

УДК 532.51

ВОЛНЫ НА ПЛЕНКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

С. Н. Саматов, О. Ю. Цвелодуб

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается течение тонкой пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости в поле тяжести. Плоскость совершает гармонические колебания в перпендикулярном ей направлении. Получено уравнение, при малых расходах жидкости описывающее эволюцию возмущений поверхности. Построены некоторые решения этого уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение тонкой пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Принятая система координат показана на рис. 1. Твердая стенка, по которой течет пленка, совершает гармонические колебания вдоль оси y с постоянной частотой ω_0 и амплитудой ускорения A_0 . В неинерциальной системе отсчета, связанной со стенкой, система уравнений Навье — Стокса, описывающая течение пленки, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости вдоль осей x и y соответственно; ν — кинематический коэффициент вязкости; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости.

При любых расходах жидкости система уравнений (1.1) допускает решение с плоской свободной границей. Для него профили продольной скорости и давления соответственно равны

$$U_0 = \frac{g}{2\nu} (2h_0 y - y^2), \quad P_0 = p_a + \rho(y - h_0) A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.2)$$

Здесь h_0 — толщина пленки жидкости; p_a — атмосферное давление.

Однако уже при самых малых расходах течение (1.2) вследствие неустойчивости может стать волновым. Используя в качестве масштабов характерные значения величин, относящиеся к безволновому течению пленки, в частности толщину h_0 и скорость на свободной поверхности $U_s = gh_0^2/(2\nu)$, запишем для этого случая уравнения движения в безразмерном виде (знак обезразмеривания опускаем):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Fr} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 1 \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00879) и в рамках проекта 274 по направлению «Фундаментальные исследования в области физики и высоких технологий» Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 гг.».

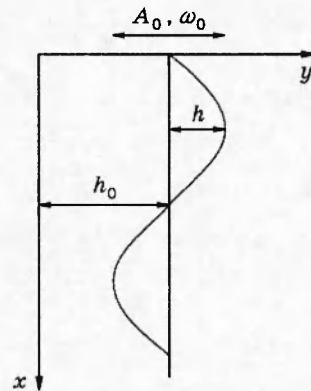


Рис. 1

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\text{Fr}} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{A_0}{g} \cos(\omega t + \varphi) \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Динамические граничные условия на твердой ($y = 0$) и свободной ($y = h_0 + h(x, t)$) границах можно записать аналогично [1]:

$$u = v = 0, \quad y = 0; \quad (1.4)$$

$$\left(p - \frac{\text{We}}{R} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = p_a \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$p - \frac{\text{We}}{R} + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] = p_a, \quad y = h_0 + h.$$

Здесь $\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2}$; $\omega = \frac{\omega_0 h_0}{U_s}$; $\text{Re} = \frac{U_s h_0}{\nu}$ — число Рейнольдса; $\text{Fr} = \frac{U_s^2}{g h_0}$ — число Фруда; $\text{We} = \frac{\sigma}{\rho g h_0^2}$ — число Вебера; σ — коэффициент поверхностного натяжения.

На свободной границе справедливо кинематическое условие

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v. \quad (1.6)$$

Используя (1.2), нетрудно показать, что при произведенном выборе масштабов для обезразмеривания выполняется соотношение $\text{Re}/\text{Fr} = 2$. Ограничиваясь рассмотрением длинноволновых возмущений, ищем решение системы (1.3) с условиями (1.4)–(1.6) в виде рядов по малому параметру $\varepsilon = h_0/\lambda$ (λ — характерный продольный размер возмущений). Для этого, следуя [1], введем новые переменные $x' = \varepsilon x$, $y' = y$, $\tau_n = \varepsilon^n t$, $n = 1, 2, \dots$ и функции $u = U_0 + \varepsilon u'$, $v = \varepsilon^2 v'$, $p = P_0 + \varepsilon p'$, $h = \varepsilon h'$.

Пренебрегая членами порядка ε^2 и выше и перенося граничные условия со свободной поверхности на невозмущенный уровень, для u' , v' , p' , h' приходим к системе (штрихи опускаем)

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + U_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU_0}{dy} \right) - \frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -\frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

со следующими граничными условиями:

$$u = v = 0, \quad y = 0; \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2 U_0}{dy^2} h + \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h = 0, \quad (1.9)$$

$$p + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} h + \frac{A_0}{g} h \cos(\omega t + \varphi) + We \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{Fr}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} = \bar{u}, \quad y = 1.$$

Кинематическое условие (1.6) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \tau_2} + U_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon u \frac{\partial h}{\partial x} = v + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} h, \quad y = 1. \quad (1.10)$$

В (1.9) оставлены члены более высокого порядка по ε , так как для тонких пленок многих жидкостей значения We обычно велики. Поэтому будем полагать, что выполняется соотношение $We \varepsilon^2 \sim 1$.

Решение системы (1.7) представляется в виде рядов по ε

$$(u, v, p, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (u_k, v_k, p_k, h_{k+1}).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , из уравнений для нулевого порядка получим

$$u_0 = \frac{y}{2} h_1, \quad v_0 = -\frac{y^2}{2} \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad p_0 = -\frac{A_0}{g} h_1 \cos(\omega t + \varphi) - We \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.10), приходим к уравнению, описывающему поведение возмущений в первом приближении:

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau_1} + 2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

Как следует из (1.12), в первом приближении все возмущения распространяются со скоростью, равной удвоенной скорости течения на свободной плоской границе.

Для следующего порядка по ε из системы (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial \tau_1} + U_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{dU_0}{dy} &= -\frac{1}{Fr} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\ -\frac{1}{Fr} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для этого порядка из уравнений (1.8), (1.9) получаем граничные условия

$$u_1 = v_1 = 0, \quad y = 0; \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2 U_0}{dy^2} h_2 + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad p_1 + \frac{\partial p_0}{\partial y} h_1 + We \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - 2 \frac{Fr}{Re} \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad y = 1. \quad (1.15)$$

Кинематическое условие (1.10) для данного порядка по ε принимает вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau_2} + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \tau_1} + U_0 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \varepsilon u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} = v_1 + \frac{\partial v_0}{\partial y} h_1, \quad y = 1. \quad (1.16)$$

Решение системы (1.13), удовлетворяющее условиям (1.14), (1.15), легко находится. В частности, для скорости u_1 и значения скорости v_1 на границе соответственно имеем

$$u_1 = 2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{A_0}{g} \cos(\omega t + \varphi) + We \varepsilon^2 \frac{\partial^3 h_1}{\partial x^3} \right) (y - y^2/2) - Re \frac{\partial h_1}{\partial \tau_1} (y - y^3/3) - Re \frac{\partial h_1}{\partial x} (y/3 - y^4/12),$$

$$v_1(y = 1) = -\frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \frac{A_0}{g} \cos(\omega t + \varphi) + We \varepsilon^2 \frac{\partial^4 h_1}{\partial x^4} \right) + \frac{5}{12} Re \frac{\partial^2 h_1}{\partial \tau_1 \partial x} + \frac{3}{20} Re \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}.$$

Подставляя эти соотношения в условие (1.16) с учетом (1.12), после несложных выкладок приходим к уравнению

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau_2} + 4h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \zeta} + \left(\frac{8}{15} \text{Re} + \frac{2A_0}{3g} \cos(\omega_1 \tau_2 + \varphi) \right) \frac{\partial^2 h_1}{\partial \zeta^2} + \frac{2}{3} \text{We} \varepsilon^2 \frac{\partial^4 h_1}{\partial \zeta^4} = 0. \quad (1.17)$$

Здесь $\zeta = x - 2\tau_1$; $\omega_1 = \omega/\varepsilon^2$. Уравнение (1.17) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью линейных возмущений, распространяющихся по поверхности пленки в случае неподвижной стенки.

С помощью замены

$$\zeta = b\xi, \quad b = \left(\frac{5 \text{We} \varepsilon^2}{4 \text{Re}} \right)^{1/2}, \quad \omega_1 = \Omega b^4, \quad h_1 = \frac{8b \text{Re} H}{15}, \quad \tau_2 = \tau b^4, \quad A = \frac{5A_0}{4g \text{Re}}$$

уравнение (1.17) преобразуется к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + [1 + A \cos(\Omega \tau + \varphi)] \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0. \quad (1.18)$$

В случае неподвижной стенки ($A = 0$) уравнение (1.18) переходит в уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0, \quad (1.19)$$

которое по традиции, хотя и не совсем правильно, часто называют уравнением Курамото — Сивашинского. Последнее отличается от (1.19) нелинейным членом, но их решения легко выражаются друг через друга, поэтому мы также будем называть уравнение (1.19) уравнением Курамото — Сивашинского. Применительно к исследованию стекающих пленок уравнение (1.19) получено в работе [1]. К настоящему времени оно достаточно подробно исследовано, построены многие его решения.

Аналогично уравнению Курамото — Сивашинского у периодических или локализованных решений уравнения (1.18) сохраняется «импульс»:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\lambda H d\xi = 0.$$

Здесь λ — длина волны, в случае локализованного возмущения используются пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$.

Умножая (1.18) на H и интегрируя, после несложных преобразований для описания характера эволюции «энергии» получаем соотношение, справедливое для любого периодического (уединенного) решения уравнения (1.18):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\lambda H^2 d\xi = [1 + A \cos(\Omega \tau + \varphi)] \int_0^\lambda \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - \int_0^\lambda \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi. \quad (1.20)$$

2. Результаты. Если в уравнении (1.18) пренебречь нелинейным членом, то оно будет описывать устойчивость исходного течения (1.2) по отношению к бесконечно малым возмущениям. Эти решения легко находятся. Представляя их в виде пространственно-периодических волн $H = F(\tau) \exp(i\alpha\xi) + \text{к.с.}$, получим

$$H = F_0 \exp [i\alpha\xi + \alpha^2((1 - \alpha^2)\tau + A/\Omega \sin(\Omega\tau + \varphi))] + \text{к.с.} \quad (2.1)$$

Здесь α — волновое число; F_0 — произвольная комплексная постоянная; к.с. означает комплексно-сопряженное выражение. Из (2.1) следует, что в случае колеблющейся стенки, так же как и неподвижной, неустойчивыми будут возмущения с волновыми числами

меньше единицы. Если волновое число больше единицы, то такие возмущения со временем затухают. Для волнового числа $\alpha_n = 1$ решение (2.1) с ростом времени τ остается ограниченным. В используемой системе отсчета оно представляет собой стоячую волну, амплитуда которой испытывает осцилляции с частотой колебаний стенки Ω .

Для анализа нелинейных периодических решений уравнение (1.18) решалось численно. Решение представлялось в виде пространственного ряда Фурье, гармоники которого являются функциями времени:

$$H(\xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(\tau) \exp(in\alpha\xi). \quad (2.2)$$

В силу вещественности H для гармоник H_n справедливо соотношение $H_{-n} = H_n^*$. Здесь звездочка означает операцию комплексного сопряжения.

Подставляя (2.2) в (1.18), получаем бесконечную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для H_n . Обрывая ряд (2.2), т. е. полагая, что все гармоники H_n начиная с некоторого номера N равны нулю, приходим к ее конечному аналогу

$$\frac{dH_n}{d\tau} = -4i\alpha n \sum_{m=N-n}^N H_m H_{n-m} + \alpha^2 n^2 \{ [1 + A \cos(\Omega\tau + \varphi)] - \alpha^2 n^2 \} H_n, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что уравнение на гармонику H_0 тривиально и H_0 равно произвольной постоянной. В дальнейшем будем строить решения, у которых эта константа равна нулю. Иными словами, будут рассматриваться решения, для которых среднее по длине волны значение H равно нулю. Учитывая, что уравнение (1.18) инвариантно относительно преобразования $H \rightarrow H + \text{const}$, $\xi \rightarrow \xi - 4\text{const} \tau$, $\tau \rightarrow \tau$, другие решения могут быть получены из приводимых ниже простым пересчетом.

Таким образом, разделяя в (2.3) вещественные и мнимые части и учитывая, что $H_{-n} = H_n^*$, имеем систему из $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений для $2N$ неизвестных функций.

Система (2.3) решалась численно одним из методов Рунге — Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования и контролируемой погрешностью. При обрывании ряда (2.3) число гармоник бралось таким, чтобы выполнялось соотношение $\max |H_n| / \sup |H_n| < 10^{-4}$. Для приводимых ниже результатов, как показывают расчеты, достаточно брать значения $N = 5 \div 6$. Основные результаты получены с $N = 10$. Для контроля при проведении некоторых расчетов решалась система с $N = 25$. Прямое сравнение показало, что при этом у первых трех гармоник (для рассматриваемых волновых чисел α их вклад в решение был определяющим) отличие возникало не более чем в 4–5-м знаке.

В настоящее время опубликовано много статей, посвященных исследованию уравнения Курамото — Сивашинского. Картина его решений чрезвычайно богата. Например, в [1] показано, что при $\alpha = 1$ от тривиального решения ответвляется семейство периодических решений уравнения (1.19), которое может быть продолжено до волнового числа $\alpha_* = 0,4979$. Это семейство традиционно называют первым семейством. Там же в [1] для этого семейства определена область волновых чисел $0,77 \leq \alpha \leq 0,84$, для которых решения устойчивы ко всем малым возмущениям. По отношению к малым возмущениям того же периода устойчивы решения первого семейства с волновыми числами $0,554 \leq \alpha \leq 1$. В [2–4] показано, что существует счетное множество периодических семейств решений. В [5] найдены два семейства, которые при $\alpha \rightarrow 0$ переходят в солитонные решения в виде одиночного горба и одиночной вмятины. В [6] построены многогорбые солитонные решения для уравнения (1.19), а в [3, 4] показано, что такие решения являются предельными для семейств, соответствующим образом ответвившихся от семейств из [5]. Там же продемонстрировано, как происходит последовательный каскад бифуркаций, в результате которого рождаются все более сложные семейства.

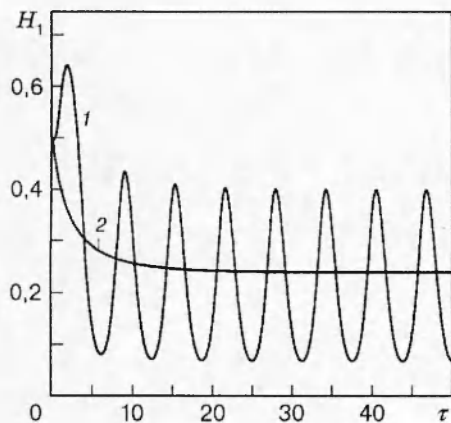


Рис. 2

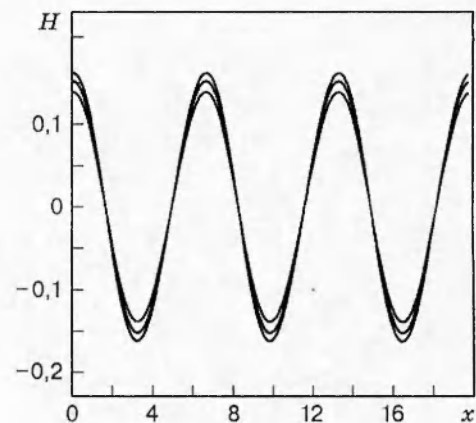


Рис. 3

Имеющаяся информация по периодическим установившимся решениям уравнения Курамото — Сивашинского упрощает исследование режимов, описываемых уравнением (1.18). Учитывая сложность волновой картины решений уравнения Курамото — Сивашинского, в настоящей работе мы ограничимся построением только тех решений уравнения (1.18), у которых волновые числа лежат в достаточно малой окрестности нейтрального волнового числа $\alpha = 1$. Здесь поведение решений уравнения Курамото — Сивашинского наиболее просто. Если $\alpha > 1$, все они, независимо от вида начального профиля волны, со временем затухают. Если же $\alpha < 1$ и при решении системы (2.3) субгармоники не допускались (т. е. первой гармоникой была именно гармоника с волновым числом α , а не α/r , где r — целое число), то все начальные профили волны со временем эволюционируют к соответствующим решениям первого семейства.

Как показали проведенные расчеты, даже в этой области волновых чисел, где структура решений уравнения Курамото — Сивашинского достаточно проста, влияние колебаний стенки существенным образом разнообразит картину решений. Причем заметное влияние на нее оказывает изменение как амплитуды, так и частоты колебаний. Влияние начальной фазы для рассмотренной области волновых чисел существенно слабее. Во всех приводимых ниже примерах ее значение бралось равным $\varphi = -\pi/2$, т. е. в уравнении (1.18) коэффициент при второй производной имел вид $1 + A \sin(\Omega\tau)$.

На рис. 2 кривой 1 представлена зависимость модуля амплитуды первой гармоники H_1 (в дальнейшем, когда речь будет идти об амплитуде какой-либо гармоники, мы всегда имеем в виду модуль этой амплитуды) от времени для волнового числа $\alpha = 0,95$ и $A = 1$, $\Omega = 1$. Начальное значение вещественной части H_1 равно 0,5. Здесь, а также на рис. 3 — начальные значения всех остальных гармоник и мнимая часть первой гармоники H_1 полагались равными нулю. Для сравнения кривой 2 представлено соответствующее решение уравнения Курамото — Сивашинского. К моменту времени $\tau = 20$ оно выходит на константу, которая совпадает со значением, полученным, например, в [3–5] для установившегося волнового режима. Видно, что достаточно быстро решение уравнения (1.18) выходит на некоторый «стационар» — совершает регулярные колебания вокруг установившегося решения уравнения Курамото — Сивашинского. На рис. 3 показаны профили этого решения для трех различных моментов времени (в течение периода колебаний стенки) при $\alpha = 0,95$, $A = 1$, $\Omega = 1$. Представлены три пространственных периода. Видно, что в каждый из моментов времени волна представляет собой практически чистую синусоиду. Как видно на рис. 2, для данного варианта расчета амплитуда волны промодулирована по времени также практически чистым синусом. Это связано с тем, что для решений с

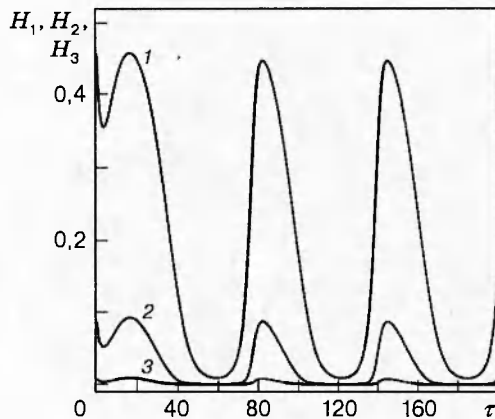


Рис. 4

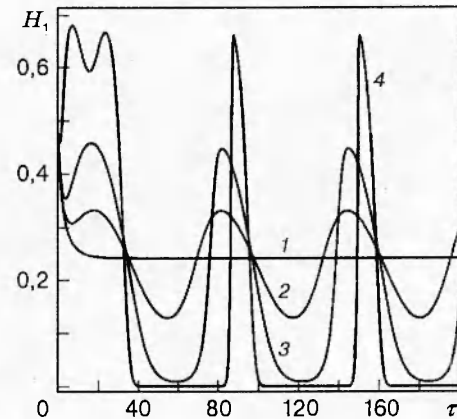


Рис. 5

волновыми числами, лежащими вблизи от нейтрального числа $\alpha_n = 1$, значения величин высших гармоник быстро убывают. Представление о порядках данных величин, в частности, дает рис. 4. Здесь кривой 1 показана зависимость от времени амплитуды первой гармоники H_1 , а кривыми 2 и 3 — амплитуд второй H_2 и третьей H_3 гармоник соответственно. Значение волнового числа $\alpha = 0,95$, амплитуда и частота колебаний стенки $A = 0,3$, $\Omega = 0,1$.

При фиксированном значении частоты ω с увеличением значения амплитуды A пульсации решения усиливаются и все более отличаются от синусоидальных. На рис. 5 представлена зависимость амплитуды первой гармоники H_1 от времени. Для всех кривых значение волнового числа $\alpha = 0,95$. Кривой 1 соответствует значение $A = 0$ (решение уравнения Курамото — Сивашинского); кривой 2 — $A = 0,1$, $\Omega = 0,1$; кривой 3 — $A = 0,3$, $\Omega = 0,1$.

При фиксированной амплитуде A подобным образом решение трансформируется при уменьшении частоты Ω .

Если при данном значении амплитуды A волновое число α близко к нейтральному волновому числу, но меньше его ($\alpha < 1$ — область линейной неустойчивости), то при достаточно малых значениях частоты колебаний стенки Ω наблюдаются решения с интересным поведением (для кривой 4 на рис. 5 $A = 2$, $\Omega = 0,1$). Видно, что здесь существуют значительные промежутки времени, на которых решение практически равно нулю, после чего оно быстро возрастает, амплитуда основной гармоники (так же быстро, но в соответствующих пропорциях растут и остальные гармоники) достигает максимума, затем решение быстро уменьшается и длительное время остается практически равным нулю. Не считая первого участка (для кривой 4 это интервал $\tau = 0 \div 40$), где поведение решения зависит от начальных данных, в дальнейшем этот процесс повторяется. В итоге устанавливается интересный автоколебательный режим. Его характеристики (интервалы «покоя» и пики амплитуды) не зависят от начальных данных, а определяются только значениями частоты Ω и амплитуды колебаний стенки A .

Не очень строго такое поведение решения можно объяснить следующим образом. Если частота Ω достаточно мала, в уравнении (1.18) фазу у коэффициента при второй производной можно считать практически постоянной, т. е. «замороженной» в течение достаточно долгого времени. Для данного промежутка времени область локальной линейной неустойчивости лежит в интервале волновых чисел

$$0 < \alpha < [1 + A \cos(\Omega\tau + \varphi)]^{1/2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, верхняя граница указанной локальной области неустойчивости «дышит» по времени. Если волновое число α лежит вблизи α_n , но $\alpha < \alpha_n$, а амплитуда A

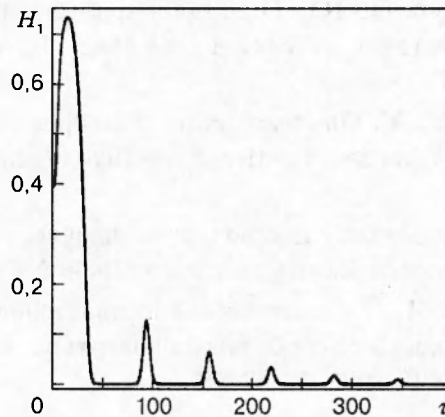


Рис. 6

достаточно велика, то в те моменты, когда α попадает в область (2.4) и величины гармоник очень малы, происходит сначала линейный экспоненциальный рост волны (при этом значение косинуса продолжает возрастать), на нелинейной стадии происходит быстрый рост волны. Затем, когда верхняя граница в (2.4) начинает уменьшаться, решение практически также быстро убывает. Когда волновое число α оказывается в области устойчивости, наступает стадия линейного экспоненциального убывания. В дальнейшем процесс повторяется. Данные рассуждения подтверждаются результатами расчетов по эволюции периодических возмущений, волновые числа которых лежат в области устойчивости. Пример такого расчета показан на рис. 6, где представлена зависимость от времени амплитуды первой гармоники для решения со значением волнового числа $\alpha = 1,005$ ($A = 1$ и $\Omega = 0,1$). На рис. 6 видно, что хотя решение в целом находится в области устойчивости, на некоторое время оно попадает в локальную область неустойчивости. Это, как и в первом случае, приводит к появлению всплесков в эволюции амплитуд. Тем не менее с течением времени пики этих всплесков уменьшаются, в итоге решение затухает. Такая разница в поведении двух близких к α_n режимов, но лежащих от него по разные стороны, состоит в том, что в первом случае ($\alpha < \alpha_n$) решение пребывает в области локальной неустойчивости дольше, чем в области локальной устойчивости, а во втором ($\alpha > \alpha_n$) наблюдается обратная ситуация. Численный анализ уравнения (1.20) для баланса «энергии» показывает, что в случае, когда $\alpha > \alpha_n$, потери «энергии» не восполняются ее накачкой.

Выводы. Полученное в работе уравнение (1.18) позволяет исследовать поведение возмущений в пленочном течении на вибрирующей вертикальной плоскости в случае малых расходов. На характер волновых режимов такого пленочного течения заметное влияние оказывают как амплитуда, так и частота колебаний стенки. Как показали расчеты, даже когда волновые числа возмущений близки к нейтральному волновому числу α_n , на поверхности пленки могут наблюдаться интересные волновые режимы, не существующие в случае течения пленки по неподвижной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.
2. Демехин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 3. С. 36–44.

3. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. Новосибирск, 1988. (Препр. / Ин-т теплофизики СО АН СССР; № 188-88).
4. Tsvlodub O. Y., Trifonov Y. Y. On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // *Physica D*. 1989. V. 36, N 3. P. 255–269.
5. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 4. С. 142–146.
6. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободными поверхностями: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 32–48.

*Поступила в редакцию 28/V 1997 г.,
в окончательном варианте — 16/X 1997 г.*
