

УДК 539.370

## ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧКИ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Предложена нелинейная модель деформации оболочки с жесткими поперечными волокнами. Сформулирована полная система уравнений в приращениях, получены эквивалентное ей вариационное уравнение и частное уравнение виртуальной работы. Демонстрируется применение полного уравнения в численном анализе нелинейной задачи деформации сферического купола.

**1. Уравнения конечного деформированного состояния оболочки.** У оболочки как объемного тела, рассматриваемого в трехмерном декартовом пространстве, материал распределен по малой окрестности  $G$  некоторой (базовой) поверхности  $A \subset G$ . С ней связывается система криволинейных координат  $t_J$ , такая что  $t_1$  и  $t_2$  — внутренние параметры поверхности,  $t_3$  — нормальная (поперечная) координата;  $t_i \in A$ ,  $t_3 \in [h_1, h_2]$ ,  $h_i$  — действительное число.

В статье используются обозначения из [1]. Вариации параметров деформации обозначаются символом  $\delta$ , искомые и заданные приращения — символом  $\Delta$ . Все прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2. Применяется правило суммирования по индексам. Возможная зависимость от времени явно не указывается.

В трехмерном векторном пространстве над  $G$  определяются позиционный вектор  $\mathbf{g}(t_J \in G)$  произвольной точки оболочки, позиционный вектор  $\mathbf{a}(t_J \in A)$  произвольной точки базовой поверхности и локальный координатный базис  $\mathbf{a}_J(\mathbf{a})$ , отнесенный к точкам поверхности и состоящий из касательных векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и нормального вектора  $\mathbf{a}_3$ .

Как объемное тело оболочка задается уравнением  $\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_3 \mathbf{a}_3$ . Равенства  $\mathbf{g}_J \equiv \partial_J \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i + t_3 \mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{a}_i \equiv \partial_i \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}_i \equiv \partial_i \mathbf{a}_3$  ( $\partial_J$  — оператор дифференцирования по  $t_J$ ) вводят объемный базис  $\mathbf{g}_J(\mathbf{g})$  системы координат и выражают его через поверхностный  $\mathbf{a}_J(\mathbf{a})$ .

Деформация оболочки в некоторое конечное состояние представляется отображением  $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}^+(\mathbf{g})$ ,  $\mathbf{g}_J \rightarrow \mathbf{g}_J^+(\mathbf{g})$ ,  $\mathbf{g}_J^+ \equiv \partial_J \mathbf{g}^+$ . Вместе с оболочкой деформируются базовая поверхность и ее базис:  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^+(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a}_J \rightarrow \mathbf{a}_J^+(\mathbf{a})$ . Локальным ортогональным преобразованием

$$\mathbf{a}_J^0 = \Theta \cdot \mathbf{a}_J, \quad \partial_3 \Theta \equiv 0, \quad \Theta \cdot \bar{\Theta} \equiv 1 \quad (1.1)$$

с тензором поворота  $\Theta(\mathbf{a})$  на деформированной поверхности вводится *конвективный* базис  $\mathbf{a}_J^0(\mathbf{a})$  с начальным значением  $\mathbf{a}_J(\mathbf{a})$ . В дальнейшем он считается определяющим для векторных пространств над  $G$  и  $A$ . Преобразование (1.1) представлено в транспонированной по отношению к [1] форме, более употребительной в матричном исчислении.

Деформированное состояние оболочки задается уравнением

$$\mathbf{g}^+ = \mathbf{a}^+ + t_3 \mathbf{a}_3^0. \quad (1.2)$$

Его следствием являются равенства  $\mathbf{g}_3^+ = \mathbf{a}_3^+ = \mathbf{a}_3^0$ , отождествляющие деформированный поперечный вектор с конвективным. Векторы  $\mathbf{g}_i^+$ ,  $\mathbf{a}_i^+$  и  $\mathbf{a}_i^0$  в общем случае не совпадают друг с другом, и конвективный вектор  $\mathbf{a}_i^0$  не остается касательным к базовой поверхности.

Уравнению (1.2) отвечает линейная аппроксимация объемного поля перемещений  $w(\mathbf{g}) \equiv \mathbf{g}^+ - \mathbf{g}$  относительно поперечной координаты:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + t_3 \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}, \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}_3^0 - \mathbf{a}_3. \quad (1.3)$$

Эта зависимость задает движение поперечного волокна оболочки как жесткого целого с трансляционным перемещением  $\mathbf{u}(\mathbf{a})$  и ротационным  $t_3 \mathbf{v}(\mathbf{a})$ .

Объемное поле деформаций оболочки вводится векторами  $w_I(\mathbf{g})$ :

$$w_I \equiv g_I^+ - \Theta \cdot g_I = \partial_I w - (\Theta - 1) \cdot g_I. \quad (1.4)$$

Использование аппроксимаций (1.2) и (1.3) приводит к равенствам

$$w_i = u_i + t_3 v_i, \quad w_3 \equiv 0, \quad (1.5)$$

выражающим объемное поле через поверхностные векторы  $u_i(\mathbf{a})$  и  $v_i(\mathbf{a})$  метрических и изгибно-крутильных деформаций:

$$\begin{aligned} u_i &\equiv a_i^+ - \Theta \cdot a_i = \partial_i u - (\Theta - 1) \cdot a_i, & a_i^+ &\equiv \partial_i a^+, \\ v_i &\equiv b_i^+ - \Theta \cdot b_i = \partial_i \Theta \cdot a_3, & b_i^+ &\equiv \partial_i a_3^0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Формулы (1.6) определяют эти векторы через *первичные* неизвестные — вектор перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{a})$  и тензор поворота  $\Theta(\mathbf{a})$ .

В деформированном состоянии на  $A$  выполняются локальные динамические уравнения

$$\nabla_i \mathbf{x}^i + \mathbf{p} = 0, \quad \nabla_i \tilde{\mathbf{y}}^i + \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{a}_i^+ \times \mathbf{x}^i, \quad \tilde{\mathbf{y}}^i \equiv \mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{y}^i \quad (1.7)$$

( $\nabla_i$  — оператор ковариантного дифференцирования относительно *начального* поверхностного базиса  $\mathbf{a}_j$ ).

Если на участке  $C_\lambda$  контура базовой поверхности векторами  $\mathbf{p}_3$  и  $\tilde{\mathbf{q}}_3$  заданы контурные силы и моменты, то на нем выполняются динамические условия

$$e_{3i} \mathbf{x}^i - \mathbf{p}_3 = 0, \quad e_{3i} \tilde{\mathbf{y}}^i - \tilde{\mathbf{q}}_3 = 0. \quad (1.8)$$

На участке  $C_\mu$  с заданными значениями  $\mathbf{u}_\mu$ ,  $\Theta_\mu$  вектора перемещения и тензора поворота выполняются кинематические условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mu, \quad \Theta = \Theta_\mu. \quad (1.9)$$

Фигурирующие в уравнениях (1.7) неизвестные векторные функции  $\mathbf{x}^i(\mathbf{a})$  и  $\mathbf{y}^i(\mathbf{a})$  — это математические моменты от вектора напряжений  $\mathbf{z}^i(\mathbf{g})$  по поперечной координате:

$$\mathbf{x}^i \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{z}^i dG/dA, \quad \mathbf{y}^i \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{z}^i t_3 dG/dA. \quad (1.10)$$

Функции  $\mathbf{x}^i(\mathbf{a})$  и  $\tilde{\mathbf{y}}^i(\mathbf{a})$  имеют смысл *механических* усилий и моментов.

В общей задаче конечной деформации оболочки динамические уравнения (1.7), (1.8) объединяются с кинематическими уравнениями (1.6), (1.9) и определяющими зависимостями, которые связывают динамические векторы  $\mathbf{x}^i$ ,  $\mathbf{y}^i$  с кинематическими векторами  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ . Конечная формулировка таких зависимостей возможна лишь в частных случаях. Более общей является их формулировка в приращениях. Это обстоятельство естественным образом приводит к необходимости построения инкрементальной модели деформации оболочки.

**2. Формулировка локальных уравнений модели.** Для формулировки уравнений деформации оболочки в приращениях привлекаются следующие правила варьирования векторных и тензорных полей:

$$\delta \Theta = \delta \Omega \cdot \Theta, \quad \delta \Omega = \delta \omega \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \delta \omega, \quad \delta a_j^0 = \delta \Omega \cdot a_j^0 = \delta \omega \times a_j^0, \quad \delta a_i^+ = \partial_i \delta \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\delta_0 \mathbf{u}_i = \partial_i \delta \mathbf{u} - \delta \Omega \cdot \mathbf{a}_i^+ = \partial_i \delta \mathbf{u} - \delta \omega \times \mathbf{a}_i^+, \quad \delta_0 \mathbf{v}_i = \partial_i \delta \Omega \cdot \mathbf{a}_3^0 = \partial_i \delta \omega \times \mathbf{a}_3^0, \quad \delta \mathbf{v} = \delta \omega \times \mathbf{a}_3^0.$$

Здесь  $\delta \Omega(\mathbf{a})$ ,  $\delta \omega(\mathbf{a})$  — спин и вектор виртуального поворота;  $\delta_0$  — оператор относительной вариации, такой что  $\delta_0 \mathbf{a}_j^0 \equiv \mathbf{0}$  и для любого вектора  $\mathbf{v}$ , заданного в конвективном базисе, по определению справедливы равенства

$$\delta \mathbf{v} = \delta_0 \mathbf{v} + \delta \Omega \cdot \mathbf{v} = \delta_0 \mathbf{v} + \delta \omega \times \mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Формулы (2.1) содержат два первичных виртуальных вектора  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \mathbf{v}$ . Второй имеет лишь две компоненты в конвективном базисе, так как  $\mathbf{a}_3^0 \cdot \delta \mathbf{v} \equiv 0$ . Последнее из равенств (2.1) выражает его через свободный вектор виртуального поворота. Для взаимной однозначности этого выражения достаточно устранить «сверлящую» компоненту вектора  $\delta \omega$  тривиальным условием  $\delta \omega_3 \equiv \delta \omega \cdot \mathbf{a}_3^0 \equiv 0$ . Такая оговорка позволяет считать первичными трехкомпонентный вектор  $\delta \mathbf{u}$  и двухкомпонентный вектор  $\delta \omega$ . В векторных произведениях второй из них может быть заменен тензором-спином  $\delta \Omega$ .

Из (1.7) на  $A$  получаем формулировку динамических уравнений в приращениях

$$\nabla_i \Delta \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \nabla_i \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i + \Delta \tilde{\mathbf{x}} + \Delta \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Их дополняют динамические и кинематические условия на участках контура  $C_\lambda$ ,  $C_\mu$  соответственно

$$e_{3i} \Delta \mathbf{x}^i - \Delta \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}, \quad e_{3i} \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i - \Delta \tilde{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{0}; \quad (2.4)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_\mu, \quad \Delta \omega = \Delta \omega_\mu. \quad (2.5)$$

Связь динамических переменных с кинематическими обеспечивается определяющими зависимостями. Для чисто механических процессов упругого и упругопластического деформирования в области  $G$  они могут быть выражены уравнением

$$\Delta_0 \mathbf{z}^i = \mathbf{D}^{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{w}_j, \quad (2.6)$$

где  $\Delta_0$  — оператор относительного приращения, определяемый аналогично  $\delta_0$ ;  $\mathbf{D}^{ij}$  — тензоры-диадки жесткости материала, учитывающие предысторию нагружения.

Из (1.10) и (2.6) на  $A$  следуют определяющие зависимости для поверхностных переменных

$$\Delta_0 \mathbf{x}^i = \mathbf{E}_1^{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{u}_j + \mathbf{E}_2^{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{v}_j, \quad \Delta_0 \mathbf{y}^i = \tilde{\mathbf{F}}_2^{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{u}_j + \mathbf{E}_3^{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{v}_j \quad (2.7)$$

с обобщенными тензорами жесткости

$$\mathbf{E}_N^{ij} \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{D}^{ij} t_3^{N-1} \frac{dG}{dA}.$$

Векторы  $\Delta_0 \mathbf{u}_i$  и  $\Delta_0 \mathbf{v}_i$  в (2.7) вычисляются по правилам варьирования (2.1):

$$\Delta_0 \mathbf{u}_i = \partial_i \Delta \mathbf{u} - \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_i^+ = \partial_i \Delta \mathbf{u} - \Delta \omega \times \mathbf{a}_i^+, \quad \Delta_0 \mathbf{v}_i = \partial_i \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_3^0 = \partial_i \Delta \omega \times \mathbf{a}_3^0. \quad (2.8)$$

С помощью (2.8) и справедливого по определению равенства  $\Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^i = \mathbf{a}_3^0 \times \Delta_0 \mathbf{y}^i$  уравнения (2.7) преобразуются к виду

$$\Delta_0 \mathbf{x}^i = \mathbf{E}^{ij} \cdot (\partial_j \Delta \mathbf{u} - \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_j^+) + \mathbf{F}^{ij} \cdot \partial_j \Delta \omega, \quad \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^i = \mathbf{G}^{ij} \cdot (\partial_j \Delta \mathbf{u} - \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_j^+) + \mathbf{H}^{ij} \cdot \partial_j \Delta \omega \quad (2.9)$$

с модифицированными тензорами жесткости

$$\mathbf{E}^{ij} \equiv \mathbf{E}_1^{ij}, \quad \mathbf{F}^{ij} \equiv -\mathbf{E}_2^{ij} \times \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{G}^{ij} \equiv \mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{E}_2^{ij}, \quad \mathbf{H}^{ij} \equiv -\mathbf{a}_3^0 \times (\mathbf{E}_3^{ij} \times \mathbf{a}_3^0).$$

В дальнейшем предполагается, что зависимости (2.9) допускают обращение

$$\partial_i \Delta \mathbf{u} - \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_i^+ = \tilde{\mathbf{E}}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^j, \quad \partial_i \Delta \omega = \tilde{\mathbf{G}}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{H}}_{ij} \cdot \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^j \quad (2.10)$$

с известными тензорами податливости  $\tilde{\mathbf{E}}_{ij}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}_{ij}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}_{ij}$ .

Уравнения (2.3)–(2.5) и (2.9) или (2.10) образуют полную систему локальных уравнений инкрементальной модели деформации оболочки.

**3. Вариационная формулировка задачи.** В функциональном пространстве  $L_2(A)$  введем произвольные вариации  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\omega}$ ,  $\delta \mathbf{x}^i$ ,  $\delta \mathbf{y}^i$  кинематических и динамических векторов. Локальные уравнения (2.3)–(2.5) и (2.10) заменим интегральным равенством Галёркина

$$\begin{aligned} & \int_A ((\partial_i \Delta \mathbf{x}^i + \Delta \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\partial_i \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i + \Delta \tilde{\mathbf{x}} + \Delta \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dA + \\ & + \int_A (\tilde{\mathbf{E}}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^j - \partial_i \Delta \mathbf{u} + \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_i^+) \cdot \delta \mathbf{x}^i dA + \\ & + \int_A (\tilde{\mathbf{G}}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{H}}_{ij} \cdot \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^j - \partial_i \Delta \boldsymbol{\omega}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{y}}^i dA + \int_{C_\lambda} ((\Delta \mathbf{p}_3 - e_{3i} \Delta \mathbf{x}^i) \cdot \delta \mathbf{u} + (\Delta \tilde{\mathbf{q}}_3 - e_{3i} \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i) \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dC + \\ & + \int_{C_\mu} e_{3i} ((\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_\mu) \cdot \delta \mathbf{x}^i + (\Delta \boldsymbol{\omega} - \Delta \boldsymbol{\omega}_\mu) \cdot \delta \tilde{\mathbf{y}}^i) dC = 0. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Интегрирование по частям первого интеграла преобразует равенство (3.1) к форме

$$\begin{aligned} & \int_A (\Delta \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{x}^i \cdot \partial_i \delta \mathbf{u} + (\Delta \tilde{\mathbf{q}} + \Delta \tilde{\mathbf{x}}) \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i \cdot \partial_i \delta \boldsymbol{\omega}) dA + \\ & + \int_A (\tilde{\mathbf{E}}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^j - \partial_i \Delta \mathbf{u} + \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_i^+) \cdot \delta \mathbf{x}^i dA + \int_A (\tilde{\mathbf{G}}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{x}^j + \tilde{\mathbf{H}}_{ij} \cdot \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^j - \partial_i \Delta \boldsymbol{\omega}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{y}}^i dA + \\ & + \int_{C_\lambda} (\Delta \mathbf{p}_3 \cdot \delta \mathbf{u} + \Delta \tilde{\mathbf{q}}_3 \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dC + \int_{C_\mu} e_{3i} (\Delta \mathbf{x}^i \cdot \delta \mathbf{u} + \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dC + \\ & + \int_{C_\mu} ((\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_\mu) \cdot \delta \mathbf{x}^i + (\Delta \boldsymbol{\omega} - \Delta \boldsymbol{\omega}_\mu) \cdot \delta \tilde{\mathbf{y}}^i) dC = 0. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Эта форма требует гладкости вариаций  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\omega}$  над базовой поверхностью.

При достаточной гладкости всех подинтегральных функций вариационные равенства (3.1) и (3.2) эквивалентны, и поэтому справедливо

**Утверждение.** Если векторы  $\Delta \mathbf{x}^i$ ,  $\Delta \tilde{\mathbf{y}}^i$ ,  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}$  являются точным решением системы локальных уравнений (2.3)–(2.5) и (2.10), то при любых вариациях выполняется интегральное равенство (3.2); если же некоторые векторы  $\Delta \mathbf{x}^i$ ,  $\Delta \tilde{\mathbf{y}}^i$ ,  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}$  тождественно удовлетворяют равенству (3.2) при любых вариациях, то эти векторы — точное решение указанной системы.

Для подинтегральных искомым функций, не обладающих достаточной гладкостью, вариационное уравнение (3.2) дает слабую формулировку задачи в приращениях. В этой формулировке Галёркина требования гладкости минимальны: векторы  $\Delta \mathbf{x}^i$ ,  $\Delta \tilde{\mathbf{y}}^i$  и  $\delta \mathbf{x}^i$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{y}}^i$  — элементы пространства Гильберта  $L_2(A)$ , векторы  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}$  и  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\omega}$  — элементы пространства Соболева  $W_2^1(A)$ .

Важным следствием (3.2) является уравнение виртуальной работы оболочки

$$\int_A (\Delta \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{x}^i \cdot \partial_i \delta \mathbf{u} + (\Delta \tilde{\mathbf{q}} + \Delta \tilde{\mathbf{x}}) \cdot \delta \boldsymbol{\omega} - \Delta \tilde{\mathbf{y}}^i \cdot \partial_i \delta \boldsymbol{\omega}) dA + \int_{C_\lambda} (\Delta \mathbf{p}_3 \cdot \delta \mathbf{u} + \Delta \tilde{\mathbf{q}}_3 \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dC = 0. \quad (3.3)$$

Оно справедливо для кинематически возможных вариаций  $\delta \mathbf{u}$  и  $\delta \boldsymbol{\omega}$ , таких что  $\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  на контуре  $C_m$ , и при выполнении локальных уравнений (2.10) и граничных условий (2.5). Равенство (3.3) выражает слабую форму динамических уравнений (2.3) и контурных условий (2.4). При исключении из (3.3) переменных  $\Delta \mathbf{x}^i$  и  $\Delta \tilde{\mathbf{y}}^i$  с помощью равенств (2.9) оно приобретает смысл слабой формулировки задачи относительно кинематических переменных  $\Delta \mathbf{u}$  и  $\Delta \boldsymbol{\omega}$  с главными условиями (2.5) на контуре.

Необходимая для численного анализа матричная формулировка вариационного уравнения (3.2) достигается разложением искомых векторных функций  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\omega}$ ,  $\Delta_0 \mathbf{x}^i$ ,  $\Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^i$  по конвективному базису  $\mathbf{a}_J^0$ :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{a}_J^0 \Delta U^J, \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}_J^0 \Delta \Omega^J, \quad \Delta_0 \mathbf{x}^i = \mathbf{a}_J^0 \Delta X^{iJ}, \quad \Delta_0 \tilde{\mathbf{y}}^i = \mathbf{a}_J^0 \Delta \tilde{Y}^{iJ}.$$

Такие же разложения применяются для вариаций  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\omega}$ ,  $\delta \mathbf{x}^i$ ,  $\delta \tilde{\mathbf{y}}^i$ . Приращение любого вектора  $\mathbf{v} = \mathbf{a}_J^0 V^J$ , отличного от первичных, вычисляется подобно (2.2):  $\Delta \mathbf{v} = \Delta_0 \mathbf{v} + \Delta \Omega \cdot \mathbf{v}$ , где  $\Delta_0 \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}_J^0 \Delta V^J$  — относительное приращение;  $\Delta \Omega$  — спин приращения вектора поворота.

Дифференцирование векторов конвективного базиса может быть выражено преобразованием

$$\partial_i \mathbf{a}_J^0 = \mathbf{C}_i^0 \cdot \mathbf{a}_J^0, \quad \mathbf{C}_i^0 \equiv (\partial_i \mathbf{a}_J^0) \mathbf{a}_0^J$$

с тензором-спином  $\mathbf{C}_i^0(\mathbf{a})$ . Дифференцирование любого вектора  $\mathbf{v}(\mathbf{a})$ , заданного в конвективном базисе, осуществляется по формуле

$$\partial_i \mathbf{v} = \partial_i^0 \mathbf{v} + \mathbf{C}_i^0 \cdot \mathbf{v}, \quad \partial_i^0 \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}_J^0 \partial_i V^J,$$

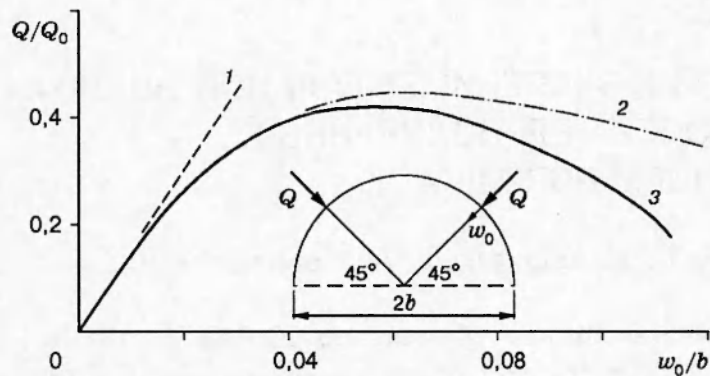
где  $\partial_i^0 \mathbf{v}$  — относительная производная вектора по координате  $t_i$ . Из определения тензора  $\mathbf{C}_i^0$  следует формула  $\Delta_0 \mathbf{C}_i^0 = \partial_i \Delta \Omega$  для вычисления его относительного приращения.

Установленные правила варьирования и дифференцирования векторных полей используются для матричной записи вариационного уравнения (3.2), причем именно относительные приращения и производные векторов являются основными функциями уравнения, поскольку представляются матрицами приращений компонент векторов.

Для вычисления искомых функций применяется стандартная процедура последовательных приближений, позволяющая шаг за шагом проследить процесс деформации оболочки от начального (ненапряженного) состояния до конечного, отвечающего заданной системе внешних сил. Начальные значения параметров процедуры задаются равенствами  $\mathbf{a}_J^+ = \mathbf{a}_J^0 = \mathbf{a}_J$ ,  $\mathbf{b}_i^+ = \mathbf{b}_i \equiv \partial_i \mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{C}_i^+ = \mathbf{C}_i \equiv (\partial_i \mathbf{a}_J) \mathbf{a}^J$ ,  $\Theta \equiv \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{x}^i \equiv \tilde{\mathbf{y}}^i \equiv \mathbf{p} \equiv \tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{p}_3 \equiv \tilde{\mathbf{q}}_3 \equiv \mathbf{0}$ . Каждый тензор жесткости материала  $\mathbf{D}^{ij}$  задается вначале согласно общей матрице Гука. Если он зависит от деформаций, то на следующем шаге вводится матрицей  $[\mathbf{D}^{ij} + \Delta_0 \mathbf{D}^{ij}]$ , где  $\Delta_0 \mathbf{D}^{ij}$  — относительное приращение тензора, отвечающее приращениям первичных векторов.

Восстановление объемных полей деформаций и напряжений в оболочке осуществляется согласно процедуре, изложенной в [2, 3].

**4. Численный анализ деформации сферического купола.** Вариационное уравнение (3.2) было применено для анализа конечной упругой деформации полусферического купола, нагруженного кольцевым усилием  $Q$  под углом  $45^\circ$  к опорной плоскости (см. рисунок). Использовалась линейная конечно-элементная аппроксимация подынтегральных функций. Сосредоточенное воздействие задавалось  $\Pi$ -образной функцией на длине ячейки. Размер купола и упругие свойства материала задавались радиусом  $b = 5$  м, отношением  $b/h = 100$ , модулем Юнга  $D = 10^4$  кН/м<sup>2</sup> и коэффициентом Пуассона  $\gamma = 0,33$  ( $h$  — толщина купола). В качестве изменяемого параметра избрано перемещение  $w_0$  точки приложения усилия. Величина самого усилия вычислялась в процессе решения задачи. Определялись



осесимметричные формы равновесия жесткозащемленного купола, отвечающие последовательным значениям изменяемого параметра.

Рассчитанная по предложенной модели нелинейная зависимость усилия  $Q$  от перемещения  $w_0$  показана линией 3 на рисунке,  $Q_0 = Dh^2/b$ . Линиями 1 и 2 изображена искомая зависимость в линейном и квадратичном приближениях соответственно. Видно, что обе широко используемые усеченные модели теряют приемлемую точность с ростом перемещения  $w_0$ . Расчет выполнен на IBM PC 386.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шкутин Л. И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 120–132.
2. Шкутин Л. И. Механика деформации гибких тел. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
3. Головина Л. Г., Шкутин Л. И. Двойная аппроксимация конечных деформаций оболочки // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 145–150.

Поступила в редакцию 5/VI 1997 г.,  
в окончательном варианте — 23/XII 1997 г.