

УДК 539.3

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ В СЛУЧАЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

А. О. Ватульян, Е. М. Чебакова

Ростовский государственный университет, 344104 Ростов-на-Дону  
E-mail: a\_lena\_ch@mail.ru

Построено интегральное представление фундаментального решения для ортотропной среды в случае установившихся колебаний, изучены его асимптотики при больших значениях волнового числа, выявлены особенности структуры волновых полей.

Ключевые слова: колебания, ортотропная среда, фундаментальные решения, асимптотика.

**Введение.** Метод граничных интегральных уравнений является эффективным средством анализа краевых задач в теории упругости [1], позволяющим понизить размерность исследуемых задач на единицу. Ключевым моментом при формулировке граничных интегральных уравнений является построение фундаментальных решений [2]. Если в изотропной теории упругости в случае установившихся колебаний в двумерном случае фундаментальные решения выражаются через функции Ханкеля, то в ортотропном случае явные представления их построить нельзя, однако для практического применения достаточно иметь интегральные представления. Такое решение в виде интегралов по контуру в комплексной плоскости получено в [3]. Настоящая работа посвящена построению представления фундаментальных решений для ортотропной среды [4] в плоском случае в виде интегралов по конечному отрезку и их исследованию.

**Постановка задачи.** Рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  неограниченной ортотропной упругой среды в условиях плоской деформации под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке с координатами  $(\xi_1, \xi_3)$ .

Уравнения движения для амплитуд колебаний в случае ортотропного материала после отделения временного множителя  $e^{-i\omega t}$  имеют вид

$$L_{ij}U_j^{(m)} + \rho\omega^2 U_i^{(m)} + \delta(x - \xi)\delta_{im} = 0, \quad m = 1, 3, \quad (1)$$

где  $L_{ij}$  — дифференциальные операторы в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \partial_1^2 + C_{55} \partial_3^2, & L_{33} &= C_{55} \partial_1^2 + C_{33} \partial_3^2, \\ L_{13} &= (C_{13} + C_{55}) \partial_1 \partial_3 = L_{31}, & \partial_j &= \partial/\partial x_j, \quad j = 1, 3; \end{aligned}$$

$C_{ij}$  — упругие постоянные ортотропного материала, подчиненные известным условиям симметричности и положительной определенности упругой энергии;  $\rho$  — плотность материала. Задача о построении фундаментальных решений замыкается условиями излучения на бесконечности, при формулировании которых использован принцип предельного поглощения [5].

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-2113.2003.1).

**Построение решения.** Система уравнений (1) может быть сведена операторным методом к разрешающим уравнениям [6], проблема интегрирования которых существенно упрощается, если оператор этих уравнений может быть представлен суперпозицией двух обобщенных метагармонических операторов второго порядка и может быть использован метод коррекции их упругих постоянных. Отметим, что при реализации этого метода построения фундаментальных решений возникает большая погрешность, поэтому далее будет применяться другая методика.

Решение системы уравнений (1) строится при помощи двумерного интегрального преобразования Фурье и имеет вид [3, 4]

$$U_j^{(m)}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma} \frac{p_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega)}{p_0(\alpha_1, \alpha_3, \omega)} \exp[i(\alpha_1(\xi_1 - x_1) + \alpha_3(\xi_3 - x_3))] d\alpha_1 d\alpha_3. \quad (2)$$

Здесь  $p_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$ ,  $p_0(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$  — полиномы соответственно второго и четвертого порядков

$$p_{1m}(\alpha_1, \alpha_3, \omega) = \delta_{1m}(C_{55}\alpha_1^2 + C_{33}\alpha_3^2 - \rho\omega^2) - \delta_{3m}\alpha_1\alpha_3(C_{13} + C_{55}),$$

$$p_{3m}(\alpha_1, \alpha_3, \omega) = \delta_{3m}(C_{11}\alpha_1^2 + C_{55}\alpha_3^2 - \rho\omega^2) - \delta_{1m}\alpha_1\alpha_3(C_{13} + C_{55}),$$

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3, \omega) = (C_{11}\alpha_1^2 + C_{55}\alpha_3^2 - \rho\omega^2)(C_{55}\alpha_1^2 + C_{33}\alpha_3^2 - \rho\omega^2) - \alpha_1^2\alpha_3^2(C_{13} + C_{55})^2,$$

которые обладают свойством четности:  $p_{jm}(-\alpha_1, -\alpha_3, \omega) = p_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$ ,  $p_0(-\alpha_1, -\alpha_3, \omega) = p_0(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$ ;  $\Gamma$  — поверхность, совпадающая с вещественной плоскостью  $R_2$ , за исключением окрестностей нулей полинома  $p_0(\alpha_1, \alpha_3, \omega)$ , которые она огибает снизу в соответствии с условиями излучения.

**Исследование кривых полярных множеств.** Переходя к безразмерным переменным

$$\alpha_j = k\beta_j, \quad k = \omega \left( \frac{\rho}{C_{33}} \right)^{1/2}, \quad \gamma_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad \gamma_5 = \frac{C_{55}}{C_{33}}, \quad \gamma_7 = \frac{C_{13}}{C_{33}}$$

и вводя замену  $\beta_1 = \beta \cos \varphi$ ,  $\beta_3 = \beta \sin \varphi$ , представим  $p_0$ ,  $p_{jm}$  в виде

$$p_0(\alpha_1, \alpha_3, \omega) = p_0(k\beta \cos \varphi, k\beta \sin \varphi) = C_{33}^2 k^4 p_0^*(\beta, \varphi),$$

$$p_{jm}(\alpha_1, \alpha_3, \omega) = p_{jm}(k\beta \cos \varphi, k\beta \sin \varphi) = C_{33} k^2 p_{jm}^*(\beta, \varphi), \quad j, m = 1, 3$$

и исследуем нули полинома  $p_0^*(\beta, \varphi)$ . Полином является биквадратным относительно параметра  $\beta$ , и для него справедливо представление

$$p_0^*(\beta, \varphi) = A(\varphi)(\beta^2 - \zeta_1^2(\varphi))(\beta^2 - \zeta_2^2(\varphi)),$$

где

$$\zeta_1^2(\varphi) = (b(\varphi) - \sqrt{D(\varphi)})/(2A(\varphi)), \quad \zeta_2^2(\varphi) = (b(\varphi) + \sqrt{D(\varphi)})/(2A(\varphi)),$$

$$A(\varphi) = \gamma_1\gamma_5 \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (\gamma_1 - 2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_7^2) + \gamma_5 \sin^4 \varphi, \quad b(\varphi) = \gamma_5 + \sin^2 \varphi + \gamma_1 \cos^2 \varphi,$$

$$D(\varphi) = [(\gamma_1 - \gamma_5) \cos^2 \varphi + (\gamma_5 - 1) \sin^2 \varphi]^2 + 4(\gamma_5 + \gamma_7)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Исследуем дискриминант полинома  $p_0^*(\beta, \varphi)$  — функцию  $D(\varphi)$ . Нетрудно видеть, что  $D(\varphi) \geq 0$ , причем равенство нулю возможно только в двух случаях: 1)  $\varphi = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_5$ ; 2)  $\varphi = \pi/2$ ,  $\gamma_5 = 1$ . Эти случаи будем считать исключительными, поскольку в них полином  $p_0^*(\beta, \varphi)$  имеет кратные корни, и далее рассматривать не будем. Во всех остальных случаях дискриминант положителен и множество нулей полинома  $p_0^*(\beta, \varphi)$  представляет собой две замкнутые непересекающиеся кривые  $\zeta_1(\varphi)$  и  $\zeta_2(\varphi)$ , которые обладают симметрией относительно обеих координатных осей и пересекают их под прямыми углами.

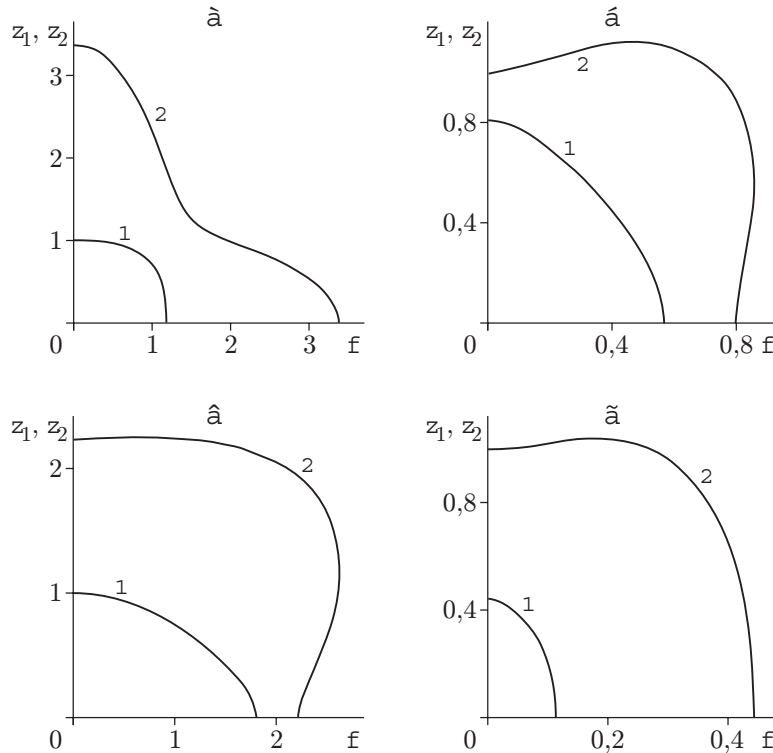


Рис. 1

Обе кривые являются алгебраическими кривыми четвертого порядка, а из общей теории кривых четвертого порядка [7] следует, что внутренняя кривая  $\zeta_1(\varphi)$  для любого материала выпуклая, а возможное число точек перегиба на внешней кривой  $\zeta_2(\varphi)$  равняется 8, 4 или 0. Подробная классификация кривых в зависимости от безразмерных параметров  $\alpha = \gamma_5/\gamma_1$ ,  $\beta = \gamma_5$ ,  $\gamma = 1 - (\gamma_7(\gamma_7 + 2\gamma_5))/\gamma_1$  дана в работе [8], причем установлено, что возможны четыре качественно различных конфигурации этих кривых (рис. 1, кривая 1 — зависимость  $\zeta_1(\varphi)$ , кривая 2 —  $\zeta_2(\varphi)$ ). Следует отметить, что участки с отрицательной кривизной на внешней кривой могут не пересекаться с координатными осями, пересекать обе оси или одну из осей. При реализации метода коррекции упругих постоянных [6] полярные множества всегда представляют собой два эллипса, в отличие от рассмотренных выше кривых четвертого порядка.

Безразмерные параметры  $\gamma_1, \gamma_5, \gamma_7$  полностью определяют конфигурации кривых  $\zeta_1(\varphi)$  и  $\zeta_2(\varphi)$ . Исследуем, как будут меняться конфигурации этих кривых в зависимости от параметра  $\gamma_5$  при фиксированных параметрах  $\gamma_1 = 0,4$  и  $\gamma_7 = 0,2$ . На рис. 2, а, б приведены кривые  $\zeta_1(\varphi)$  и  $\zeta_2(\varphi)$  соответственно при малых значениях  $\gamma_5 = 0,1 \div 0,8$ , на рис. 2, в — кривая  $\zeta_1(\varphi)$  при больших значениях  $\gamma_5 = 5 \div 100$ . Кривые  $\zeta_2(\varphi)$  при малых  $\gamma_5$  в первом квадранте имеют одну общую точку с полярными координатами  $(0,615; 2,236)$ , а при больших  $\gamma_5$  кривые  $\zeta_2(\varphi)$  практически не различаются.

**Построение решения в виде однократного интеграла.** Для упрощения (2) представим подынтегральное выражение в виде

$$\frac{p_{jm}^*(\beta \cos \varphi, \beta \sin \varphi)}{p_0^*(\beta \cos \varphi, \beta \sin \varphi)} = \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)(\beta^2 - \zeta_k^2(\varphi))},$$

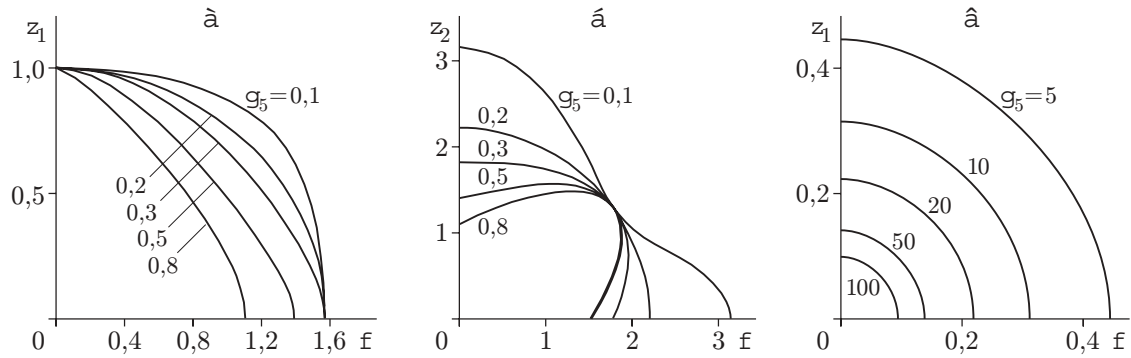


Рис. 2

где

$$a_{1jm}(\varphi) = \frac{B_{jm} - \zeta_1^2(\varphi)G_{jm}(\varphi)}{\zeta_2^2(\varphi) - \zeta_1^2(\varphi)}, \quad a_{2jm}(\varphi) = \frac{-B_{jm} + \zeta_2^2(\varphi)G_{jm}(\varphi)}{\zeta_2^2(\varphi) - \zeta_1^2(\varphi)},$$

$$G_{11} = \gamma_5 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi, \quad G_{33} = \gamma_1 \cos^2 \varphi + \gamma_5 \sin^2 \varphi,$$

$$G_{13} = G_{31} = -(\gamma_5 + \gamma_7) \sin \varphi \cos \varphi, \quad B_{11} = B_{33} = 1, \quad B_{13} = B_{31} = 0.$$

Учтем, что для любых ортотропных материалов имеют место следующие свойства функций:

$$a_{kjm}(\varphi + \pi) = a_{kjm}(\varphi), \quad a_{kjj}(-\varphi) = a_{kjj}(\varphi), \quad a_{k13}(-\varphi) = -a_{k13}(\varphi),$$

$$\zeta_k(\pi + \varphi) = \zeta_k(\varphi) = \zeta_k(-\varphi), \quad k = 1, 2, \quad j, m = 1, 3.$$

В представлении (2) перейдем к полярной системе координат

$$|x - \xi| = r, \quad \xi_1 - x_1 = r \cos \psi, \quad \xi_3 - x_3 = r \sin \psi,$$

причем в силу упругой симметрии будем считать, что  $\psi \in [0, \pi/2]$ . Тогда

$$U_j^{(m)}(r, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^2 C_{33}} \int_{\sigma_+} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)(\beta^2 - \zeta_k^2(\varphi))} \exp(ik\beta r \cos(\varphi - \psi)) \beta d\beta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 C_{33}} \int_{\sigma_+} \int_0^\pi \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)(\beta^2 - \zeta_k^2(\varphi))} \times$$

$$\times [\exp(ik\beta r \cos(\varphi - \psi)) + \exp(-ik\beta r \cos(\varphi - \psi))] \beta d\beta d\varphi$$

( $\sigma_+$  — часть сечения поверхности  $\Gamma$  плоскостью  $\varphi = \text{const}$ , лежащая в правой полуплоскости и огибающая полюсы подынтегральной функции снизу). Вычисление интегралов по контуру  $\sigma_+$  производится далее по методике, изложенной в [9].

Рассмотрим интеграл

$$I_2(z, \zeta) = \int_{\sigma_+} \frac{\exp(i\beta z) + \exp(-i\beta z)}{\beta^2 - \zeta^2} \beta d\beta,$$

для вычисления которого введем контуры

$$C_\Gamma^+ = \sigma_R^+ \cup C_R^+ \cup [iR, 0], \quad C_\Gamma^- = \sigma_R^- \cup C_R^- \cup [-iR, 0]$$

( $C_R^+$ ,  $C_R^-$  — части окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат, лежащие в первом и четвертом квадрантах соответственно;  $\sigma_R^+$  — часть контура  $\sigma_+$ , находящаяся внутри окружности радиуса  $R$ ).

Используя контурное интегрирование и лемму Жордана [10], находим

$$I_2(z, \zeta) = \pi i \exp(iz\zeta) + \int_0^\infty \frac{\exp(-tz\zeta)}{t^2 + 1} t dt = \pi i \exp(iz\zeta) - [\text{ci}(z\zeta) \cos(z\zeta) + \text{si}(z\zeta) \sin(z\zeta)],$$

где  $\text{ci}(x)$  и  $\text{si}(x)$  — интегральные косинус и синус [11]:

$$\text{ci}(\gamma) = C + \ln \gamma + \int_0^\gamma \frac{\cos t - 1}{t} dt, \quad \text{si}(\gamma) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^\gamma \frac{\sin t}{t} dt$$

( $C$  — постоянная Эйлера).

Аналогично вычисляется  $I_2(z, \zeta)$  при  $z < 0$ . Объединяя эти два случая, получаем следующее представление для фундаментальных решений:

$$U_j^{(m)}(r, \psi) = \frac{1}{2\pi^2 C_{33}} \int_0^\pi \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)} F_2(t_k(r, \varphi, \psi)) d\varphi, \quad (3)$$

$$F_2(z) = (\pi i/2) e^{i|z|} - \text{ci}|z| \cos|z| - \text{si}|z| \sin|z|, \quad t_k(r, \varphi, \psi) = kr\zeta_k(\varphi) \cos(\varphi - \psi).$$

В случае изотропного материала

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_5 = (1 - 2\nu)/(2(1 - \nu)), \quad \gamma_7 = \nu/(1 - \nu)$$

( $\nu$  — коэффициент Пуассона);  $\zeta_1(\varphi)$ ,  $\zeta_2(\varphi)$  — окружности, а представление (3) переходит в известное представление через функции Ханкеля [1].

Отметим, что построенные фундаментальные решения обладают следующими свойствами симметрии:

$$U_j^{(m)}(r, \psi) = U_j^{(m)}(r, \pi + \psi), \quad j, m = 1, 3, \quad U_j^{(m)}(r, -\psi) = U_j^{(m)}(r, \psi), \quad j = m, \\ U_j^{(m)}(r, -\psi) = -U_j^{(m)}(r, \psi), \quad j \neq m.$$

**Построение асимптотик.** Исследуем структуру фундаментальных решений (3) при малых и больших значениях  $r$ , используя асимптотики специальных функций.

Учитывая, что  $\text{si}(z) \sim -\pi/2$ ,  $\text{ci}(z) \sim C + \ln z$  при  $z \rightarrow 0$  [11], получим асимптотику фундаментальных решений (3) при  $r \rightarrow 0$

$$U_j^{(m)}(r, \psi) = -\frac{\ln(kr)}{2\pi^2 C_{33}} \int_0^\pi \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)} d\varphi + O(1), \quad j, m = 1, 3. \quad (4)$$

Из (4) следует, что главный член асимптотики фундаментальных решений при  $r \rightarrow 0$  имеет логарифмическую особенность, как и в изотропном случае.

Учитывая, что согласно [11] при  $|z| \rightarrow \infty$  имеет место оценка  $-\text{ci}|z| \cos|z| - \text{si}|z| \sin|z| = O(1/z^2)$ , а также свойства функций  $a_{kjm}(\varphi)$ ,  $A(\varphi)$ ,  $\zeta_k(\varphi)$ , можно показать, что главный вклад в асимптотику фундаментальных решений при больших  $r$  дают следующие два интеграла:

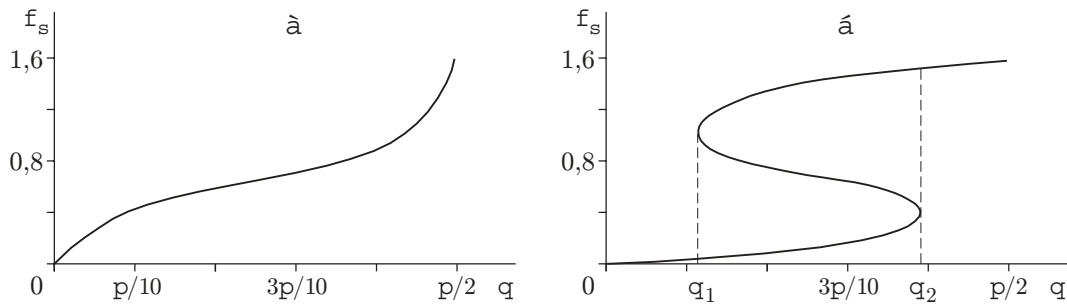


Рис. 3

$$U_j^{(m)}(r, \psi) = \frac{i}{4\pi C_{33}} \left( \int_0^{\psi+\pi/2} \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)} \exp[ikr\zeta_k(\varphi) \cos(\varphi - \psi)] d\varphi + \right. \\ \left. + \int_{\psi+\pi/2}^{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{a_{kjm}(\varphi)}{A(\varphi)} \exp[-ikr\zeta_k(\varphi) \cos(\varphi - \psi)] d\varphi \right), \quad j, m = 1, 3. \quad (5)$$

Далее для построения асимптотики при  $r \rightarrow +\infty$  применим метод стационарной фазы [12]. Чтобы найти значения стационарных точек фазовых функций

$$S_k^+(\varphi, \psi) = \zeta_k(\varphi) \cos(\varphi - \psi), \quad \varphi \in [0, \psi + \pi/2],$$

$$S_k^-(\varphi, \psi) = -\zeta_k(\varphi) \cos(\varphi - \psi), \quad \varphi \in [\psi + \pi/2, \pi] \quad (k = 1, 2)$$

при разных значениях полярного угла  $\psi \in [0, \pi/2]$ , численно решим уравнения

$$\zeta_k'(\varphi) \cos(\varphi - \psi) - \zeta_k(\varphi) \sin(\varphi - \psi) = 0, \quad k = 1, 2.$$

На рис. 3, а, б приведены значения стационарных точек  $\varphi_s(\psi)$  фазовых функций  $S_k^\pm(\varphi, \psi)$  соответственно при  $k = 1$  и  $2$ . Безразмерные параметры материала  $\text{BaSO}_4$ , для которого проводились вычисления, таковы:  $\gamma_1 = 0,687$ ,  $\gamma_5 = 0,0865$ ,  $\gamma_7 = 0,313$ .

На рис. 3 видно, что при каждом значении полярного угла  $\psi \in [0, \pi/2]$  существует всегда одно значение стационарной точки фазовых функций  $S_1^\pm(\varphi, \psi)$ . Имеется несколько областей изменения полярного угла, в каждой из которых существует либо одно значение стационарной точки фазовых функций  $S_2^\pm(\varphi, \psi)$ , либо три значения. А именно: при  $\psi \in [0, \psi_1) \cup (\psi_2, \pi/2]$  найдено одно значение, при  $\psi \in (\psi_1, \psi_2)$  — три значения; на границах этих областей ( $\psi = \psi_1$ ,  $\psi = \psi_2$ ) существует по два значения стационарных точек, причем одно из них кратное и является решением системы

$$S_\varphi^{\pm'}(\varphi, \psi) = 0, \quad S_{\varphi\varphi}^{\pm''}(\varphi, \psi) = 0, \quad S_{\varphi\varphi\varphi}^{\pm'''}(\varphi, \psi) \neq 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \psi \in [0, \pi/2],$$

что соответствует вырожденному значению стационарной точки. Направление  $\psi$ , соответствующее решению этой системы, назовем критическим. Отметим, что кривизна  $\kappa(\varphi)$  функции  $\zeta_2(\varphi)$  для этого значения  $\psi$  обращается в нуль.

Применяя метод стационарной фазы к каждому интегралу в (5), получим формулу главной части асимптотики при  $r \rightarrow +\infty$  для  $U_j^{(m)}(r, \psi)$ :

$$U_j^{(m)}(r, \psi) = \frac{i}{4\pi C_{33}} \left( \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^M \sqrt{\frac{1}{|S_k^{\pm''}(\varphi_s(\psi), \psi)|}} \left[ \frac{a_{kjm}(\varphi_s(\psi))}{A(\varphi_s(\psi))} + O((kr)^{-1}) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ ikr S_k^+(\varphi_s(\psi), \psi) + \frac{i\pi}{4} \text{sign}(S_k^{\pm''}(\varphi_s(\psi), \psi)) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^M \sqrt{\frac{1}{|S_k^{-''}(\varphi_s(\psi), \psi)|}} \left[ \frac{a_{kjm}(\varphi_s(\psi))}{A(\varphi_s(\psi))} + O((kr)^{-1}) \right] \times \\
 & \times \exp \left[ ikr S_k^{-}(\varphi_s(\psi), \psi) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sign}(S_k^{-''}(\varphi_s(\psi), \psi)) \right], \quad j, m = 1, 3. \quad (6)
 \end{aligned}$$

В (6) верхний предел суммирования  $M$  может равняться 1, 2 или 3 в зависимости от количества значений стационарных точек. При каждом фиксированном  $\psi \in [0, \pi/2]$  фазовые функции  $S_k^{+}(\varphi, \psi)$  и  $S_k^{-}(\varphi, \psi)$  имеют стационарные точки, принадлежащие отрезкам  $[0, \psi + \pi/2]$  и  $[\psi + \pi/2, \pi]$  соответственно.

Вклад в главную часть асимптотики (6) в критических направлениях имеет вид

$$\begin{aligned}
 U_j^{(m)}(r, \psi_{1,2}) & = \frac{i}{4\pi C_{33}} \frac{\Gamma(1/3)}{3} (kr)^{-1/3} \left[ \frac{a_{2jm}(\varphi_s(\psi_{1,2}))}{A(\varphi_s(\psi_{1,2}))} + O((kr)^{-1/3}) \right] \times \\
 & \times \exp \left[ ikr S_2^{\pm}(\varphi_s(\psi_{1,2}), \psi_{1,2}) + \frac{i\pi}{6} \operatorname{sign} S_2^{\pm''' }(\varphi_s(\psi_{1,2}), \psi_{1,2}) \right], \quad j, m = 1, 3.
 \end{aligned}$$

Представим главную часть асимптотики фундаментальных решений  $U_j^{(m)}(r, \psi)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U_j^{(m)}(r, \psi) & = \frac{1}{\sqrt{kr}} \sum_{k=1}^2 A_{jmk}(\psi) \exp [ikr S_k(\psi)], \quad \psi \in [0, \psi_1) \cup (\psi_2, \pi/2], \\
 U_j^{(m)}(r, \psi) & = \frac{1}{\sqrt{kr}} \sum_{k=1}^4 A_{jmk}(\psi) \exp [ikr S_k(\psi)], \quad \psi \in (\psi_1, \psi_2) \quad (j, m = 1, 3), \quad (7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{j m 1}(\psi) & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{4C_{33}} \sqrt{\frac{1}{|S_1''(\varphi_*(\psi), \psi)|}} \frac{a_{1jm}(\varphi_*(\psi))}{A(\varphi_*(\psi))} \exp \left[ \frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} S_1(\varphi_*(\psi), \psi) \right], \\
 A_{j m k}(\psi) & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{4C_{33}} \sqrt{\frac{1}{|S_k''(\varphi_{k-1}(\psi), \psi)|}} \frac{a_{kjm}(\varphi_{k-1}(\psi))}{A(\varphi_{k-1}(\psi))} \exp \left[ \frac{i\pi}{4} \operatorname{sign} S_k(\varphi_{k-1}(\psi), \psi) \right] \\
 & \quad (k = 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

— амплитуды;

$$S_1(\psi) = \zeta_1(\varphi_*(\psi)) \cos(\varphi_*(\psi) - \psi), \quad S_k(\psi) = \zeta_2(\varphi_{k-1}(\psi)) \cos(\varphi_{k-1}(\psi) - \psi) \quad (k = 2, 3, 4)$$

— фазы колебаний. На рис. 4 представлены зависимости фаз от полярного угла в первом квадранте (в силу симметрии фазовых функций относительно осей координат). Эти зависимости соответствуют четырем различным конфигурациям кривых  $\zeta_k(\varphi)$  ( $k = 1, 2$ ), изображенных на рис. 1, а–г. На рис. 4, а на участках  $\psi \in [0, \psi_1) \cup (\psi_2, \pi/2]$  приведены функции  $S_1(\psi)$  и  $S_2(\psi)$  (кривые 1 и 2 соответственно), а на участке  $\psi \in (\psi_1, \psi_2)$  — функции  $S_k(\psi)$  ( $k = 1$  соответствует кривой 1,  $k = 2, 3, 4$  — кривой 2). На участке  $\psi \in (\psi_1, \psi_2)$  функции  $S_3(\psi)$  и  $S_4(\psi)$  образуют треугольный лепесток в центре рисунка. На рис. 4, б–г лепестки, образованные  $S_3(\psi)$  и  $S_4(\psi)$ , пересекают оси координат, на них изображены половины соответствующих криволинейных треугольников.

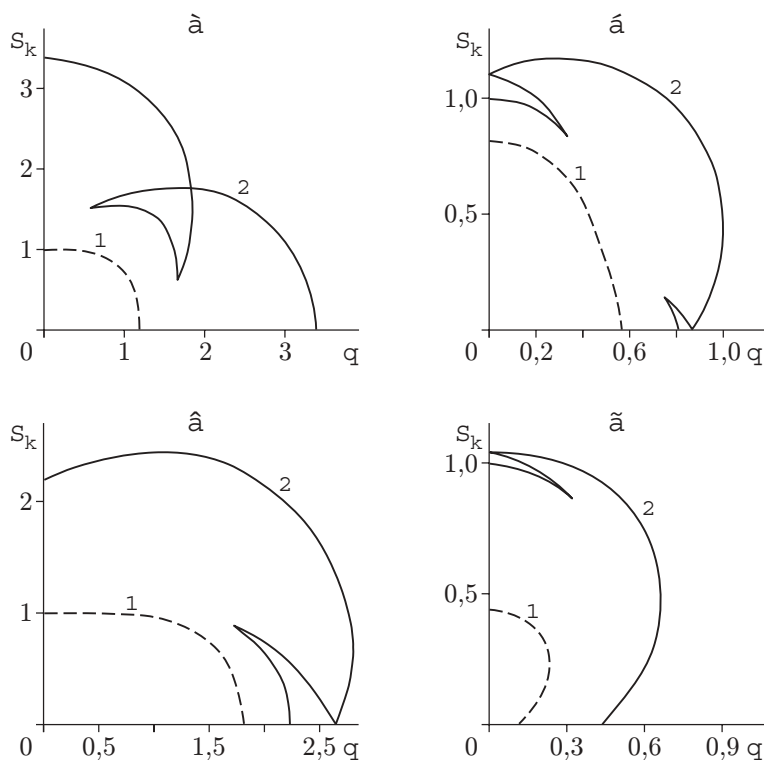


Рис. 4

Из (7) следует, что в разных зонах изменения угла  $\psi$  имеется различное число распространяющихся мод колебаний (от двух до четырех). Отметим, что получить такую структуру волнового поля в дальней зоне методом коррекции упругих постоянных [6] невозможно, так как он дает для всех направлений две бегущие волны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
2. **Алексидзе М. А.** Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991.
3. **Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М.** О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.
4. **Чебакова Е. М.** Об одном представлении фундаментальных решений для ортотропной среды // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. VII Междунар. конф. памяти акад. И. И. Воровича, Ростов-на-Дону, 22–24 окт. 2001 г. Ростов на/Д: Науч.-исслед. ин-т механики и прикл. математики, 2002. Т. 2. С. 159–163.
5. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
6. **Механика композитов / Под общ. ред. А. Н. Гузя.** Т. 7: Концентрация напряжений. Киев: Изд-во “А.С.К.”, 1998.
7. **Савелов А. А.** Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960.
8. **Будаев В. С.** Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 3. С. 33–40.



9. **Ватульян А. О., Кирютенко А. Ю., Наседкин А. В.** Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 135–142.
10. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
11. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
12. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 6/XI 2003 г.*

---