

УДК 539.387

## ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА О ВЫПУЧИВАНИИ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

В. Тиббун, М. Мерджах, К. Х. Бенраху, А. Тунси

Университет Сиди Бель Аббес, 22000 Сиди Бель Аббес, Алжир  
E-mails: tebboune\_w@yahoo.fr, mdjh\_mus@yahoo.fr, khbenrahou@yahoo.fr,  
tou\_abdel@yahoo.com

С использованием экспоненциального закона для деформаций сдвига исследуется термоупругая задача о выпучивании толстой пластины, изготовленной из функционально-градиентного материала. На основе закона смесей строится степенная зависимость характеристик материала от толщины оболочки. С использованием нелинейных соотношений между деформациями и перемещениями определяется положение нейтральной поверхности в пластине из функционально-градиентного материала. Рассматриваются случаи равномерного, линейного и нелинейного распределений температуры по толщине оболочки. Получено аналитическое решение задачи определения критической нагрузки выпучивания, которое может быть использовано в инженерных расчетах. Представлены результаты численного решения задачи с использованием экспоненциальной зависимости для деформаций сдвига. Проведено сравнение полученных результатов с известными данными.

**Ключевые слова:** термоупругое выпучивание, функционально-градиентный материал, деформации сдвига, положение нейтральной поверхности.

**Введение.** Композитные материалы широко применяются в инженерной практике, поскольку конструкции из таких материалов обладают высокой прочностью при сравнительно небольшой массе. Однако в традиционных композитных материалах изменение свойств происходит скачкообразно, что может привести к расслоению по межслойным поверхностям при высоких температурах. Новые композитные материалы, называемые функционально-градиентными материалами (ФГМ), создаются из керамики и металла. За счет наличия керамической составляющей такие материалы выдерживают высокие температуры, металлическая составляющая обеспечивает их высокую прочность. В отличие от характеристик традиционных композитных материалов характеристики ФГМ распределены непрерывно по объему, что обеспечивает их целостность при высоких температурах. Поэтому такие материалы широко применяются в самолетостроении, аэрокосмической технике, ядерной технике и других областях, где конструкции подвергаются воздействию высоких температур. Пластины из ФГМ также используются в конструкциях, работающих при повышенных температурах. Для обеспечения надежной работы таких пластин необходим анализ их устойчивости.

Существует большое количество работ, посвященных исследованию выпучивания пластин, выполненных из ФГМ, с учетом температурных воздействий при степенном за-

коне изменения характеристик ФГМ по толщине пластины. В работе [1] с использованием теории высшего порядка и вариационного метода получены уравнения равновесия прямоугольных пластин из ФГМ при температурных воздействиях, аналогичные соответствующим уравнениям для слоистых композитных пластин. В работе [2] с помощью теории высшего порядка, учитывающей деформации сдвига, изучено выпучивание свободно опертой пластины из ФГМ при различных температурных воздействиях, с использованием метода Навье получено замкнутое решение. В работе [3] с помощью степенного закона распределения характеристик материала по толщине пластины и вариационного метода решена задача о выпучивании круглой пластины из ФГМ. Уравнения равновесия толстых пластин из ФГМ получены в работе [4]. Рассмотрены случаи равномерного и неравномерного распределений температуры по толщине пластины. В [4] также исследуется влияние соотношения составляющих ФГМ и учета поперечного сдвига на выпучивание пластины в условиях температурного нагружения.

В работе [5] с использованием теории пластин третьего порядка, учитывающей поперечный сдвиг, проведен анализ выпучивания толстой прямоугольной пластины из ФГМ под действием механических и температурных нагрузок. Методом Навье получено замкнутое выражение для критической нагрузки и температуры для свободно опертой прямоугольной пластины, механические характеристики которой изменяются по толщине по линейному закону.

Выпучивание пластины, изготовленной из ФГМ, под действием температурных и аэродинамических нагрузок изучалось в работе [6]. Обнаружено, что повышение температуры приводит к уменьшению критического значения динамического давления. Уменьшение объемной доли керамики приводит к увеличению сопротивления флаттеру.

В работе [7] с использованием теории первого порядка исследовалась устойчивость панели из ФГМ при действии температурных и аэродинамических нагрузок. Моделировалось воздействие на панель сверхзвуковой аэродинамической нагрузки. В [8] при исследовании выпучивания пластин из ФГМ при температурном нагружении использовалась теория третьего порядка, учитывающая поперечный сдвиг. С помощью разложений смещений в степенные ряды получены основные уравнения для прямоугольных пластин. В [9] выпучивание пластин, выполненных из ФГМ, при температурном нагружении исследовалось на основе теории первого порядка, учитывающей сдвиг.

Свойства пластин из ФГМ несимметричны относительно срединной плоскости, поэтому уравнения изгиба и уравнения растяжения-сжатия в теории третьего порядка, учитывающей сдвиг, связаны между собой, что затрудняет получение аналитических решений. Имеется лишь небольшое количество аналитических решений, полученных в простых случаях, таких как осесимметричная задача для круглой пластины или задача для свободно опертой прямоугольной пластины.

В ряде работ показано, что при соответствующем выборе отсчетной поверхности уравнения изгиба и растяжения-сжатия расщепляются (см. [10–13]). В [14] на основе классической теории тонких пластин исследовано выпучивание тонкой пластины, изготовленной из ФГМ, под действием неравномерной нагрузки, действующей в плоскости пластины. С помощью концепции нейтральной поверхности показано, что уравнения задачи об устойчивости, основанные на классической теории пластин, сводятся к одному уравнению, которое может быть решено с использованием степенных рядов.

Насколько известно авторам данной работы, исследования выпучивания пластин из ФГМ при действии температурных нагрузок с использованием теорий высшего порядка, учитывающих поперечный сдвиг, и концепции нейтральной поверхности не проводились.

В данной работе для вывода уравнений равновесия прямоугольных пластин из ФГМ принимается экспоненциальный закон распределения деформаций сдвига по толщине обо-

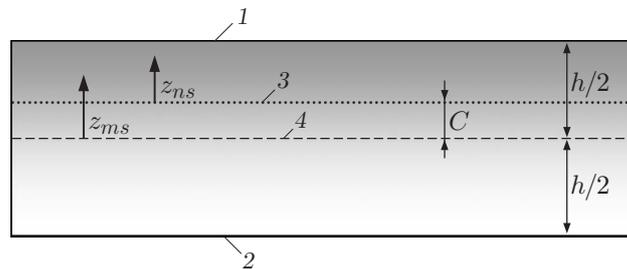


Рис. 1. Положение нейтральной и срединной поверхностей в пластине из ФГМ:  
 1 — керамическая поверхность, 2 — металлическая поверхность, 3 — нейтральная поверхность, 4 — срединная поверхность

лочки и используются концепция нейтральной поверхности и геометрическая нелинейность в смысле Кармана. С помощью соответствующего критерия устойчивости равновесного состояния получены уравнения устойчивости. Рассмотрены случаи равномерной температурной нагрузки, нагрузки, изменяющейся по толщине пластины по линейному закону, и нагрузки, изменяющейся по толщине пластины по нелинейному закону.

**1. Математическая формулировка задачи.** Ниже приводится математическая формулировка задачи о выпучивании толстых пластин, изготовленных из ФГМ.

1.1. *Определение отсчетной поверхности.* В работе предполагается, что ФГМ пластины состоит из керамики и металла. Поскольку для пластин из ФГМ понятия срединной плоскости не существует, уравнения изгиба и растяжения-сжатия связаны. Однако, если начало системы координат расположено на нейтральной поверхности, анализ поведения пластин из ФГМ можно выполнить на основе теории однородных изотропных пластин, поскольку в этом случае уравнения изгиба и растяжения-сжатия не связаны.

Для того чтобы определить положение нейтральной поверхности пластины из ФГМ, вводятся две опорные плоскости, от которых производится отсчет в направлении координаты  $z$ . Координата  $z_{ms}$  отсчитывается от срединной плоскости, координата  $z_{ns}$  — от нейтральной поверхности (рис. 1). Выражение для объемной доли керамики  $V_C$  может быть записано через  $z_{ms}$  и  $z_{ns}$  следующим образом:

$$V_C = \left( \frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (1)$$

Здесь  $h$  — толщина пластины;  $k \geq 0$  — показатель степени в законе распределения компонентов ФГМ;  $C$  — расстояние между нейтральной поверхностью и срединной плоскостью.

Характеристики неоднородного ФГМ можно получить с использованием правила смесей Фойгта [15]. Таким образом, с помощью уравнения (1) неоднородное распределение характеристик ФГМ по толщине пластины можно представить в виде

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad P_{CM} = P_C - P_M, \quad (2)$$

где  $P_M$ ,  $P_C$  — характеристики металла и керамики соответственно. В данной работе предполагается, что распределение модуля упругости  $E$  и коэффициента температурного расширения  $\alpha$  описывается формулой (2), в то время как коэффициент Пуассона  $\nu$  является постоянным по толщине пластины.

Положение нейтральной поверхности пластины из ФГМ определяется из условия равенства нулю первого момента модуля Юнга:

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0.$$

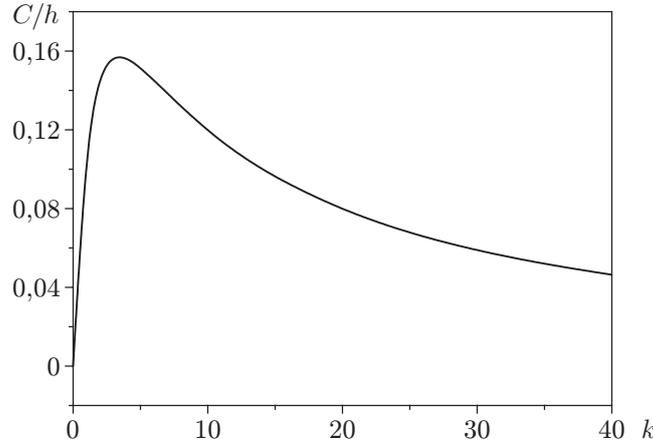


Рис. 2. Зависимость расстояния между нейтральной и срединной поверхностями от показателя  $k$

Следовательно, положение нейтральной поверхности определяется равенством

$$C = \int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms} / \int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}.$$

Как и следовало ожидать, в случае пластины из изотропного материала параметр  $C$  равен нулю.

На рис. 2 представлена зависимость безразмерного параметра  $C/h$  от показателя степени  $k$  для пластины из ФГМ, состоящего из алюминия и оксида алюминия ( $Al-Al_2O_3$ ). Как и следовало ожидать, при  $k = 0$  (керамическая пластина) и  $k = \infty$  (металлическая пластина) нейтральная поверхность совпадает со срединной плоскостью.

1.2. *Уравнения равновесия.* Рассмотрим прямоугольную пластину из ФГМ длиной  $a$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$ . Начало декартовой системы координат поместим на нейтральной поверхности. Пластина находится под действием температурной нагрузки  $T(x, y, z_{ns})$ .

Смещения материальной точки пластины из ФГМ с координатами  $x, y, z_{ns}$  представляются в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z_{ns}) \varphi_x, \\ v(x, y, z_{ns}) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z_{ns}) \varphi_y, \\ w(x, y, z_{ns}) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_0, v_0, w_0$  — смещения точек срединной плоскости в направлениях  $x, y, z_{ns}$  соответственно;  $\varphi_x, \varphi_y$  — углы поворотов вокруг осей  $x$  и  $y$  с учетом поперечного сдвига; коэффициент  $\psi(z_{ns})$  — нечетная функция переменной  $z_{ns}$ . Обобщенные смещения  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$  являются функциями переменных  $x, y$ . Выражения для смещений в классической теории тонких пластин (КТТП) следуют из формул (3) при  $\psi(z_{ns}) = 0$ , выражения для смещений в теории первого порядка (ТПП), учитывающей поперечный сдвиг, — из тех же формул при  $\psi(z_{ns}) = z_{ns}$ . В данной работе используется экспоненциальная теория пластин (ЭТП) [16], учитывающая поперечный сдвиг и основанная на понятии нейтральной поверхности. Согласно этой теории коэффициент  $\psi(z_{ns})$  определяется по формуле

$$\psi(z_{ns}) = (z_{ns} + C) e^{-2((z_{ns}+C)/h)^2}.$$

Заметим, что в ЭТП для учета поперечного сдвига не требуется использовать корректирующий множитель. Следствием этой теории является квадратичное распределение поперечных сдвигов по толщине пластины. ТПП и ЭТП содержат одинаковое количество неизвестных функций.

Используя нелинейные соотношения Кармана между деформациями и смещениями [17] и соотношения (3), получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z_{ns} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} + \psi(z_{ns}) \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_{xy} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} &= \psi'(z_{ns}) \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_z = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\ \eta_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \eta_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad \eta_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \\ \gamma_{yz}^0 &= \varphi_y, \quad \gamma_{xz}^0 = \varphi_x, \quad \psi'(z_{ns}) = \frac{d\psi(z_{ns})}{dz_{ns}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Принимаются линейные определяющие соотношения

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  и  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  — компоненты тензоров напряжения и деформации соответственно. С использованием соотношений (2) получаем выражения для коэффициентов жесткости  $Q_{ij}$  в следующем виде:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}.$$

Уравнения равновесия для прямоугольной пластины следуют из принципа минимума полной потенциальной энергии [18]

$$\delta U = 0,$$

где  $U$  — энергия деформаций пластины из ФГМ:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \int_0^b \int_0^a (\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dx dy dz_{ns}. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (4), (6) в (7), получаем уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0, \quad \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - Q_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x & M_y & M_{xy} \\ S_x & S_y & S_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{ns} \\ \psi(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}, \\ (Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \psi'(z_{ns}) dz_{ns} \end{aligned} \quad (9)$$

обобщенные усилия и моменты.

Подставляя (6) в (9), имеем выражения обобщенных усилий в пластине из ФГМ через деформации

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^a \\ 0 & D & D^a \\ B^a & D^a & H^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ \eta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \\ S^T \end{Bmatrix}, \quad Q = A^a \gamma, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T, & M &= \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T, & S &= \{S_x, S_y, S_{xy}\}^T, \\ N^T &= \{N_x^T, N_y^T\}^T, & M^T &= \{M_x^T, M_y^T\}^T, & S^T &= \{S_x^T, S_y^T\}^T, \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0 t\}^T, & k &= \{k_x, k_y, k_{xy}\}^T, & \eta &= \{\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}\}^T, \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$B^a = \begin{bmatrix} B_{11}^a & B_{12}^a & 0 \\ B_{12}^a & B_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^a \end{bmatrix}, \quad D^a = \begin{bmatrix} D_{11}^a & D_{12}^a & 0 \\ D_{12}^a & D_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^a \end{bmatrix}, \quad H^a = \begin{bmatrix} H_{11}^a & H_{12}^a & 0 \\ H_{12}^a & H_{22}^a & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^a \end{bmatrix},$$

$$Q = \{Q_{xz}, Q_{yz}\}^T, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T, \quad A^a = \begin{bmatrix} A_{44}^a & 0 \\ 0 & A_{55}^a \end{bmatrix},$$

величины  $A_{ij}, D_{ij}, \dots$  — жесткости пластины:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{11} & D_{11} & B_{11}^a & D_{11}^a & H_{11}^a \\ A_{12} & D_{12} & B_{12}^a & D_{12}^a & H_{12}^a \\ A_{66} & D_{66} & B_{66}^a & D_{66}^a & H_{66}^a \end{Bmatrix} = \\ = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} Q_{11}(1, z^2, \psi(z_{ns}), z_{ns}\psi(z_{ns}), \psi^2(z_{ns})) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ (1-\nu)/2 \end{Bmatrix} dz_{ns}, \end{aligned}$$

причем

$$(A_{22}, D_{22}, B_{22}^a, D_{22}^a, H_{22}^a) = (A_{11}, D_{11}, B_{11}^a, D_{11}^a, H_{11}^a),$$

$$A_{44}^a = A_{55}^a = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} Q_{44}[\psi'(z_{ns})]^2 dz_{ns}.$$

Усилия  $N_x^T = N_y^T$ ,  $S_x^T = S_y^T$  и моменты  $M_x^T = M_y^T$ , соответствующие температурным нагрузкам, определяются следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \\ S_x^T \end{Bmatrix} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu} \alpha(z_{ns}) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ \psi(z_{ns}) \end{Bmatrix} dz_{ns}. \quad (11)$$

1.3. *Уравнения устойчивости.* В силу нелинейных соотношений Кармана (4), (5) обобщенные усилия нелинейно зависят от поперечных смещений. Подставляя соотношения (10) в уравнения равновесия (8), получаем нелинейную систему дифференциальных уравнений. Для вывода уравнений устойчивости используем критерий устойчивости, предложенный в работе [19]. В соответствии с этим критерием равновесное состояние пластины при действии нагрузок в ее плоскости определяется компонентами смещения  $u_0^0, v_0^0, w_0^0, \varphi_x^0, \varphi_y^0$ . Переход из равновесного состояния в состояние, близкое к нему, определяется компонентами смещений  $u_0^1, v_0^1, w_0^1, \varphi_x^1, \varphi_y^1$ . Таким образом, полные смещения, соответствующие состоянию, близкому к равновесному, определяются следующим образом:

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_0 = w_0^0 + w_0^1, \quad \varphi_x = \varphi_x^0 + \varphi_{xs}^1, \quad \varphi_y = \varphi_y^0 + \varphi_{ys}^1. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (10), можно получить выражения для обобщенных усилий, соответствующих равновесному состоянию и состоянию, близкому к нему. Пренебрегая смещениями и поворотами в докритическом состоянии, а также нелинейными членами, выражения для обобщенных усилий можно записать в виде [19]

$$N = N^0 + N^1, \quad M = M^0 + M^1, \quad S = S^0 + S^1, \quad Q = Q^0 + Q^1, \quad (13)$$

где индекс 1 соответствует состоянию, близкому к равновесному, индекс 0 — равновесному состоянию.

Уравнения устойчивости можно получить, подставляя уравнения (12), (13) в уравнения (8). После такой подстановки члены с индексом 0 исключаются, поскольку они удовлетворяют уравнениям равновесия. Также из уравнений устойчивости исключаются нелинейные члены с индексом 1, поскольку они малы по сравнению с линейными членами [1, 19]. Таким образом, уравнения устойчивости пластины из ФГМ записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x^1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^1}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial S_x^1}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^1}{\partial y} - Q_{xz}^1 &= 0, & \frac{\partial S_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial S_y^1}{\partial y} - Q_{yz}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Члены  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  соответствуют докритическому состоянию:

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns}) E(z_{ns}) T}{1-\nu} dz_{ns}, \quad N_{xy}^0 = 0.$$

1.4. Точное решение задачи об устойчивости пластины из ФГМ под действием температурной нагрузки. Решение задачи для прямоугольной пластины зависит от вида краевых условий. В данной работе строится точное решение для прямоугольной свободно опертой пластины из ФГМ, на краях которой ставятся следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} v_0^1 = w_0^1 = \varphi_y^1 = N_x^1 = M_x^1 = S_x^1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a, \\ u_0^1 = w_0^1 = \varphi_x^1 = N_y^1 = M_y^1 = S_y^1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b. \end{aligned}$$

Решение

$$\begin{aligned} u_0^1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y), & v_0^1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y), \\ w_0^1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y), & & \\ \varphi_x^1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y), & \varphi_y^1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \end{aligned} \quad (15)$$

удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и краевым условиям. В (15)  $U_{mn}^1$ ,  $V_{mn}^1$ ,  $W_{mn}^1$ ,  $X_{mn}^1$ ,  $Y_{mn}^1$  — произвольные параметры;  $\lambda = m\pi/a$ ;  $\mu = n\pi/b$ ;  $m, n$  — положительные целые числа (моды выпучивания). Подставляя (15) в (14), получаем

$$[K]\{\Delta\} = 0, \quad (16)$$

где  $\{\Delta\} = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{mn}^1, X_{mn}^1, Y_{mn}^1\}^T$ ;  $[K]$  — симметричная матрица:

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}$$

с элементами

$$\begin{aligned} a_{11} &= -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{A}, & a_{12} &= -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{A}, & a_{13} &= 0, \\ a_{14} &= -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{B}^a, & a_{15} &= -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{B}^a, \\ a_{22} &= -[2\mu^2 + (1 - \nu)\lambda^2]\bar{A}, & a_{23} &= 0, & a_{24} &= a_{15}, & a_{25} &= -[2\mu^2 + (1 - \nu)\lambda^2]\bar{B}^a, \\ a_{33} &= -2(\lambda^2 + \mu^2)^2\bar{D} - 2\lambda^2 N_x^0 - 2\lambda^2 N_y^0, & a_{34} &= 2\lambda(\lambda^2 + \mu^2)^2\bar{D}^a, & a_{35} &= 2\mu(\lambda^2 + \mu^2)^2\bar{D}^a, \\ a_{44} &= -[2\lambda^2 + (1 - \nu)\mu^2]\bar{H}^a - 2\bar{J}, & a_{45} &= -(1 + \nu)\lambda\mu\bar{H}^a, & a_{55} &= -[2\mu^2 + (1 - \nu)\lambda^2]\bar{H}^a - 2\bar{J}, \\ A_{44} &= A_{55} = \bar{J}, & R &= A, B^a, D, D^a, H^a, & R_{11} &= R_{22} = \bar{R}, & R_{12} &= \nu R, & R_{66} &= \frac{1 - \nu}{2} \bar{R}. \end{aligned}$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (16), детерминант матрицы  $|K|$  должен быть равен нулю. Уравнение  $|K| = 0$  определяет нижнюю критическую нагрузку. Ниже представлены решения этого уравнения для различных видов температурной нагрузки. Краевые условия обеспечивают свободный изгиб пластины и отсутствие смещений в ее плоскости. Температура изменяется только по толщине пластины.

1.5. *Выпучивание пластины из ФГМ под действием равномерно распределенной температуры.* Начальную температуру пластины обозначим через  $T_i$ . Равномерно распределенная по толщине пластины температура увеличивается до конечного значения  $T_f$ , при котором происходит выпучивание. Введем обозначение  $\Delta T = T_f - T_i$ . Из уравнения  $|K| = 0$  получаем выражение для критического значения величины  $\Delta T$ :

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 [\bar{A}\bar{D}\bar{H}^a - (\bar{B}^a)^2\bar{D} - \bar{A}(\bar{D}^a)^2] + a^2b^2\Pi\bar{A}\bar{D}\bar{J}}{a^2b^2\bar{\beta}_1[\Pi(\bar{A}\bar{H}^a - (\bar{B}^a)^2) + a^2b^2\bar{A}\bar{J}]},$$

где

$$\Pi = (a^2 + b^2)\pi^2, \quad \bar{\beta}_1 = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} dz_{ns}.$$

1.6. *Устойчивость пластины из ФГМ при воздействии температуры, изменяющейся по ее толщине.* Обозначим температуру верхней (керамической) поверхности пластины через  $T_C$ . Предполагается, что температура изменяется по степенному закону от значения  $T_C$  до значения температуры на нижней (металлической) поверхности  $T_M$ :

$$T(z_{ns}) = \Delta T \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_M.$$

Здесь  $\Delta T = T_C - T_M$ ;  $0 < \gamma < \infty$ . Значение  $\gamma = 1$  соответствует линейному распределению температуры по толщине оболочки, значение  $\gamma \neq 1$  — нелинейному. Критическое значение величины  $\Delta T$  вычисляется по формуле

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 [\bar{A}\bar{D}\bar{H}^a - (\bar{B}^a)^2\bar{D} - \bar{A}(\bar{D}^a)^2] + a^2b^2\Pi\bar{A}\bar{D}\bar{J}}{a^2b^2\bar{\beta}_1[\Pi(\bar{A}\bar{H}^a - (\bar{B}^a)^2) + a^2b^2\bar{A}\bar{J}]} + \frac{T_M\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_2},$$

где

$$\bar{\beta}_2 = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{\alpha(z_{ns})E(z_{ns})}{1-\nu} \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma dz_{ns}.$$

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** Результаты численных расчетов получены для пластины из ФГМ, состоящего из алюминия и оксида алюминия ( $\text{Al}-\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Модуль Юнга и коэффициент температурного расширения равны соответственно  $E_M = 70$  ГПа,  $\alpha_M = 23 \cdot 10^{-6}$  °С для алюминия и  $E_C = 380$  ГПа,  $\alpha_C = 7,4 \cdot 10^{-6}$  °С для оксида алюминия. Коэффициент Пуассона предполагается постоянным и равным 0,3. Предполагается также, что в случаях и линейного, и нелинейного распределений температуры по толщине пластины температура нижней (металлической) поверхности равна  $T_M = 5$  °С.

В табл. 1, 2 приведены критические значения температуры, вычисленные по теории, изложенной в данной работе (ЭТП), а также критические значения температуры, вычисленные по другим теориям в работах [2, 20, 21], в случае увеличения температуры, равномерно распределенной по толщине пластины. В работе [20] предполагалось синусоидальное распределение характеристик материала по толщине пластины (синусоидальная теория пластин (СТП)), в работе [2] приведены критические значения температуры, вычисленные по теории пластин высшего порядка (ТПВП) и классической теории пластин (КТП), в работе [21] использовалась модифицированная теория пластин (МТП) с четырьмя неизвестными функциями.

Таблица 1

Критические значения величины  $\Delta T$  в пластине из ФГМ  
в случае равномерного распределения температуры по ее толщине  
при  $a/h = 100$  и различных значениях показателя  $k$  и отношения  $a/b$

$k$	Теория	$\Delta T_{cr}$				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 5$
0	ЭТП	17,08	42,68	85,25	144,65	220,68
	ТПВП [2]	17,08	42,68	85,25	144,64	220,66
	СТП [20]	17,08	42,68	85,25	144,65	220,67
	МТП [21]	17,08	42,68	85,25	144,64	220,67
	КТП [2]	17,09	42,74	85,49	145,34	222,28
1	ЭТП	7,94	19,83	39,62	67,25	102,63
	ТПВП [2]	7,94	19,83	39,62	67,25	102,63
	СТП [20]	7,94	19,83	39,62	67,25	102,63
	МТП [21]	7,94	19,83	39,62	67,25	102,63
	КТП [2]	7,94	19,85	39,71	67,52	103,26
5	ЭТП	7,26	18,13	36,20	61,39	93,60
	ТПВП [2]	7,26	18,13	36,20	61,39	93,60
	СТП [20]	7,26	18,13	36,20	61,39	93,60
	МТП [21]	7,26	18,13	36,20	61,39	93,60
	КТП [2]	7,26	18,16	36,32	61,75	94,45
10	ЭТП	7,46	18,64	37,22	63,07	96,14
	ТПВП [2]	7,46	18,63	37,20	63,06	96,12
	СТП [20]	7,46	18,63	37,20	63,06	96,11
	МТП [21]	7,46	18,63	37,20	63,06	96,12
	КТП [2]	7,46	18,67	37,34	63,48	97,10

Таблица 2

Критические значения величины  $\Delta T$  в квадратной пластине из ФГМ  
в случае равномерного распределения температуры по ее толщине  
при различных значениях показателя  $k$  и отношения  $a/h$

$k$	Теория	$\Delta T_{cr}$					
		$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	ЭТП	1619,22	421,57	106,49	47,42	26,69	17,08
	ТПВП [2]	1617,48	421,52	106,49	47,42	26,69	17,08
	МТП [21]	1618,68	421,53	106,49	47,42	26,69	17,08
	КТП [2]	1709,91	427,47	106,87	47,49	26,71	17,09
1	ЭТП	758,51	196,27	49,50	22,03	12,40	7,94
	ТПВП [2]	757,89	196,26	49,50	22,03	12,40	7,94
	МТП [21]	758,39	196,26	49,50	22,03	12,40	7,94
	КТП [2]	794,37	198,59	49,64	22,06	12,41	7,94
5	ЭТП	678,57	178,49	45,21	20,14	11,34	7,26
	ТПВП [2]	678,92	178,53	45,21	20,14	11,34	7,26
	МТП [21]	679,31	178,53	45,21	20,14	11,34	7,26
	КТП [2]	726,57	181,64	45,41	20,18	11,35	7,26
10	ЭТП	692,61	183,13	46,45	20,70	11,65	7,46
	ТПВП [2]	692,52	183,14	46,45	20,70	11,65	7,46
	МТП [21]	692,69	183,14	46,45	20,70	11,65	7,46
	КТП [2]	746,92	186,73	46,68	20,74	11,67	7,46

Таблица 3

Критические значения величины  $\Delta T$  в пластине из ФГМ  
в случае линейного распределения температуры по ее толщине  
при  $a/h = 100$  и различных значениях показателя  $k$  и отношения  $a/b$

$k$	Теория	$\Delta T_{cr}$				
		$a/b = 1$	$a/b = 2$	$a/b = 3$	$a/b = 4$	$a/b = 5$
0	ЭТП	24,17	75,37	160,51	279,30	431,36
	ТПВП [2]	24,17	75,37	160,50	279,29	431,33
	СТП [20]	24,17	75,37	160,51	279,30	431,34
	МТП [21]	24,17	75,37	160,51	279,26	431,34
	КТП [2]	24,19	75,49	160,99	280,68	434,57
1	ЭТП	5,51	27,82	64,93	116,75	183,11
	ТПВП [2]	5,51	27,82	64,93	116,74	183,11
	СТП [20]	5,51	27,82	64,93	116,74	183,11
	МТП [21]	5,51	27,82	64,93	116,74	183,11
	КТП [2]	5,52	27,86	65,11	117,25	184,30
5	ЭТП	3,89	22,60	53,70	97,06	152,49
	ТПВП [2]	3,89	22,60	53,71	97,07	152,51
	СТП [20]	3,89	22,60	53,70	97,06	152,50
	МТП [21]	3,89	22,60	53,70	97,07	152,51
	КТП [2]	3,89	22,65	53,92	97,69	153,97
10	ЭТП	4,36	24,17	57,07	102,83	161,56
	ТПВП [2]	4,36	24,16	57,06	102,90	161,47
	СТП [20]	4,36	24,16	57,06	102,89	161,46
	МТП [21]	4,36	24,16	57,06	102,90	161,47
	КТП [2]	4,37	24,23	57,32	103,64	163,20

Таблица 4

Критические значения величины  $\Delta T$  в пластине из ФГМ  
в случае линейного распределения температуры по ее толщине  
при различных значениях показателя  $k$  и отношения  $a/h$

$k$	Теория	$\Delta T_{cr}$					
		$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 40$	$a/h = 60$	$a/h = 80$	$a/h = 100$
0	ЭТП	3228,45	833,14	202,99	84,84	43,38	24,17
	ТПВП [2]	3224,96	833,03	202,98	84,84	43,38	24,17
	МТП [21]	3227,36	833,07	202,98	84,84	43,38	24,17
	КТП [2]	3409,82	844,95	203,73	84,99	43,43	24,19
1	ЭТП	1413,37	358,73	83,46	31,95	13,88	5,51
	ТПВП [2]	1412,02	358,69	83,46	31,95	13,88	5,51
	МТП [21]	1412,96	358,71	83,46	31,95	13,88	5,51
	КТП [2]	1480,45	363,07	83,73	32,00	13,90	5,52
5	ЭТП	1159,72	298,63	69,21	26,06	10,91	3,89
	ТПВП [2]	1160,02	298,69	69,21	26,06	10,91	3,89
	МТП [21]	1160,68	298,70	69,21	26,06	10,91	3,89
	КТП [2]	1242,03	304,05	69,55	26,13	10,93	3,89
10	ЭТП	1218,46	315,66	73,46	27,82	11,79	4,36
	ТПВП [2]	1218,32	315,67	73,46	27,82	11,79	4,36
	МТП [21]	1218,63	315,68	73,46	27,82	11,79	4,36
	КТП [2]	1314,74	322,04	73,86	27,90	11,82	4,37

Таблица 5

Значения величины  $t_{cr} = 10^{-3}\Delta T_{cr}$  в пластине из ФГМ  
в случае нелинейного распределения температуры по ее толщине  
при  $a/h = 10$  и различных значениях показателя  $k$ , отношения  $a/b$  и показателя экспоненты  $\gamma$

$k$	Теория	$t_{cr}$								
		$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	ЭТП	4,84	9,68	17,75	11,23	22,47	41,20	20,04	40,08	73,48
	МТП [21]	4,84	9,68	17,75	11,22	22,45	41,16	20,00	40,01	73,35
	СТП [20]	4,84	9,68	17,75	11,22	22,45	41,17	20,01	40,03	73,39
	КТП [20]	5,11	10,22	18,75	12,80	25,61	46,96	25,63	51,26	93,99
1	ЭТП	2,10	4,31	8,19	4,95	10,15	19,26	8,98	18,40	34,91
	МТП [21]	2,10	4,31	8,19	4,95	10,14	19,24	8,96	18,38	34,86
	СТП [20]	2,1068	4,31	8,19	9,95	10,14	19,25	8,97	18,38	34,87
	КТП [20]	2,20	4,52	8,58	5,53	11,35	21,53	11,09	22,73	43,12
5	ЭТП	1,59	2,85	5,00	3,65	6,51	11,42	6,35	11,35	19,92
	МТП [21]	1,59	2,85	5,00	3,65	6,52	11,44	6,37	11,38	19,97
	СТП [20]	1,59	2,84	4,99	3,64	6,51	11,43	6,36	11,36	19,93
	КТП [20]	1,70	3,04	5,35	4,28	7,65	13,43	8,58	15,33	26,90
10	ЭТП	1,67	2,88	4,77	3,79	6,53	10,80	6,54	11,25	18,61
	МТП [21]	1,67	2,88	4,77	3,79	6,53	10,80	6,54	11,25	18,61
	СТП [20]	1,67	2,88	4,77	3,79	6,53	10,80	6,53	11,24	18,60
	КТП [20]	1,80	3,11	5,14	4,54	7,81	12,92	9,09	15,64	25,88

Таблица 6

Значения величины  $t_{cr} = 10^{-3}\Delta T_{cr}$  в пластине из ФГМ  
в случае нелинейного распределения температуры по ее толщине  
при  $a/h = 5$  и различных значениях показателя  $k$ , отношения  $a/b$  и показателя экспоненты  $\gamma$

$k$	Теория	$t_{cr}$								
		$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	ЭТП	16,75	33,51	61,44	32,97	65,94	120,90	48,85	97,71	179,15
	МТП [21]	16,73	33,47	61,36	32,86	65,72	120,49	48,53	97,07	177,97
	СТП [20]	16,74	33,48	61,38	32,89	65,79	120,62	48,65	97,30	178,39
	КТП [20]	20,50	41,00	75,18	51,28	102,56	188,03	102,57	205,15	376,12
1	ЭТП	7,46	15,30	29,02	15,12	31,00	58,80	23,06	47,26	89,65
	МТП [21]	7,45	15,28	28,98	15,08	30,90	58,62	22,92	46,98	89,11
	СТП [20]	7,45	15,28	28,99	15,09	30,93	58,68	22,97	47,08	89,30
	КТП [20]	8,87	18,18	34,48	22,19	45,49	86,30	44,41	91,02	172,65
5	ЭТП	5,36	9,57	16,80	10,13	18,09	31,75	14,49	25,88	45,41
	МТП [21]	5,37	9,59	16,83	10,16	18,15	31,85	14,52	25,93	45,51
	СТП [20]	5,36	9,57	16,81	10,14	18,10	31,77	14,49	25,87	45,40
	КТП [20]	6,86	12,26	21,52	17,18	30,68	53,85	34,39	61,39	107,75
10	ЭТП	5,54	9,53	15,76	10,24	17,63	29,18	14,40	24,77	40,99
	МТП [21]	5,54	9,53	15,76	10,24	17,62	29,15	14,34	24,68	40,82
	СТП [20]	5,53	9,52	15,75	10,23	17,61	29,13	14,35	24,69	40,85
	КТП [20]	7,27	12,51	20,70	18,20	31,31	51,80	36,41	62,65	103,64

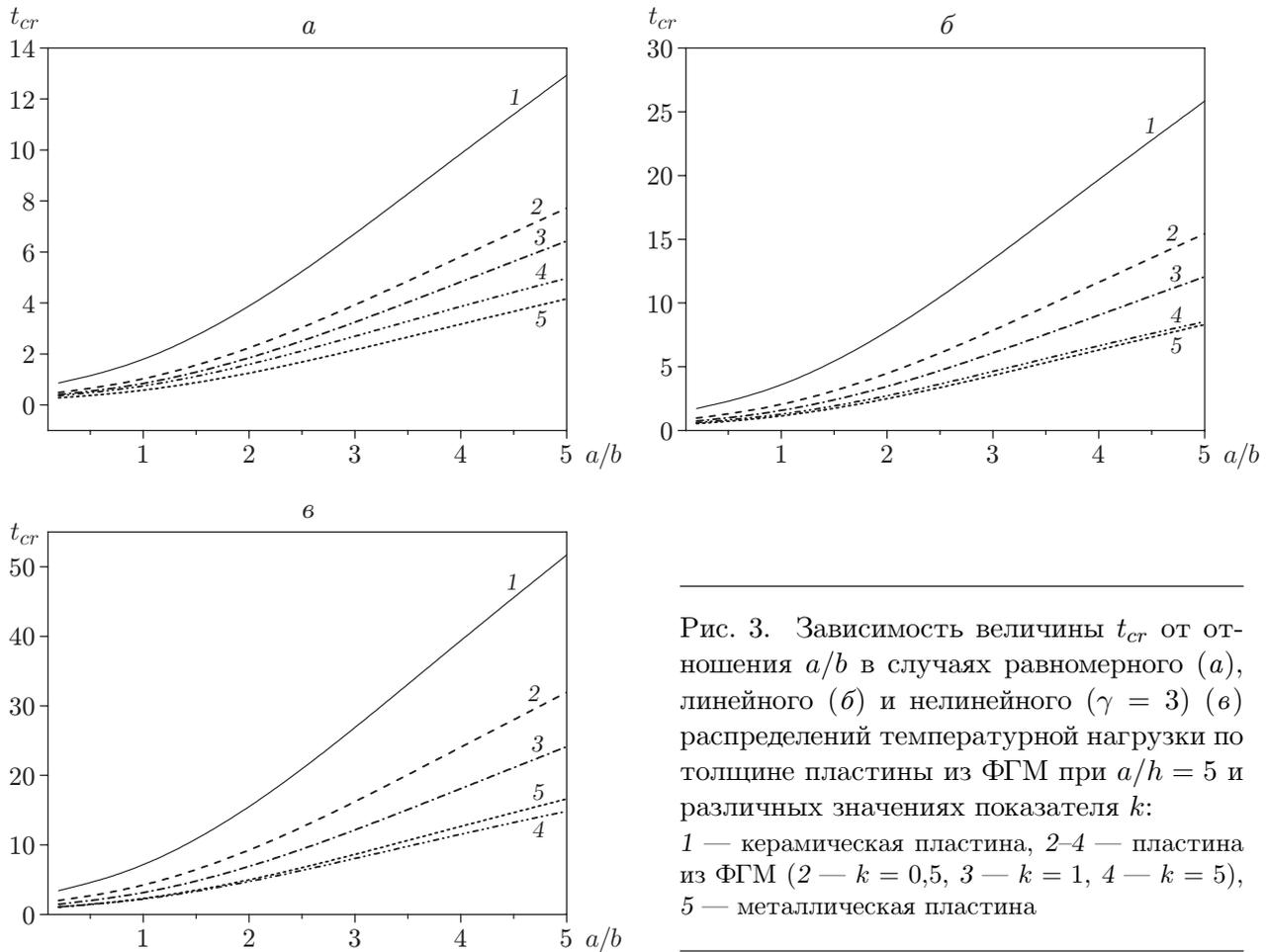


Рис. 3. Зависимость величины  $t_{cr}$  от отношения  $a/b$  в случаях равномерного (а), линейного (б) и нелинейного ( $\gamma = 3$ ) (в) распределений температурной нагрузки по толщине пластины из ФГМ при  $a/h = 5$  и различных значениях показателя  $k$ : 1 — керамическая пластина, 2–4 — пластина из ФГМ (2 —  $k = 0,5$ , 3 —  $k = 1$ , 4 —  $k = 5$ ), 5 — металлическая пластина

В табл. 3, 4 приведены критические значения температуры в случае линейного распределения температуры по толщине пластины, в табл. 5, 6 — критические значения температуры для достаточно толстых пластин в случае нелинейного распределения температуры по толщине пластины. Результаты, приведенные в табл. 1–6, хорошо согласуются.

На рис. 3 приведены зависимости величины  $t_{cr} = 10^{-3}T_{cr}$  от отношения  $a/b$  для различных видов температурной нагрузки при различных значениях показателя  $k$ . Из представленных результатов следует, что с уменьшением показателя  $k$ , а также с увеличением отношения  $a/b$  критическая температура увеличивается.

На рис. 4, 5 представлены зависимости критической температуры от отношений  $a/h$  и  $a/b$  соответственно. Видно, что при любых видах температурной нагрузки величина  $t_{cr}$  уменьшается с увеличением отношения  $a/h$  и с уменьшением отношения  $a/b$ . Из представленных результатов также следует, что  $t_{cr}$  увеличивается с увеличением параметра нелинейности  $\gamma$ .

**Заключение.** В работе исследована термоупругая задача о выпучивании прямоугольной пластины, изготовленной из функционально-градиентного материала, под действием равномерного, линейного и нелинейного распределений температурной нагрузки по толщине пластины. Определено положение нейтральной поверхности для такой пластины. Уравнения задачи получены в предположении экспоненциальной зависимости характери-

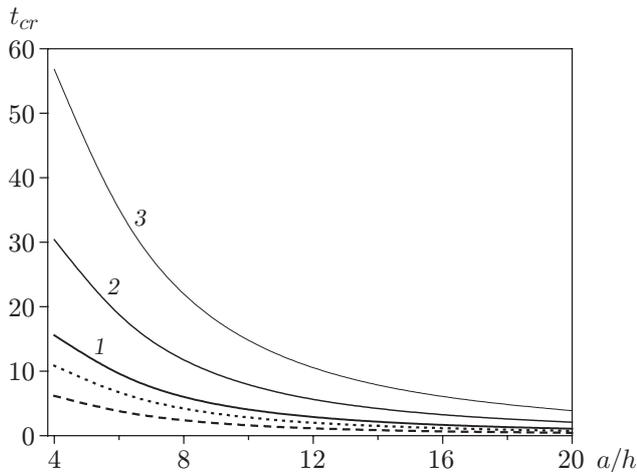


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость величины  $t_{cr}$  от отношения  $a/h$  в случаях равномерного (штриховая линия), линейного (пунктирная линия) и нелинейного (сплошные линии) распределений температурной нагрузки по толщине пластины из ФГМ при  $a/b = 2$ ,  $k = 2$  и различных значениях параметра нелинейности  $\gamma$ :

1 —  $\gamma = 2$ , 2 —  $\gamma = 5$ , 3 —  $\gamma = 10$

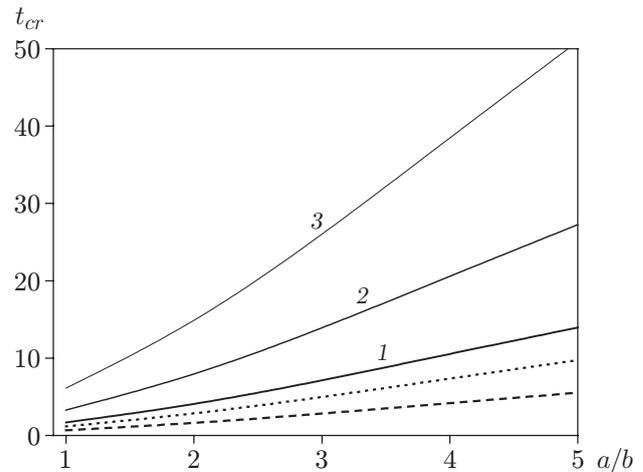


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость величины  $t_{cr}$  от отношения  $a/b$  в случаях равномерного (штриховая линия), линейного (пунктирная линия) и нелинейного (сплошные линии) распределений температурной нагрузки по толщине пластины из ФГМ при  $a/h = 10$ ,  $k = 2$  и различных значениях параметра нелинейности  $\gamma$ :

1 —  $\gamma = 2$ , 2 —  $\gamma = 5$ , 3 —  $\gamma = 10$

стик материала от толщины пластины. Полученные результаты хорошо согласуются с известными данными. Исследована зависимость критической температуры от механических и геометрических характеристик пластины из функционально-градиентного материала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Javaheri R., Eslami M. R.** Thermal buckling of functionally graded plates // *AIAA J.* 2002. V. 40. P. 162–169.
2. **Javaheri R., Eslami M. R.** Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory // *J. Therm. Stress.* 2002. V. 25. P. 603–625.
3. **Najafizadeh M. M., Heydaru H. R.** Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 2004. V. 23. P. 1085–1100.
4. **Lanhe W.** Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate // *Compos. Struct.* 2004. V. 64. P. 211–218.
5. **Samsam Shariat B. A., Eslami M. R.** Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads // *Compos. Struct.* 2007. V. 78. P. 433–439.
6. **Ibrahim H. H., Tawfik M., Al-Ajmi M.** Thermal buckling and nonlinear flutter behavior of functionally graded material panels // *J. Aircraft.* 2007. V. 44. P. 1610–1618.
7. **Sohn K. J., Kim J. H.** Structural stability of functionally graded panels subjected to aero-thermal loads // *Compos. Struct.* 2008. V. 82. P. 317–325.

8. **Matsunaga H.** Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory // Compos. Struct. 2009. V. 90. P. 76–86.
9. **Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E. A., Megueni A.** Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach // Comput. Materials Sci. 2010. V. 49. P. 865–870.
10. **Morimoto T., Tanigawa Y., Kawamura R.** Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating // Intern. J. Mech. Sci. 2006. V. 48, N 9. P. 926–937.
11. **Abrate S.** Functionally graded plates behave like homogeneous plates // Composites. Pt B. Engng. 2008. V. 39, N 1. P. 151–158.
12. **Zhang D. G., Zhou Y. H.** A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface // Comput. Materials Sci. 2008. V. 44. P. 716–720.
13. **Saidi A. R., Jomehzadeh E.** On analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported // Proc. Inst. Mech. Engng. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2009. V. 223. P. 2009–2016.
14. **Bodaghi M., Saidi A. R.** Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates // Arch. Appl. Mech. 2011. V. 81. P. 1555–1572.
15. **Suresh S.** Fundamentals of functionally graded materials / S. Suresh, A. Mortensen. L.: IOM Comm. Ltd., 1998.
16. **Karama M., Afaq K. S., Mistou S.** Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity // Intern. J. Solids Struct. 2003. V. 40. P. 1525–1546.
17. **Reddy J. N.** Theory and analysis of elastic plates. Philadelphia: Taylor and Francis, 1999.
18. **Reddy J. N.** Energy principles and variational methods in applied mechanics. N. Y.: John Wiley, 1984.
19. **Brush D. O.** Buckling of bars, plates and shells / D. O. Brush, B. O. Almroth. N. Y.: McGraw-Hill, 1975.
20. **Zenkour A. M., Mashat D. S.** Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates // Natur. Sci. 2010. V. 2. P. 968–978.
21. **Bachir Bouiadjra M., Houari M. S. A., Tounsi A.** Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory // J. Thermal Stresses. 2012. V. 35. P. 677–694.

*Поступила в редакцию 17/XII 2012 г.,  
в окончательном варианте — 5/II 2013 г.*

---