

УДК 519.6:517.58

## АСИМПТОТИКА ПРОВОДЯЩИХ СВОЙСТВ ВЫСОКОКОНТРАСТНЫХ СРЕД

А. Г. Колпаков

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин),  
630008 Новосибирск  
E-mail: agk@neic.nsk.su

Изучены эффект асимптотического экранирования и асимптотика проводимости среды с абсолютно проводящими включениями при малом расстоянии между ними. Доказано, что при наличии асимптотического экранирования для пар соседних частиц исходная непрерывная задача может быть аппроксимирована конечномерной задачей.

Ключевые слова: эффект экранирования, асимптотика, проводимость, абсолютно проводящие включения, конечномерная аппроксимация.

**Введение.** Рассматривается трехмерная краевая задача для уравнения Лапласа в области с абсолютно проводящими включениями при условии тесной упаковки включений. Известные подходы [1–3] к этой задаче неприменимы. История проблемы восходит к задаче об электрическом поле в системе периодических тел [4]. Позднее в [5] была показана неприменимость формул из [4] при малом расстоянии  $\delta$  между телами и получены новые формулы для малых  $\delta$ . Использование в [5] линейной пробной функции в канале между частицами привело к расходящемуся интегралу. В [5] предел интегрирования был произвольно ограничен, поэтому вопрос о расходимости интеграла остался открытым. В двумерном случае соответствующий интеграл обычно сходится, что позволило обосновать сетевую модель для двумерного композита, наполненного дисками [3]. В [6] описан эффект экранирования при сближении тел. В настоящей работе доказывається, что задача Максвелла — Келлера [4, 5], экранирование по Тамму [6] и возможность конечномерной аппроксимации непрерывной задачи в области с абсолютно проводящими включениями связаны между собой. При этом обнаружено, что в трехмерном случае эффект асимптотического экранирования не всегда имеет место и его физическая природа иная, нежели указано в [6].

**1. Постановка задачи.** Пусть в области  $P = [-L, L]^3$  распределены непересекающиеся и невыпуклые частицы  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) с кусочно-гладкими границами (рис. 1). Обозначим область вне частиц  $Q = P \setminus \{\cup D_i\}$ . Рассмотрим задачу

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в области } Q; \quad (1.1)$$

$$\varphi = t_i \quad \text{на } D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.2)$$

$$\int_{\partial D_i} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.3)$$

$$\varphi(x, y, \pm 1) = \pm 1; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(\pm L, y, z) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(x, \pm L, z) = 0. \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\mathbf{n}$  — нормаль к границе области  $Q$ . Незвестными являются функция  $\varphi$  в области  $Q$  и ее значения  $\{t_i\}$  на частицах  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

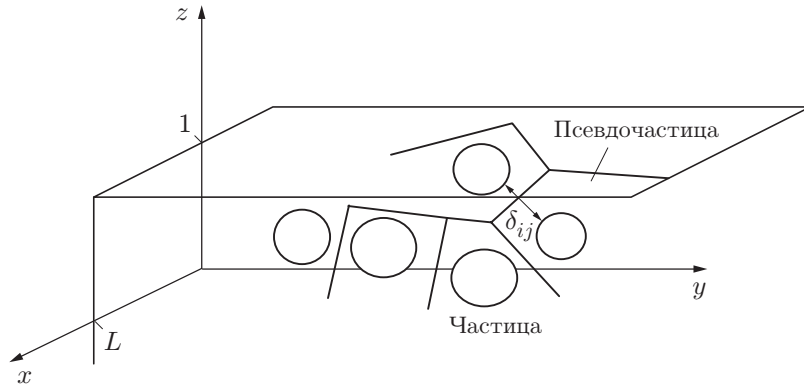


Рис. 1. Композит и ячейки Вороного

При анализе задачи (1.1)–(1.5) будем использовать в основном терминологию электростатики. Исключение составляет термин “поток”, который определим как  $\nabla\varphi$ . В электростатике поток — это напряженность электрического поля со знаком минус. Если понимать (1.1)–(1.5) как задачу электро- и теплопроводности или диффузии, то поток — это электрический ток, поток тепла или вещества. Диэлектрическая постоянная (сопротивление, коэффициент теплопроводности или диффузии) в (1.1)–(1.5) равна единице.

Условие (1.3) означает равенство нулю суммарного потока в частицу, условие (1.4) — приложение на сторонах  $z = \pm 1$  (рис. 1) потенциалов  $\pm 1$  соответственно, условие (1.5) — отсутствие потока через вертикальные грани области  $P$ .

Задача (1.1)–(1.5) равносильна задаче минимизации

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_Q |\nabla\varphi|^2 d\mathbf{x} \rightarrow \min \quad (1.6)$$

на множестве функций

$$V_p = \{\varphi(\mathbf{x}) \in H^1(Q): \varphi(\mathbf{x}) = t_i \text{ на } D_i, \varphi(x, y, \pm 1) = \pm 1\}. \quad (1.7)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Эффективной проводимостью неоднородной среды назовем величину  $a = \frac{1}{4L^2} \int_{z=1} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} d\mathbf{x}$  (нормальный поток через границу  $z = 1$ , отнесенный к площади границы).

Выразим эффективную проводимость через функционал  $I(\varphi)$ . Имеет место равенство [3]

$$4L^2 a = \int_{z=1} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_Q |\nabla\varphi|^2 d\mathbf{x}. \quad (1.8)$$

Величину  $A = 4L^2 a$  будем называть эффективной проводимостью образца. В силу (1.8) имеем

$$A = \frac{1}{2} \int_Q |\nabla\varphi|^2 d\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

Исследуем эффективную проводимость образца  $A$  (а значит, и эффективную проводимость  $a$ ) при малых расстояниях между частицами.

**2. Общие оценки сверху и снизу.** Оценка сверху. Из (1.6), (1.7) следует оценка

$$A \leq \frac{1}{2} \int_Q |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in V_p. \quad (2.1)$$

Оценка снизу. Введем пространство функций

$$W_p = \left\{ \mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), v_3(\mathbf{x})) \in L_2(Q): \mathbf{v}(x, \pm L, z)\mathbf{n} = \mathbf{v}(x, y, \pm L)\mathbf{n} = 0, \right. \\ \left. \int_{\partial D_i} \mathbf{v}\mathbf{n} d\mathbf{x} = 0, i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Следуя [3], получаем оценку снизу

$$A \geq - \int_Q \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 d\mathbf{x} + \int_{z=\pm 1} \varphi^0 \mathbf{v}\mathbf{n} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in W_p \quad (\operatorname{div} \mathbf{v} = 0). \quad (2.2)$$

Здесь и далее функция  $\varphi^0(z)$  (такая, что  $\varphi^0(\pm 1) = \pm 1$ ) используется для сокращения записи и входит только в интегралы по граням  $z = \pm 1$ .

Для решения  $\varphi$  задачи (1.6), (1.7) имеет место равенство  $I(\varphi) = J(\mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ ;  $J(\mathbf{v}) = - \int_Q \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 d\mathbf{x} + \int_{z=\pm 1} \varphi^0 \mathbf{v}\mathbf{n} d\mathbf{x}$ . Это равенство следует из определения функционалов  $I(\varphi)$ ,  $J(\mathbf{v})$ , формулы Грина и краевых условий (1.3), (1.5).

**3. Формальная сетевая модель.** Решения задачи вида (1.1), (1.2) для пары частиц известны из электростатики (см., например, [7]). Анализ этих решений показывает, что во многих случаях при сближении частиц между ними возникают сильные потоки, при этом энергия концентрируется в малой области (канале) между частицами. Исходя из этого построим сетевой аналог задачи (1.1)–(1.5), считая, что частицы взаимодействуют только с ближайшими соседями, а поток  $p_{ij}$  между парой соседних частиц ( $i$ -й и  $j$ -й) равен  $C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j)$ , где  $C_{ij}^{(2)}$  — парная электрическая емкость этих частиц в  $\mathbb{R}^3$  [7]. Получаем сеть (граф)  $\{\mathbf{x}_i, t_i, C_{ij}^{(2)}; i, j = 1, 2, \dots, N\}$ , где  $\mathbf{x}_i$  — узлы сети (частицы);  $t_i$  — потенциалы частиц;  $C_{ij}^{(2)}$  — характеристики ребер сети. Потоки  $p_{ij}$  (заряды, если следовать электростатической интерпретации задачи) в сети должны удовлетворять уравнению Кирхгофа для внутренних узлов сети (обозначаемых далее  $I$ ) и краевым условиям для частиц, лежащих на границах  $S^\pm$ , соответствующих  $z = \pm 1$ :

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j) = 0, \quad i \in I, \quad t_i = \pm 1, \quad i \in S^\pm. \quad (3.1)$$

Определим понятие смежных частиц, пользуясь методом Вороного — Делоне [8]. Ячейка Вороного, соответствующая данной частице, — это множество точек, расстояние от которых до данной частицы меньше расстояния до других частиц. Для односвязных выпуклых частиц с кусочно-гладкими границами ячейки Вороного определены однозначно. Под смежными будем понимать частицы, лежащие в смежных ячейках Вороного (см. рис. 1). Соответственно, в (3.1) следует проводить суммирование только по частицам, смежным с данной (или полагать  $C_{ij}^{(2)} = 0$ , если  $i$ -я и  $j$ -я частицы не являются смежными). Часть частиц может касаться границ  $z = \pm 1$ . На них ставится условие Дирихле. Часть частиц лежит около границ  $z = \pm 1$ , их ячейки Вороного имеют общую часть с границей  $S^\pm$

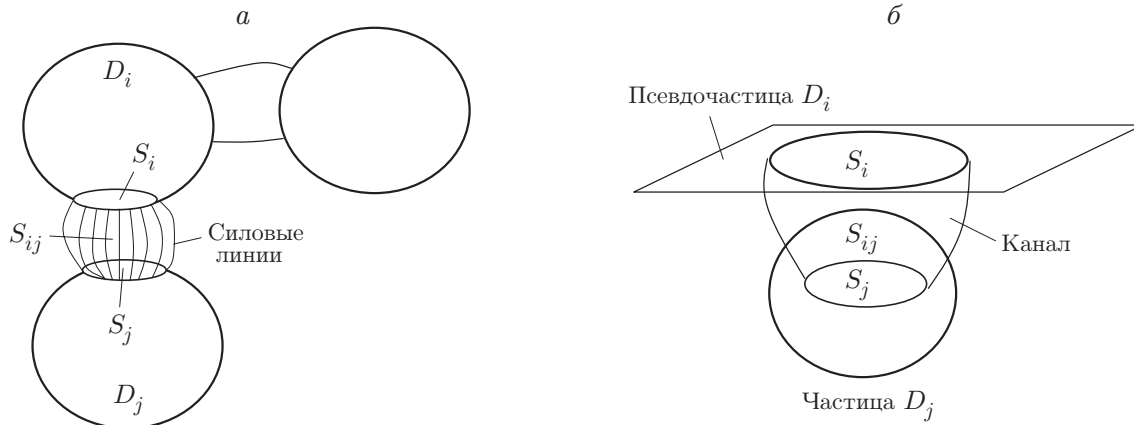


Рис. 2. Экипотенциальный канал для пары частица — частица (а) и частица — псевдочастица (граница) (б)

и дробят  $S^\pm$  на многогранники (рис. 1). Эти многогранники назовем псевдочастицами и зададим на них потенциалы 1 или  $-1$ . Через псевдочастицы будет учтен поток в системе граница — приграничная частица, порождающий третье краевое условие. Псевдочастица может быть рассмотрена как шар радиуса  $R = \infty$ . Граф Делоне (граф с ребрами, соединяющими соседние частицы) является связным [8].

Обозначим через  $S^+$  все частицы (исходные и псевдочастицы), пересекающиеся с границей  $z = 1$ , через  $S^-$  — все частицы, пересекающиеся с границей  $z = -1$ , и через  $I$  — остальные (т. е. внутренние) частицы. Можно доказать следующее утверждение (см. [3]).

**Лемма 1.** *Решение задачи (3.1) удовлетворяет условию  $-1 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N$ .*

Используя решение задачи (3.1), можно построить двусторонние оценки, которые в определенных условиях смыкаются при плотной паковке частиц. Начнем с получения уточненных (по сравнению с (2.1), (2.2)) оценок, справедливых для любой паковки частиц.

**4. Уточненная оценка снизу.** Уточнение оценок производится за счет использования специальных пробных функций. В (2.2) пробная функция  $\mathbf{v}$  должна удовлетворять условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{в области } Q; \tag{4.1}$$

$$\int_{\partial D_i} \mathbf{v} \mathbf{n} \, dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N; \tag{4.2}$$

$$\mathbf{v} \mathbf{n} = 0 \quad \text{на поверхностях } y = \pm L, \quad z = \pm L.$$

Для построения пробной функции рассмотрим две смежные частицы  $D_i$  и  $D_j$  (рис. 2,а). Выбор направления осей координат несуществен. Область, соединяющую частицы  $D_i$  и  $D_j$  (рис. 2,а,б), назовем каналом между частицами  $D_i$  и  $D_j$  и обозначим  $S_{ij}$ . В данной работе используются два типа каналов, которые будут описаны ниже.

*Экипотенциальные каналы и оценка объемного интеграла в (2.2).* Частица может иметь несколько соседей. Выберем канал  $S_{ij}$  (рис. 2,а) не слишком широким, чтобы он не пересекался с другими каналами и в то же время значения его ширины  $S$  были отделены от нуля.

Будем строить канал  $S_{ij}$  и пробную функцию  $\mathbf{v}$  в нем, исходя из решения задачи об электрическом поле в  $\mathbb{R}^3$ , создаваемом двумя частицами  $D_i$  и  $D_j$  с потенциалами  $t_i, t_j$ :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \quad \text{в области } \mathbb{R}^3 \setminus (D_i \cup D_j), \\ \varphi &= t_i \text{ на } D_i, \quad \varphi = t_j \text{ на } D_j, \quad |\varphi(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Построение проведем в терминах “эквипотенциальных поверхностей” и “силовых линий”. Поверхности  $\varphi(\mathbf{x}) = \text{const}$  называются эквипотенциальными. Нормали к ним образуют силовые линии. Вне  $D_i \cup D_j$  эквипотенциальные поверхности и силовые линии образуют систему ортогональных координат.

Для двух частиц строение эквипотенциальных поверхностей и силовых линий известно и имеет вид, показанный на рис. 2, *a*. Силовые линии, идущие из окрестности  $S_i$  полюса сферы  $D_i$ , приходят в окрестность  $S_j$  полюса сферы  $D_j$ . Под полюсами понимаются максимально близкие точки частиц. Размеры области  $S_{ij}$ , заполненной силовыми линиями, идущими из  $S_i$  в  $S_j$ , и областей  $S_i$  и  $S_j$  одного порядка. Обозначим через  $\delta_{ij}$  расстояние между частицами  $D_i$  и  $D_j$ . При малых  $\delta_{ij}$  (стремящихся к нулю) и малых (но фиксированных) размерах областей  $S_i$  и  $S_j$  область  $S_{ij}$  образует изолированный канал между частицами  $D_i$  и  $D_j$ . Каналы такого вида будем называть эквипотенциальными.

Рассмотрим функцию

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \nabla\varphi, & \mathbf{x} \in S_{ij}, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S_{ij} \setminus (D_i \cup D_j). \end{cases} \quad (4.4)$$

**Предложение.** Для функции (4.4) имеет место равенство  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  в  $\mathbb{R}^n(D_i \cup D_j)$  ( $n = 2, 3$ ).

Отметим, что для произвольного (не эквипотенциального) канала в (4.4) такое утверждение неверно. Для функции (4.4)

$$\mathbf{v}\mathbf{n} = \nabla\varphi\mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma^+ \quad (4.5)$$

( $\Gamma^+$  — боковая внутренняя граница канала  $S_{ij}$ ). Равенство (4.5) объясняет выбор канала  $S_{ij}$ . Граница эквипотенциального канала представляет собой силовые линии, поэтому поток через границу отсутствует и для функции (4.4) выполнено условие нулевой дивергенции во всей области  $\mathbb{R}^3 \setminus (D_i \cup D_j)$ . При использовании в качестве пробной функции “электростатического” решения проблема расходимости интеграла вообще не возникает.

Необходимо удовлетворить еще условию (4.2). Для функции  $\mathbf{v}$  в (4.4) в силу выбора функции  $\varphi$  и канала  $S_{ij}$  (см. (4.5)) имеем

$$\int_{S_i} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x} = - \int_{S_j} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Умножая равенство  $\Delta\varphi = 0$  из (4.3) на  $\varphi$  и интегрируя по частям в  $S_{ij}$ , с учетом оставшихся условий из (4.3) получаем

$$- \int_{S_{ij}} |\nabla\varphi|^2 \, d\mathbf{x} = t_i \int_{S_i} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x} + t_j \int_{S_j} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда с учетом (4.6) получаем  $\int_{S_{ij}} |\nabla\varphi|^2 \, d\mathbf{x} = (t_i - t_j) \int_{S_i} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x}$ . Тогда

$$\int_{S_i} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{t_i - t_j} \int_{S_{ij}} |\nabla\varphi|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

Обозначим через  $\varphi^{\pm 1}(\mathbf{x})$  решение задачи (4.3) при  $t_i = 1/2$ ,  $t_j = -1/2$ . Тогда  $\nabla\varphi = (t_i - t_j)\varphi^{\pm 1}$  и соотношение (4.7) принимает вид

$$\int_{S_i} \nabla\varphi\mathbf{n} \, d\mathbf{x} = (t_i - t_j) \int_{S_{ij}} |\nabla\varphi^{\pm 1}|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (4.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Величину  $C^{S_{ij}} = \int_{S_{ij}} |\nabla\varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} = \int_{S_j} \nabla\varphi^{\pm 1} \mathbf{n} d\mathbf{x}$  будем называть

емкостью множеств  $S_i$  и  $S_j$  (или  $D_i$  и  $D_j$ ) в множестве  $S_{ij}$ .

Емкость зависит от формы частиц и расстояния между ними.

Мы вычислили поток  $\int_{S_i} \nabla\varphi \mathbf{n} d\mathbf{x}$  в частицу  $D_i$  через один канал  $S_{ij}$ . Поскольку ча-

стица  $D_i$  может иметь несколько соседей, интеграл в (4.2) есть суммарный поток по всем каналам (которые по построению не пересекаются), ведущим в  $D_i$ . Для построения пробной функции надо задать потоки в каждом канале так, чтобы баланс потоков выполнялся сразу для всех частиц. Используем для этого решение сетевой задачи (3.1) — величины  $p_{ij}$ , удовлетворяющие условию глобального баланса. Условие (4.2) выполнено, если поток в каждом канале  $S_{ij}$  удовлетворяет равенству  $\int_{S_i} \nabla\varphi \mathbf{n} d\mathbf{x} = p_{ij}$ . Принимаем, что в

канале  $S_{ij}$  функция  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = \lambda_{ij} \varphi^{\pm 1}. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что для выполнения соотношения (4.8)  $\lambda_{ij}$  должно удовлетворять условию

$$\int_{S_i} \lambda_{ij} \nabla\varphi^{\pm 1} \mathbf{n} d\mathbf{x} = \lambda_{ij} \int_{S_i} \nabla\varphi^{\pm 1} \mathbf{n} d\mathbf{x} = p_{ij}$$

( $S_i$  — окрестность полюса частицы  $D_i$ ) или

$$\lambda_{ij} C^{S_{ij}} = p_{ij}. \quad (4.10)$$

Имея в виду, что  $p_{ij} = C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j)$  ( $C_{ij}^{(2)}$  — емкость пары тел  $D_i$  и  $D_j$  в  $\mathbb{R}^3$ ), из (4.8), (4.10) получаем

$$\lambda_{ij} = \frac{C_{ij}^{(2)}}{C^{S_{ij}}}(t_i - t_j). \quad (4.11)$$

Если пробная функция в канале  $S_{ij}$  имеет вид (4.9), для нее выполнено условие (4.2). Выполнение (4.1) доказано ранее (оно не зависит от умножения функции на произвольное число).

Теперь можно вычислить интеграл в (2.2) для пробной функции (4.9). Вычислим значение интеграла в одном канале. Для функции (4.9), удовлетворяющей (4.1), (4.2), имеем

$$\int_{S_{ij}} |\lambda_{ij} \nabla\varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} = \lambda_{ij}^2 \int_{S_{ij}} |\nabla\varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} = \lambda_{ij}^2 C^{S_{ij}}. \quad (4.12)$$

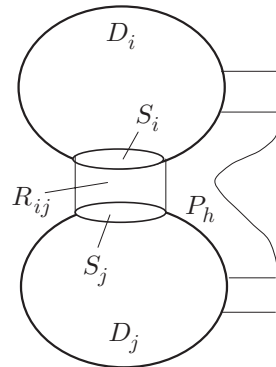
С учетом (4.11) величина (4.12) (интеграл по одному каналу  $S_{ij}$ ) равна

$$\lambda_{ij}^2 C^{S_{ij}} = \left(\frac{C_{ij}^{(2)}}{C^{S_{ij}}}\right)^2 C^{S_{ij}}(t_i - t_j)^2 = \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} (t_i - t_j)^2. \quad (4.13)$$

Так как каналы не пересекаются, то интеграл  $-\int_Q \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 d\mathbf{x}$  равен сумме по всем кана-

лам. С учетом (4.12), (4.13) получаем

$$-\int_Q \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \sum_{S_{ij}} \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} (t_i - t_j)^2 = -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} (t_i - t_j)^2.$$

Рис. 3. Цилиндрический канал и окрестность  $P_h$ 

Индекс  $S_{ij}$  в знаке суммы означает, что суммирование проводится по каналам (один канал — одно слагаемое). Суммируя по индексам  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , проходим каждый канал дважды и в результате получаем множитель  $1/4$ .

*Оценка граничного интеграла в (2.2).* Для частицы, примыкающей к границе  $z = 1$ , канал  $S_{ij}$  имеет вид, показанный на рис. 2, б. Плоской является псевдочастица  $D_i$ . Расчет поля в канале ведется так же, как в предыдущем случае (следует только положить  $R_i = 0$ ). Граничный интеграл из (2.2) по  $S_i$  равен  $p_{ij}$ , а интеграл по всей границе  $z = 1$  равен  $\sum_{i \in S^+} \sum_j p_{ij} = \sum_{i \in S^+} \sum_j C_{ij}^{(2)}(1 - t_j)$ , где индекс  $i \in S^+$  соответствует частицам (настоящим и псевдочастицам), лежащим на границе  $z = 1$ . Обозначим эту сумму  $P^+$ . Аналогично  $P^- = \sum_{i \in S^-} \sum_j C_{ij}^{(2)}(-1 - t_j)$ . Таким образом, вычислены оба интеграла в (2.2) для пробной функции (4.3), и можно записать следующую из (2.2) оценку в виде

$$A \geq \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} (t_i - t_j)^2 + P^+ + P^- \quad (4.14)$$

**5. Уточненная оценка сверху.** Общая оценка сверху имеет вид (2.1). Уточним ее.

*Цилиндрический канал и построение пробной функции.* Рассмотрим цилиндрический канал  $R_{ij}$  (рис. 3) и определим в нем пробную функцию  $\varphi = (t_i - t_j)\varphi^{\pm 1}$  (сужение “электростатического” решения на канал  $R_{ij}$ ). Представляет интерес интеграл  $\int_Q |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x}$ . Для

$\varphi = (t_i - t_j)\varphi^{\pm 1}$  имеем в канале  $R_{ij}$

$$\int_{R_{ij}} |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x} = (t_i - t_j)^2 \int_{R_{ij}} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x}.$$

*Построение пробной функции вне канала.* Рассмотрим частицу с входящими в нее каналами  $R_{ij}$ . Диаметр каналов  $R_{ij}$  фиксированный. При сближении каналов ( $\delta \rightarrow 0$ ) расстояния между частицами  $D_i$  и расстояния между каналами  $R_{ij}$  отделены от нуля равномерно по  $\delta \rightarrow 0$ . Построим окрестность частиц  $D_i$  и каналов  $R_{ij}$  ширины  $h$ , не зависящей от  $\delta \rightarrow 0$ . Обозначим эту окрестность  $P_h$ . При  $\delta \rightarrow 0$  область  $P_h$  переходит в свое предельное (при  $\delta = 0$ ) положение. В области  $P_h$  построим функцию  $\psi^\delta(\mathbf{x})$ , которая принимает заданные значения на границах частиц  $D_i, D_j$  и границе канала  $R_{ij}$  и обращается в нуль

на границе  $\gamma$ . Вопрос состоит в возможности построения такой функции с дополнительным условием, что ее производные ограничены равномерно по  $\delta$ . Этот вопрос решается положительно в силу результатов работы [9, гл. 15].

Функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^{\pm 1} & \text{в } R_{ij}, \\ \psi^\delta & \text{в } P_h, \\ 0 & \text{вне } P_h \end{cases} \quad (5.1)$$

принадлежит множеству  $V_p$  и может использоваться в качестве пробной функции в (2.1). Для (5.1) запишем

$$\int_Q |\nabla \varphi|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (t_i - t_j)^2 C^{R_{ij}} + \int_{P_h} |\nabla \psi^\delta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

где  $C^{R_{ij}} = \int_{R_{ij}} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x}$ . При этом для интеграла в (5.2) выполнено неравенство

$$\int_{P_h} |\nabla \psi^\delta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq C < \infty, \quad (5.3)$$

где  $C$  не зависит от  $\delta$ .

**6. Асимптотическое экранирование. Аппроксимация непрерывной задачи дискретной задачей для экранирующих частиц.** Согласно [6] суть эффекта асимптотического экранирования заключается в отсутствии влияния других тел на взаимную емкость двух близких тел. При наличии эффекта экранирования для всех пар соседних частиц полученные уточненные двусторонние оценки для эффективной проводимости  $A$  смыкаются в асимптотическом (при  $\delta \rightarrow 0$ ) смысле, а главный член  $A$  выражается через решение сетевой задачи (3.1).

Выше было определено понятие соседей. Введем параметр паковки  $\delta = \max \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  — расстояние между  $i$ -й и  $j$ -й частицами; максимум берется только по соседним частицам). Псевдочастицы также включены в рассмотрение. Условие  $\delta \rightarrow 0$  означает сближение частиц друг с другом и приближение приграничных частиц к границе. Эту ситуацию назовем плотной паковкой частиц.

Согласно оценкам (4.14) и (5.2), (5.3) имеем

$$A \geq -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} (t_i - t_j)^2 + P^+ + P^-, \quad A \leq \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C^{R_{ij}} (t_i - t_j)^2 + \int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x}. \quad (6.1)$$

**Лемма 2.** *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)} (t_i - t_j)^2 = P^+ + P^-, \quad (6.2)$$

где  $\{t_i\}$  — решение задачи (3.1).

Доказательство аналогично приведенному в [3].

В силу (6.1), (6.2) имеем оценку

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)} \left[ -\frac{1}{2} \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} + 1 \right] (t_i - t_j)^2 \leq A \leq \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C^{S_{ij}} (t_i - t_j)^2 + \int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x}. \quad (6.3)$$



Пусть имеются две частицы  $D_i, D_j$  в  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим расстояние между ними через  $\delta$ . Выделим канал  $K$ , соединяющий частицы. Под каналом  $K$  понимается канал  $S_{ij}$  или  $R_{ij}$ .

**Лемма 3 (об экранировании).** Для описанных выше частиц при  $\delta \rightarrow 0$ :

1) энергия вне канала 
$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus (K \cup D_i \cup D_j)} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} \leq C < \infty, \text{ где } C \text{ не зависит от } \delta;$$

2) если для любых соседних частиц  $D_i$  и  $D_j$  выполняется условие 
$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus (D_i \cup D_j)} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} \rightarrow \infty \text{ при } \delta \rightarrow 0, \text{ то емкости } C_{ij}^{(2)}, C^{S_{ij}}, C^{R_{ij}} \text{ асимптотиче-}$$

ски эквивалентны:  $C_{ij}^{(2)} \sim C^{S_{ij}} \sim C^{R_{ij}}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем писать  $f \sim g$  при  $\delta \rightarrow 0$ , если  $f/g \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Положение частиц  $D_i$  и  $D_j$  не фиксировано, что создает некоторые технические трудности в получении оценок. Однако то, что частицы движутся к известному предельному положению (положению касания), существенно уменьшает эти трудности.

*Оценка энергии вне сферы  $|\mathbf{x}| = R$ .* Окружим две сближающиеся частицы  $D_i$  и  $D_j$  сферой радиуса  $R$ . Покажем, что энергия вне сферы ограничена равномерно по  $\delta$ . На сфере  $|\mathbf{x}| = R$  в силу принципа максимума  $|\varphi^{\pm 1}| \leq 1$  вне зависимости от положения частиц  $D_i$  и  $D_j$ . Запишем интеграл Пуассона [10]

$$\varphi^{\pm 1} = \frac{1}{4\pi R} \int_{|\mathbf{x}|=R} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (6.4)$$

где  $u(\mathbf{y}) = \varphi^{\pm 1}(\mathbf{y})$  — значение функции  $\varphi^{\pm 1}(\mathbf{y})$  на сфере  $|\mathbf{x}| = R$ . Из (6.4) следует, что  $|\varphi^{\pm 1}| \leq C/|\mathbf{x}|$  [10], где  $C$  не зависит от положений  $D_i$  и  $D_j$  при их сближении ( $D_i$  и  $D_j$  находятся в шаре  $|\mathbf{x}| \leq R$ ).

Дифференцируя (6.4) (можно дифференцировать под знаком интеграла при  $|\mathbf{x}| \geq R$ ), получаем, что при  $\rho \rightarrow \infty$

$$\int_{R \leq |\mathbf{x}|} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} \leq C_1 < \infty,$$

где  $C_1$  не зависит от  $\delta$ .

*Оценка энергии внутри сферы  $|\mathbf{x}| = R$ .* Рассмотрим множество  $M = \{|\mathbf{x}| \leq R\} \setminus (D_i \cup D_j \cup K)$  — шар  $\{|\mathbf{x}| \leq R\}$  без частиц  $D_i, D_j$  и канала  $K$ . Для области  $M$  применимы результаты [9, гл. 15], в силу которых модуль  $|\nabla \varphi^{\pm 1}(\mathbf{x})|$  ограничен величиной, не зависящей от положения  $D_i$  и  $D_j$  при их сближении. Следовательно, интеграл по  $M = \{|\mathbf{x}| \leq R\} \setminus (D_i \cup D_j \cup R_{ij})$  от  $|\nabla \varphi^{\pm 1}(\mathbf{x})|^2$  ограничен равномерно по  $\delta$ . Часть 1 леммы об экранировании доказана. Докажем теперь часть 2.

Асимптотическая эквивалентность  $C_{ij}^{(2)} \sim C^{R_{ij}}$  следует из равенства

$$C_{ij}^{(2)} = C^{R_{ij}} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (R_{ij} \cup D_i \cup D_j)} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} \leq C, \quad (6.5)$$

которое вытекает из определения величин  $C_{ij}^{(2)}$  и  $C^{R_{ij}}$  (как интегралов по  $\mathbb{R}^3 \setminus (D_i \cup D_j)$  и по  $R_{ij}$ ) и конечности интеграла по  $\mathbb{R}^3 \setminus (R_{ij} \cup D_i \cup D_j)$  (согласно части 1 леммы 3).

Если  $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus (D_i \cup D_j)} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то  $C^{R_{ij}} \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$  в силу ограниченности  $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus R_{ij}} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x}$  равномерно по  $\delta$  (см. часть 1 леммы 3). Разделив (6.5) на  $C^{R_{ij}}$ , получаем

$$\frac{C_{ij}^{(2)}}{C^{R_{ij}}} = 1 + \frac{1}{C^{R_{ij}}} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus R_{ij}} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x} \rightarrow 1 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Докажем, что  $C_{ij}^{(2)} \sim C^{S_{ij}}$ . Канал  $S_{ij}$  не является цилиндрическим. Его ширина отделена от нуля при всех положениях  $D_i$  и  $D_j$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Впишем в  $S_{ij}$  цилиндр  $\mathcal{S}$  и вычислим емкость  $C^{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} |\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 d\mathbf{x}$  относительно этого цилиндра  $\mathcal{S}$ . Имеют место соотношения

$$C^{\mathcal{S}} \leq C^{S_{ij}} \leq C_{ij}^{(2)}, \tag{6.6}$$

так как емкости  $C^{\mathcal{S}}$ ,  $C^{S_{ij}}$ ,  $C_{ij}^{(2)}$  получаются интегрированием функции  $|\nabla \varphi^{\pm 1}|^2 > 0$  по областям  $\mathcal{S} \subset S_{ij} \subset \mathbb{R}^3 \setminus (D_i \cup D_j)$ . Для цилиндрического канала  $\mathcal{S}$  утверждение части 2 леммы об экранировании доказано выше. В силу этого  $C^{\mathcal{S}} \sim C_{ij}^{(2)}$ , откуда с учетом (6.6) получаем, что  $C^{S_{ij}} \sim C_{ij}^{(2)}$ .

Для продолжения анализа задачи следует обратиться к физике рассматриваемого явления. Парные емкости частиц при  $\delta \rightarrow 0$  могут иметь разные порядки по  $\delta$  (это зависит от формы частиц). Потребуем, чтобы частицы были “односортными”, т. е. парные емкости частиц при  $\delta \rightarrow 0$  имели один порядок  $f(\delta)$ :  $m f(\delta) \leq C_{ij}^{(2)} \leq M f(\delta)$ , где  $m, M$  не зависят от  $\delta$ .

Определим энергию в дискретной сети как  $E = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)} (t_i - t_j)^2$ , где  $\{t_i\}$  — решение дискретной сетевой задачи (3.1).

**Лемма 4.** *Если при  $\delta \rightarrow 0$  емкости  $C_{ij}^{(2)}$  имеют один порядок  $f(\delta)$ , то  $E$  имеет тот же порядок  $f(\delta)$ .*

Доказательство аналогично приведенному в работе [3].

**Теорема.** *Пусть емкости  $C_{ij}^{(2)}$  имеют один порядок  $f(\delta) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$  для всех соседних частиц. Тогда эффективная проводимость  $A \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Главный член  $A$  при  $\delta \rightarrow 0$  выражается через  $\{t_i\}$  — решение дискретной сетевой задачи (3.1) в виде*

$$A \sim \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)} (t_i - t_j)^2. \tag{6.7}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу (6.3) имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)} \left[ -\frac{1}{2} \frac{(C_{ij}^{(2)})^2}{C^{S_{ij}}} + 1 \right] (t_i - t_j)^2 \leq A \leq \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C^{R_{ij}} (t_i - t_j)^2 + \int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x}, \tag{6.8}$$

где  $\{t_i\}$  — решение дискретной сетевой задачи, которое не зависит от  $\delta$ . Величина  $\int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x} < C < \infty$ , где  $C$  не зависит от  $\delta$  (см. (5.3)). Устремим  $\delta$  к нулю. По условию теоремы выполнено условие части 2 леммы об экранировании, следовательно,

$$C_{ij}^{(2)}/C^{S_{ij}} \rightarrow 1, \quad C^{R_{ij}}/C^{R_{ij}} \rightarrow 1. \quad (6.9)$$

В силу первого соотношения в (6.9) имеем  $-(1/2)C_{ij}^{(2)}/C^{S_{ij}} + 1 = (1/2)C_{ij}^{(2)} + O(\delta)$  ( $O(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ ). Из второго соотношения в (6.9) следует, что  $C^{R_{ij}} = C_{ij}^{(2)} + C_{ij}^{(2)}O(\delta)$ . Тогда (6.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j)^2 + 2 \max \|C_{ij}^{(2)}\| O(\delta) &\leq A \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j)^2 + 2 \max \|C_{ij}^{(2)}\| O(\delta) + \int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь использовано неравенство  $|t_i| \leq 1$  (см. лемму 1).

Разделив обе части (6.10) на  $E = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^N C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j)^2$ , получаем

$$1 + \frac{2\|C_{ij}^{(2)}\|}{E} O(\delta) \leq \frac{A}{E} \leq 1 + \frac{2\|C_{ij}^{(2)}\|}{E} O(\delta) + \frac{1}{E} \int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x}. \quad (6.11)$$

По условию теоремы  $C_{ij}^{(2)}$  имеют один порядок  $f(\delta) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . В силу леммы 4 величина  $E \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , а интеграл  $\int_{P_h} |\nabla \psi^\delta|^2 d\mathbf{x}$  ограничен равномерно по  $\delta$ . Тогда

правая и левая части (6.11) стремятся к единице при  $\delta \rightarrow 0$ , откуда следует (6.7).

**7. Обсуждение результатов.** Область применения полученных результатов представляется весьма обширной в связи с широким использованием сетевых моделей [11] и высококонтрастных композитов [2, 3]. Приведем основные выводы из полученных выше математических результатов.

*Эффект асимптотического экранирования.* И. Е. Тамм объясняет эффект асимптотического экранирования (не употребляя термина “асимптотический”) так: “... если размеры проводников будут велики по сравнению с расстоянием между ними ... пространство между обкладками конденсатора, если не полностью, то в значительной мере будет защищено самими обкладками от воздействия внешнего поля” [6, с. 53]. В трехмерном случае эффект экранирования может не иметь места. Условие его возникновения описано в лемме об экранировании. Физика явления представляется следующей. В случае неограниченного возрастания емкости при сближении частиц наблюдается эффект каналирования энергии (в силу части 1 леммы об экранировании возрастающая энергия сосредоточивается в узком канале между частицами). Поток в этом канале защищен от воздействия внешнего поля не телами, а своей большой величиной (ситуация больше напоминает эффект концентрации напряжений [12], чем классическое экранирование, где имеется защита тел экраном).

*Эффективная проводимость высококонтрастных композитов и эффект асимптотического экранирования.* При разработке технологий, в которых применяются высококонтрастные композиты, рассуждают обычно так: частицы высокопроводящие, расстояние между ними малы, следовательно, можно ожидать большого суммарного потока через композит. Это рассуждение в общем случае неверно, так как эффективная проводимость определяется не контрастностью, а парными емкостями. Для повышения эффективной проводимости необходимо увеличивать парные емкости частиц, которые определяются прежде всего геометрией частиц.

*Влияние размерности задачи.* Приведенные выше результаты верны для задач любой размерности. От размерности зависят только парные емкости, различие которых может вести к различию в свойствах композитов в зависимости от размерности задачи.

*Сетевые модели.* Конечномерная (сетевая) аппроксимация для непрерывных высококонтрастных задач возможна при наличии эффекта асимптотического экранирования для пар частиц. При отсутствии этого эффекта использование сетевых моделей, вообще говоря, неправомерно. Наличие эффекта экранирования проверяется путем вычисления парных емкостей частиц.

*Порядок парных проводимостей и форма частиц.* В рассмотренной задаче присутствует порядок парных емкостей  $f(\delta)$ . В частности, парные емкости определяют эффективную проводимость композита. Приведем значения парных емкостей в  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) для некоторых характерных случаев.

Рассмотрим вначале трехмерные пары.

1. Сфера — сфера. Парная емкость двух сфер радиуса  $R$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $\delta$ , равна  $4\pi \ln(\delta/R) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$  [5, 10].

2. Плоскость — конус. При образовании пары плоскость — конус (многогранный угол)  $f(\delta)$  ограничена при  $\delta \rightarrow 0$ . Условие экранирования не выполнено.

3. Для пары многогранник — многогранник в общем положении  $f(\delta)$  ограничена при  $\delta \rightarrow 0$ . Возможно образование пары грань — грань (плоский конденсатор), для которой  $f(\delta) \sim 1/\delta \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Возникновение пар грань — грань при случайной укладке частиц маловероятно.

4. Пара частиц, имеющих в области касания ( $a$  — характерный размер области) форму  $z = \pm r^4/2$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Эта функция более корректно моделирует относительно

плоские фрагменты частиц. Емкость  $C^{(2)} = \int_0^a \frac{r dr}{\delta + r^4} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \arctg \frac{a^2}{\delta} \sim \frac{\pi}{\delta} \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ ;

$C^{(2)}$  при  $\delta \rightarrow 0$  не зависит от  $a$ .

Рассмотрим теперь двумерные пары.

5. Диск — диск. Парная емкость двух дисков  $R$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $\delta$ , равна  $\pi\sqrt{R/\delta} \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$  [7]. Отсюда непосредственно следуют результаты работы [3].

6. Полу плоскость — угол. Парная емкость полу плоскости и угла, отстоящих друг от друга на расстоянии  $\delta$ , имеет порядок  $\ln \delta \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Отметим, что интеграл

$\int_0^\infty \frac{dx}{\delta + |x|}$  расходится, и этот случай не может быть исследован методами [3].

Сравним парную емкость диск — диск (помечена индексом д-д) и полу плоскость — угол (индекс п-у). В двумерном случае  $C_{д-д}^{(2)}/C_{п-у}^{(2)} \cong \delta^{-1/2}/\ln \delta \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , т. е. диски являются более эффективными наполнителями для повышения проводящих свойств композитов, чем многогранники (образующие в области сближения пару вида полу плоскость —

угол). В трехмерном случае различие еще более существенное (ср. случаи сфера — сфера и плоскость — конус). Отметим, что частицы, имеющие форму многогранников, широко используются в связи с дешевизной их получения путем дробления (обычно путем помола).

*Понятие емкости.* В данной работе изложение велось с ориентацией на задачу электростатики [6, 7]. Задача (1.1)–(1.5) описывает процессы электро- и теплопроводности и диффузии, где понятие емкости, как правило, не используется.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Лионс Ж.-Л.** Замечания по некоторым вычислительным аспектам метода гомогенизации в композитных материалах // Вычислительные методы в математике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1978. С. 5–19.
2. **Worcea L., Papanicolaou G.** Network approximation for transport properties of high contrast materials // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58, N 2. P. 501–539.
3. **Berlyand L. V., Kolpakov A. G.** Network approximation in the limit of small interparticle distance of the effective properties of a high contrast random dispersed composite // Arch. Rational Mech. Anal. 2001. N 3. P. 179–227.
4. **Maxwell J. C.** Treatise on electricity and magnetism. Oxford: Oxford Univ. Press, 1873. V. 1.
5. **Keller J. B.** Conductivity of a medium containing a dense array of perfectly conducting spheres or cylinders or nonconducting cylinders // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, N 4. P. 991–993.
6. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
7. **Смайт В.** Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
8. **Медведев Н. Н.** Метод Вороного — Делоне и исследование структуры некристаллических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
10. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
11. **Sahimi M.** Heterogeneous materials. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 2003.
12. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 2/II 2004 г.,  
в окончательном варианте — 25/X 2004 г.*

---