данным эксперимента. Уменьшение начальной диффузионной ширины слоя приводит к увеличению роста амплитуды возмущения (кривые 1, 2). Аналогично с уменьшением λ уменьшается амплитуда возмущения (кривые 1, 3). При увеличении a_0 на начальной стадии развития неустойчивости амплитуда возмущения растет быстрее, а на нелинейной стадии ее рост замедляется (кривые 3, 4). На рис. 6 приведена также зависимость $a/a_1 - 1 = A ku(t - t_1)$, полученная в работе [1] для разрывного в начальный момент профиля плотности. Видно, что в расчетах, так же как и в экспериментах, скорость роста амплитуды возмущений при наличии слоя смешения меньше, чем на границе с разрывным изменением плотности.

Переход ударной волны из тяжелого газа в легкий. На рис. 7 приведены эволюция слоя смешения и изолинии полного давления при прохождении ударной волны из ксенона (тяжелый газ) в аргон ($M = 3,5$, $\lambda = 36$ мм, $\delta = 10$ мм). Штриховыми линиями показаны границы слоя смешения. Цифры на графиках — значения безразмерного давления p/p_0 . Видно, что форма преломленной ударной волны выпукла в сторону легкого газа, т. е. находится в противофазе с начальной формой границы слоя. В сторону тяжелого газа распространяются волны разрежения. Вначале слой смешения выпрямляется, а затем происходит смена фазы возмущения. В дальнейшем возникает струя тяжелого газа с последующим образованием грибовидной структуры и формированием вихрей на границах струи с центром в слое смешения аналогично тому, как это имело место при переходе ударной волны из легкого газа в тяжелый.

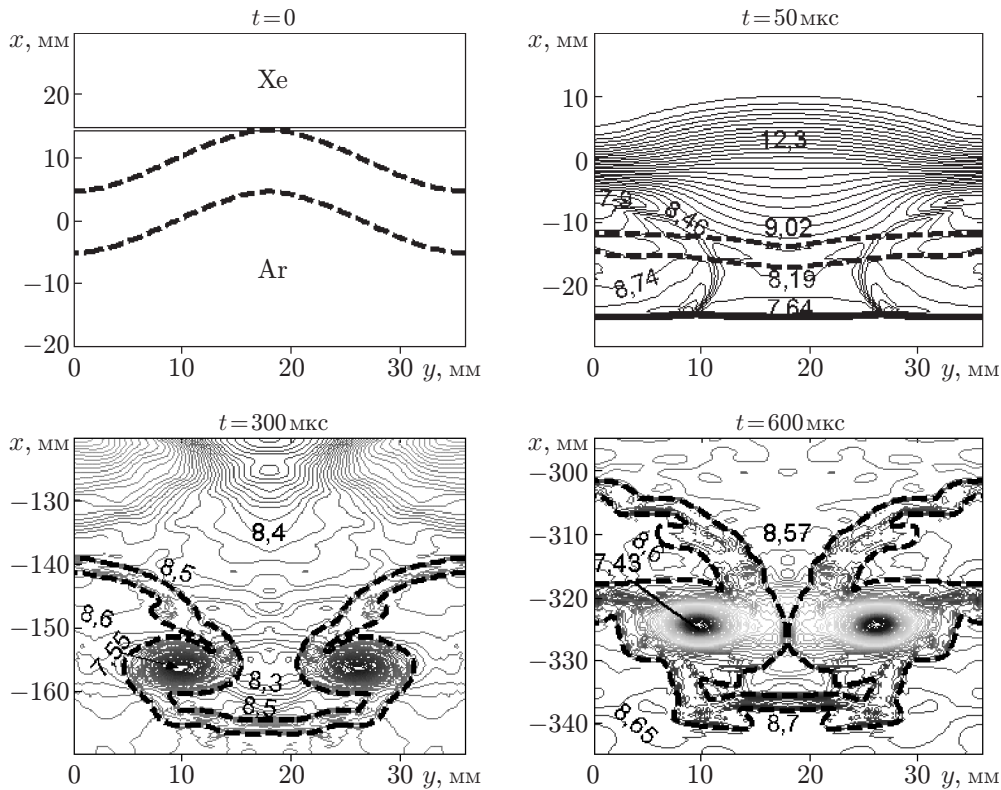


Рис. 7. Изолинии полного давления смеси в различные моменты времени при прохождении ударной волны из ксенона в аргон

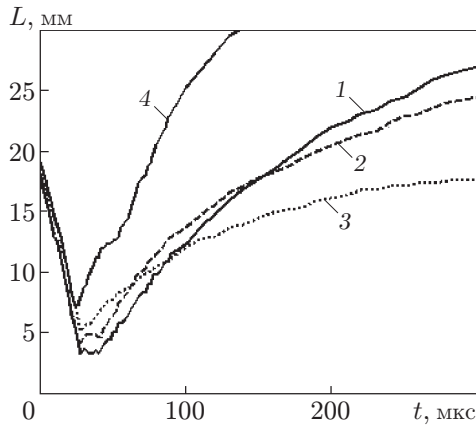


Рис. 8. Изменение во времени полной ширины слоя смешения для различных значений λ при $M = 3,5$:

кривые 1–3 — Xe \rightarrow Ar (1 — $\lambda = 36$ мм; 2 — $\lambda = 24$ мм; 3 — $\lambda = 12$ мм); кривая 4 — Xe \rightarrow He, $\lambda = 36$ мм

На рис. 8 приведена зависимость $L(t)$ для различных значений длины волны возмущения (кривые 1–3). На начальной стадии развития неустойчивости меньшей длине волны возмущения соответствует более быстрое увеличение ширины слоя. С течением времени уменьшение длины волны возмущения приводит к более раннему возникновению вихревых структур и интенсивному росту слоя смешения в поперечном направлении и уменьшению ширины слоя в продольном направлении (например, кривые 1, 3). При $M = 3,5$ увеличение отношения масс молекул (кривая 4) приводит к более глубокому проникновению струи тяжелого газа (Xe) в легкий (He).

Выводы. В работе математическая модель двухскоростной двухтемпературной смеси газов [12, 13] применена для описания процессов, протекающих при взаимодействии ударных волн с синусоидально возмущенной областью смешения двух газов.

Проведен анализ возникающих волновых картин течения при переходе ударной волны как из легкого газа в тяжелый, так и из тяжелого в легкий. Показано, что учет первоначальной конечной ширины слоя смешения приводит к уменьшению скорости роста относительной ширины слоя.

Обнаружено, что на границах струи возникают вихри с центром в слое смешения, где каждый компонент характеризуется собственной скоростью. Появление таких вихревых образований приводит к интенсивному расширению слоя в поперечном направлении, что в свою очередь, ведет к взаимодействию соседних струй друг с другом.

Математическая модель верифицирована по результатам измерений роста амплитуды возмущения слоя смешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Richtmyer R. D.** Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // *Communs Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 297–319.
2. **Мешков Е. Е.** Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1969. № 5. С. 151–157.
3. **Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М.** Последовательный переход к турбулентности в неустойчивости Рихтмайера — Мешкова // *Докл. РАН.* 1994. Т. 334, № 5. С. 581–583.
4. **Lebo I. G., Nikishin V. V., Rozanov V. B., Tishkin V. F.** On the effect of boundary conditions on the instability growth at a contact surface in passage of a shock wave // *Bull. Lebedev Phys. Inst.* 1997. N 1. P. 40–47.
5. **Youngs D. L.** Numerical simulation of mixing by Rayleigh — Taylor and Richtmyer — Meshkov instabilities // *Laser and Particle Beams.* 1994. V. 12, N 4. P. 725–750.
6. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamics and hydromagnetic stability. Oxford: Oxford Univ., 1961. P. 428–436.
7. **Chakraborty B. B.** Rayleigh — Taylor instability of heavy fluid // *Phys. Fluids.* 1975. V. 18, N 8. P. 1066, 1067.
8. **Duff R. E., Harlow F. H., Hirt C. W.** Effects of diffusion on interface instability between gases // *Phys. Fluids.* 1962. V. 5, N 4. P. 417–425.
9. **Brouillette M., Sturtevant B.** Experiments on the Richtmyer — Meshkov instability: single-scale perturbations on a continuous interface // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 263. P. 271–292.
10. **Зайцев С. Г., Титов С. Н., Чеботарева Е. И.** Эволюция переходного слоя, разделяющего разноплотные газы, при прохождении через него ударной волны // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 1994. № 2. С. 18–26.
11. **Куропатенко В. Ф.** Неустановившиеся течения многокомпонентных сред // *Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред.* Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1989. С. 128–155.
12. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1992.
13. **Руев Г. А., Федоров А. В., Фомин В. М.** Эволюция диффузионного слоя смешения двух газов при взаимодействии его с ударными волнами // *ПМТФ.* 2004. Т. 45, № 3. С. 24–31.
14. **Anderson W. K., Thomas J. L., Van Leer B.** Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // *AIAA J.* 1986. V. 24, N 9. P. 1453–1460.
15. **Chakravarthy S. R., Osher S. A.** A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. N. Y., 1985. (Paper/AIAA; N 85-0363).