

УДК 533; 533.6

## **К задаче взаимодействия длинноволновых возмущений внешнего потока с ударной волной на клине\***

**И.С. Цырюльников, Т.В. Поплавская**

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: tsivan@itam.nsc.ru

Из общего аналитического решения невязкой задачи взаимодействия возмущений на клине с наклонной ударной волной получены соотношения для коэффициентов преобразования возмущений в пульсации давления для случая длинноволновых возмущений внешнего потока. Выполнено численное моделирование взаимодействия длинноволновых возмущений с ударной волной на пластине под углом атаки  $5^\circ \div 20^\circ$  для вязкого режима течения. Вычислены значения отклонений коэффициентов преобразования, полученных в численном моделировании для вязкого случая, от невязкого аналитического решения в приближении длинных волн, получены корректирующие поправки на вязко-невязкое взаимодействие в аналитическом решении.

**Ключевые слова:** гиперзвуковые течения, устойчивость, восприимчивость, акустические возмущения, ударная волна.

### **Введение**

Изучение восприимчивости пограничных слоев к возмущениям набегающего потока является необходимым при рассмотрении устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях летательных аппаратов. Под восприимчивостью обычно понимают механизм, посредством которого внешние возмущения проникают в пограничный слой и образуют неустойчивые волны [1]. Процесс восприимчивости недостаточно изучен, особенно при сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях потока, что затрудняет разработку метода предсказания ламинарно-турбулентного перехода [2].

В последнее время процессы восприимчивости и развития возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях моделей исследуются в высокоэнтальпийных аэродинамических трубах [3–14]. Достоинством таких установок является воспроизведение широкого диапазона параметров торможения. Однако для определения модового состава возмущений в потоке высокоэнтальпийных аэродинамических труб необходима разработка методов и устройств для разделения суммарного поля пульсаций внешнего сверхзвукового потока на различные моды (вихревую, энтропийную и акустическую). Эта задача требует

---

\* Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (проект АААА-А17-117030610126-4).

определения значений коэффициентов преобразования внешних возмущений в пульсации давления на поверхности моделей, расположенных в установках. Коэффициенты преобразования могут быть получены из решения задачи о взаимодействии возмущений с наклонной ударной волной (УВ), возникающей при обтекании тела сверхзвуковым потоком газа.

В работе [15] было выполнено численное моделирование задачи взаимодействия коротковолновых возмущений ( $\lambda \ll L$ , где  $\lambda$  — длина волны рассматриваемого возмущения,  $L$  — расстояние от передней до задней кромки модели по ее поверхности) с УВ на клине в вязкой постановке. Было показано, что существует диапазон углов распространения возмущений внешнего потока, при которых за УВ наблюдается практически полное отсутствие пульсаций давления на поверхности клина, что соответствует нулевым коэффициентам преобразования. Однако для задачи модовой декомпозиции требуется, чтобы все коэффициенты преобразования были ненулевыми, поскольку только в этом случае возможно однозначно определить тип и амплитуду возмущений во всем диапазоне углов распространения. Такое положение имеет место при наличии длинноволновых возмущений ( $\lambda \geq L$ ). Последнее позволяет определить тип и амплитуды возмущений во всем диапазоне углов распространения и, таким образом, получить решение задачи модовой декомпозиции. Коэффициенты преобразования внешних длинноволновых возмущений в течениях вязкого газа, представленные в виде аналитических зависимостей от угла наклона УВ, угла распространения возмущений и числа Маха набегающего потока впервые были получены в работе [16] как аппроксимация данных численного моделирования для ограниченного диапазона определяющих параметров.

Общее аналитическое решение задачи взаимодействия возмущений с наклонной УВ, но для невязкого случая, было получено в работе [17]. Это решение определено во всей области между УВ и поверхностью клина и дается в виде бесконечного набора слагаемых, что существенно усложняет его анализ для конкретных прикладных задач и использования для верификации данных численного моделирования. С учетом изложенного, в настоящей работе для случая длинноволновых возмущений внешнего потока (для которых отношение расстояния от передней кромки модели по продольной координате к длине волны возмущения  $x/\lambda \ll 1$ ) путем разложения по малому параметру  $x/\lambda$  общего решения невязкой задачи [17] получены простые соотношения для коэффициентов преобразования длинноволновых возмущений в пульсации давления.

Ниже приводится проведенное авторами численное моделирование взаимодействия длинноволновых возмущений с ударной волной на пластине под углом атаки для невязкого и вязкого режимов течения. Данные численного моделирования сравниваются с полученными в настоящей работе на базе общего решения невязкой задачи соотношениями для коэффициентов преобразования длинноволновых возмущений в пульсации давления с целью обоснования применимости выведенных формул для невязкого случая и получения корректирующих поправок на вязко-невязкое взаимодействие в рассматриваемой задаче.

### 1. Соотношения для коэффициентов преобразования длинноволновых возмущений в пульсации давления на базе общего решения невязкой задачи

В результате решения задачи о взаимодействии возмущений на клине с наклонной УВ в невязкой постановке в работе [17] было получено общее аналитическое решение для возмущений давления  $p'$ , определенное во всей области между УВ и поверхностью клина с углом раствора  $\theta$ . Это решение выведено в виде бесконечного набора слагаемых [17]:

$$p' = \frac{\gamma p_2}{2a_s} e^{i\omega \left( t - \frac{U_2 x_2}{U_2^2 - a_s^2} \right)} \sum_{v=0}^{\infty} \hat{k} \left\{ 2ia_v + \frac{U_2}{a_s} a_{v-1} - \frac{U_2}{a_s} a_{v+1} \right\} \text{ch}(v\theta_2) J_v(\hat{k}r),$$

здесь  $\hat{k} = \frac{\hat{\omega}}{\hat{\beta}^2}$ ,  $\hat{\beta}^2 = \frac{U_2^2 - a_s^2}{a_s^2}$ ,  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{a_s}$ ,  $r^2 = x_2^2 - \hat{\beta}^2 y_2^2$ ,  $\text{th } \theta_2 = \frac{\hat{\beta}^2 y_2}{x_2}$ , оси  $x_2$  и  $y_2$  направ-

лены соответственно параллельно и перпендикулярно поверхности клина,  $p_2$ ,  $U_2$  — давление и скорость за УВ, обезразмеренные на соответствующие значения в набегающем потоке,  $a_s$  — скорость звука за УВ, обезразмеренная на значение скорости набегающего потока,  $\omega$  — круговая частота, набор коэффициентов  $a_v$  вычисляется по рекуррентным соотношениям [17],  $J_v$  — функции Бесселя. В настоящей работе, как и в исследовании [17], индекс 2 относится к величинам за УВ, а индекс 1 — к величинам набегающего потока. Набегающий поток характеризуется скоростью  $U_1^*$ , числом Маха  $M$ , плотностью  $\rho_1^*$  и температурой  $T_1^*$  (индекс \* относится к размерным величинам). Вектор скорости записывается как  $U_1^*(u, v)$  по осям  $(x, y)$ , которые соответственно параллельны и перпендикулярны направлению невозмущенного внешнего потока. Поле плотности записывается как  $\rho_1^* \rho$ , давление — как  $\rho_1^* R^* T_1^* p$ , где  $R^*$  обозначает газовую константу. Далее в работе используются только безразмерные величины. Заметим, что поля скорости, плотности и давления включают также малые возмущения потока, т.е.  $u = \bar{u} + u'$ ,  $v = \bar{v} + v'$ ,  $p = \bar{p} + p'$ ,  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$  (параметры с чертой относятся к стационарному потоку, со штрихом — к возмущениям).

Пусть возмущения набегающего потока в виде плоских монохроматических волн с волновым вектором  $\mathbf{k}$  распространяются под углом  $\varphi$  относительно оси  $x$ . Эти возмущения набегающего потока могут быть разделены на три различных класса (см., например, [18]).

1. Акустические волны, которые характеризуются наличием возмущения давления ( $p'_1 \neq 0$ ) и возникающих возмущений скорости ( $U'_1 = p'_1/(\gamma M)$ ) и плотности ( $\rho'_1 = p'_1/\gamma$ ). При этом волны распространяются без изменения энтропии и не имеют завихренности.
2. Энтропийные волны, которые характеризуются наличием возмущений плотности ( $\rho'_1 \neq 0$ ) и отсутствием возмущений давления ( $p'_1 = 0$ ) и скорости ( $U'_1 = 0$ ).
3. Вихревые волны, которые характеризуются наличием возмущений скорости ( $U'_1 \neq 0$ ) и отсутствием возмущений давления ( $p'_1 = 0$ ) и плотности ( $\rho'_1 = 0$ ).

В случае длинноволновых возмущений условие  $\chi/\lambda \ll 1$  соответствует малым значениям параметра  $\hat{k}r$ , поскольку  $\hat{k}r = \frac{\omega}{a_s} \cdot \frac{a_s^2}{U_2^2 - a_s^2} x_2 = \frac{2\pi a_s}{U_2^2 - a_s^2} \cdot \frac{x_2}{\lambda} = \frac{2\pi}{a_s(M_2^2 - 1)} \cdot \frac{x_2}{\lambda}$ .

Путем разложения общего решения для  $p'$  по этому малому параметру  $\hat{k}r$  и при условии  $M_2 = U_2/a_s > 1$  ( $M_2$  — число Маха за УВ) получаем уравнение генерации возмущений давления за УВ в следующем виде:

$$p' = -e^{i\omega t} \frac{\gamma p_2}{2a_s} \cdot \frac{U_2}{a_s} \hat{k} a_1, \quad (1)$$

здесь

$$a_1 = 2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \left[ \left( B_1 - (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \right) R_0^{(2)} - A_1 R_0^{(3)} + \right. \\ \left. + A_1 (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \text{tg}(\beta - \theta) R_0^{(1)} \right], \quad (2)$$

$$\eta_1 = A_1 \text{tg}(\beta - \theta) (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + A_2 \bar{v}_1, \quad \eta_2 = \bar{v}_1 (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{A_3}{\eta_1} - (A_3 B_1 - A_1 B_3),$$

где величины  $A_n, B_n$  ( $n = 1, 2$ ) — функции, задаваемые следующими формулами [17]:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\rho_2} \right), \quad A_3 = \frac{a_s}{2\bar{u}_2},$$

$$B_1 = 1 + \frac{a_s^2}{(\gamma-1)\bar{u}_2^2}, \quad B_2 = \left( \frac{a_s^2}{(\gamma-1)\bar{u}_2^2} - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\rho_2} \right), \quad B_3 = -\frac{\gamma a_s}{(\gamma-1)\bar{u}_2},$$

$\bar{u}_1, \bar{u}_2$  — нормальные компоненты скорости стационарного потока перед и за УВ,  $\bar{v}_1$  — тангенциальная компонента скорости стационарного потока. Величины  $R_0^{(1)}, R_0^{(2)}, R_0^{(3)}$  связанные с возмущениями внешнего потока и не выписанные из-за краткости в [17], имеют следующий вид:

$$R_0^{(1)} = \frac{1}{\hat{k}} v_1',$$

$$R_0^{(2)} = \frac{1}{\hat{k}} \left\{ (A_1 + A_2) u_1' + A_2 \bar{u}_1 \rho_1' + \frac{p_1'}{2\gamma \bar{u}_1 M^2} \right\}, \quad (3)$$

$$R_0^{(3)} = \frac{1}{\hat{k}} \left\{ \left[ \frac{1}{\rho_2} (B_1 - 1) + \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} \right] u_1' + \left[ \frac{\bar{u}_1}{\rho_2} (B_1 - 1) - \frac{1}{(\gamma-1)\bar{u}_2 M^2} \right] \rho_1' + \frac{p_1'}{(\gamma-1)\bar{u}_2 M^2} \right\},$$

здесь  $u_1'$  и  $v_1'$  — нормальная и тангенциальная к УВ компоненты возмущений скорости,  $\rho_1'$  и  $p_1'$  — возмущения плотности и давления соответственно. Видно, что величины из соотношения (3) линейно зависят от амплитуд возмущений набегающего потока. Следовательно, можно представить коэффициент  $a_1$  в уравнении генерации давления за УВ (2) в виде линейной комбинации членов, пропорциональных нормальной и тангенциальной компонентам возмущений скорости, а также возмущениям давления и плотности:

$$a_1 = a_{1u} + a_{1v} + a_{1p\rho}, \quad (4)$$

где

$$a_{1u} = 2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} \left[ \left( B_1 - (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \right) (A_1 + A_2) - \right.$$

$$\left. - A_1 \left( \frac{1}{\rho_2} (B_1 - 1) + \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} \right) \right] u_1' = -2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} F_{1u} u_1',$$

$$a_{1v} = 2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} \left[ A_1 (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \operatorname{tg}(\beta - \theta) \right] v_1' = -2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} F_{1v} v_1', \quad (5)$$

$$a_{1p\rho} = 2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} \left\{ \left[ B_1 - (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \right] \left( A_2 \bar{u}_1 \rho_1' + \frac{p_1'}{2\gamma \bar{u}_1 M^2} \right) - \right.$$

$$\left. - A_1 \left[ \left( \frac{\bar{u}_1}{\rho_2} (B_1 - 1) - \frac{1}{(\gamma-1)\bar{u}_2 M^2} \right) \rho_1' + \frac{p_1'}{(\gamma-1)\bar{u}_2 M^2} \right] \right\}.$$

Рассмотрим первые два члена уравнения (4), отвечающие за возмущения скорости, которые распространяются под углом  $\tilde{\varphi}$  относительно оси  $x$ . Если нормальная и тангенциальная к УВ компоненты возмущений скорости  $u'_1$  и  $v'_1$  имеют вид

$$u'_1 = U'_1 \cos(\pi/2 - \beta - \tilde{\varphi}), \quad v'_1 = U'_1 \sin(\pi/2 - \beta - \tilde{\varphi}),$$

где  $U'_1$  — амплитуда пульсаций скорости набегающего потока,  $\beta$  — угол наклона УВ относительно оси направления потока, то коэффициенты  $a_{1u}$  и  $a_{1v}$  можно записать как

$$a_{1u} = -2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} F_{1u} U'_1 \cos(\pi/2 - \beta - \tilde{\varphi}), \quad a_{1v} = -2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} F_{1v} U'_1 \sin(\pi/2 - \beta - \tilde{\varphi}).$$

Используя известные тригонометрические соотношения, сумму коэффициентов  $a_{1u}$  и  $a_{1v}$  можно представить в виде

$$a_{1U} = a_{1u} + a_{1v} = -2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \frac{1}{\hat{k}} \sqrt{(F_{1v}^2 + F_{1u}^2)} U'_1 \cos(\pi/2 - \beta - \tilde{\varphi} - \zeta), \quad (6)$$

где  $\operatorname{tg}(\zeta) = \frac{F_{1v}}{F_{1u}} < 0$ . Обозначив  $\beta^* = \beta + \zeta$ , получим из (6)

$$a_{1U} = -2 \frac{a_s}{U_2 \eta_2} \cdot \frac{1}{\hat{k}} \sqrt{(F_{1v}^2 + F_{1u}^2)} U'_1 \cos(\pi/2 - \beta^* - \tilde{\varphi}). \quad (7)$$

Уравнение генерации возмущений давления за УВ (1) будет зависеть от угла распространения  $\varphi$  плоских волн соответствующего типа. В случае акустических волн, когда угол распространения быстрых акустических волн  $\varphi - \tilde{\varphi}$ , получим

$$\begin{aligned} p' &= e^{i\omega t} \frac{p_2}{a_s \eta_2} \left\{ \frac{1}{M} \sqrt{(F_{1v}^2 + F_{1u}^2)} \cos(\pi/2 - \beta^* - \varphi) - \right. \\ &- \left[ \left( B_1 - (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \right) \left( A_2 \bar{u}_1 + \frac{1}{2 \bar{u}_1 M^2} \right) + A_1 \left( \frac{\bar{u}_1}{\rho_2} (B_1 - 1) + \frac{1}{\bar{u}_2 M^2} \right) \right] \right\} p'_1 = \\ &= (C_2 \cos(\pi/2 - \beta^* - \varphi) + C_1) p'_1. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае медленных акустических волн  $\varphi = \tilde{\varphi} + \pi$ .

Для вихревых возмущений внешнего потока в силу ортогональности волнового вектора вектору пульсаций скорости [17] имеем

$$\begin{aligned} p'_v &= e^{i\omega t} \frac{\gamma p_2}{a_s \eta_2} \sqrt{(F_{1v}^2 + F_{1u}^2)} U'_1 \sin(\pi/2 - \beta^* - \varphi) = \\ &= \gamma C_2 \sin(\pi/2 - \beta^* - \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Для энтропийных возмущений внешнего потока зависимость от  $\varphi$  отсутствует:

$$\begin{aligned} p'_e &= e^{i\omega t} \frac{\gamma p_2}{a_s \eta_2} \left\{ A_1 \left[ \frac{\bar{u}_1}{\rho_2} (B_1 - 1) - \frac{1}{(\gamma - 1) \bar{u}_2 M^2} \right] - \right. \\ &- \left. \left[ \left( B_1 - (A_2 B_1 - A_1 B_2) \frac{\bar{v}_1}{\eta_1} \right) A_2 \bar{u}_1 \right] \right\} p'_1 = C_3 p'_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты преобразования возмущений набегающего потока в пульсации давления за УВ для акустических быстрых ( $g_{af} = p'^*/p_1'^*$ ), акустических медленных ( $g_{as}$ ), вихревых ( $g_v = U_1^* p'^*/(U_1'^* M \rho_1^* R^* T_1'^*)$ ) и энтропийных ( $g_e = p'^*/(\rho_1'^* R^* T_1'^*)$ ) возмущений имеют вид:

$$\begin{aligned} g_{af} &= C_1 + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta^* - \varphi\right), \\ g_{as} &= C_1 + C_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \beta^* - \varphi\right), \\ g_v &= \gamma C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta^* - \varphi\right), \quad g_e = C_3, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  — функции из уравнений (8)–(10).

В работе [19] рассматривалась задача о взаимодействии возмущений на клине с наклонной УВ с возмущениями внешнего потока в трехмерной невязкой постановке в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , было получено аналитическое решение для возмущений, имеющих  $z$ -компоненту волнового вектора. На основе [19], аналогично вышеприведенным разложениям, авторами получены соотношения для коэффициентов преобразования длинноволновых возмущений в пульсации давления. Эти соотношения включают члены, пропорциональные пульсациям давления  $p_1'$ , плотности  $\rho_1'$  и компонентам пульсаций скорости  $u_1'$  и  $v_1'$ , при этом влиянием  $z$ -компоненты пульсаций скорости в приближении длинных волн можно пренебречь. Для коэффициентов преобразования выполняются соотношения (11), в которых  $C_2$  заменяется на  $C_2 \sin(\psi)$ , где  $\psi$  — полярный угол распространения волн.

Зависимости коэффициентов преобразования длинноволновых возмущений в пульсации давления (11) получены для невязких течений. На практике требуется коррекция этих зависимостей на случай вязких течений. Ранее, в работе [16], было проведено численное моделирование задачи взаимодействия длинноволновых возмущений с УВ на клине при  $x/\lambda < 0,4$  для вязкого случая при вариации угла распространения и типа волн. Полученные в [16] аналитические зависимости коэффициентов преобразования от угла распространения внешних возмущений для вязкого случая подобны соотношениям (11) для невязких течений. Однако в [16] не проводились параметрические расчеты для получения зависимости значений функций  $C_i$  от чисел Рейнольдса и Маха.

## 2. Численное моделирование взаимодействия длинноволновых возмущений с ударной волной на пластине под углом атаки

В расчетном плане для двумерных плоских течений гиперзвуковое обтекание клина и пластины под углом атаки, равным углу раствора клина, эквивалентны. Поэтому в данном разделе рассматривается задача взаимодействия длинноволновых возмущений ( $\lambda \gg L$ , где  $\lambda$  — длина волны рассматриваемого возмущения,  $L$  — расстояние от передней до задней кромки модели по ее поверхности) с ударной волной на пластине под углом атаки  $\theta$ . Система координат в этом случае совпадает с системой координат раздела 1. Оси координат расчетной области совпадают с осями координат  $x_2, y_2$ , а параметром  $x$  обозначена продольная координата.

Численное моделирование обтекания модели возмущенным сверхзвуковым потоком воздуха проводилось с использованием пакета ANSYS Fluent с добавлением встроенных модулей для введения возмущений различных мод. Задача решалась в рамках

двухмерных уравнений Навье–Стокса с использованием решателя, основанного на плотности, явной схемы второго порядка точности по пространству с Roe-FDS методом расщепления конвективных потоков и явного метода Рунге–Кутты по времени. Для невязкого случая теплоемкость задавалась постоянной, для вязкого — как функция температуры. Вязкость рассчитывалась по формуле Сазерленда, теплопроводность — по формуле из кинетической теории газов.

Расчетная область представляет собой прямоугольник, часть нижней стороны которого совпадает с поверхностью пластины, где задается условие прилипания и постоянная температура поверхности пластины, равная 300 К. На правой границе и на нижней границе, не занятой поверхностью пластины, установлено условие истечения. Высота расчетной области выбиралась из условия, что головная ударная волна не взаимодействует с верхней границей расчетной области при всех рассматриваемых углах атаки.

Задача решалась в два этапа. Сначала проводился расчет стационарного течения. При этом на левой и верхней границах задавались условия набегающего потока (давление  $P_\infty$ , число Маха  $M_\infty$ , температура  $T_\infty$  и угол атаки  $\theta$ ). На втором этапе решалась задача о взаимодействии ударного слоя на пластине с внешними возмущениями, которые вводятся на левой и верхней границах расчетной области путем задания соответствующих зависящих от времени граничных условий с помощью модуля UDF, встраиваемого в расчетный код (см. описание в работах [7, 16]). Возмущения моделировались заданием суперпозиции стационарного течения и плоских монохроматических волн с задаваемой амплитудой  $A$  ( $A = 0,03P_\infty$ ), частотой  $f = 10 \div 1000$  кГц и углом распространения, равным углу атаки  $\theta$ . Расчетная область покрывалась равномерной прямоугольной сеткой. Общее число ячеек составляло не менее 520 000 и зависело от длины пластины, которая изменялась от 1 до 100 мм. Численное моделирование проводилось на кластере информационно-вычислительного центра (ИВЦ) Новосибирского государственного университета.

На рис. 1 приведены поля среднеквадратичных пульсаций давления на пластине длиной 100 мм при воздействии быстрой акустической волны для невязкого и вязкого типов течения. Видно, что углы наклона УВ в невязкой и вязкой задачах отличаются, но поля пульсаций давления для обоих случаев однородны за УВ. Исходя из этого, в настоящей работе коэффициенты преобразования возмущений определялись как отношение амплитуд пульсаций давления на поверхности пластины к амплитуде возмущения набегающего потока при равных значениях параметра  $x/\lambda$ :  $g_a = p'_w / p'_\infty$  — для акустических волн,  $g_e = p'_w / (p_\infty T'_\infty / T_\infty)$  — для энтропийных возмущений,  $g_v = p'_w / (p_\infty u'_\infty / c_\infty)$  — для вихревых возмущений.

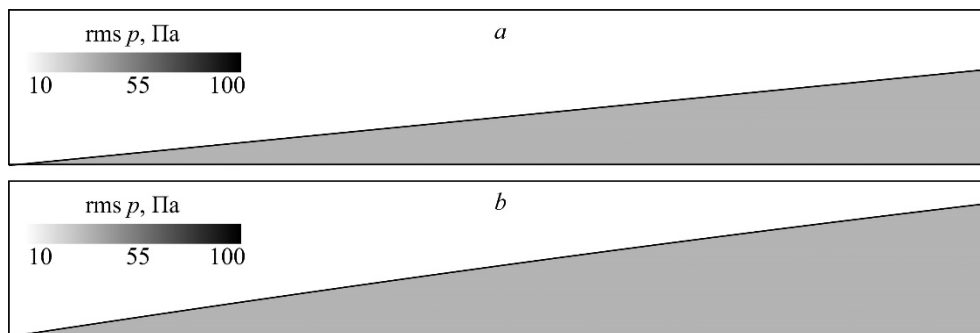


Рис. 1. Поле среднеквадратичных пульсаций давления на пластине длиной 100 мм при воздействии быстрой акустической волны ( $A = 0,03 P_\infty, f = 100$  кГц) при  $\theta = 10^\circ, M_\infty = 7,8, Re_1 = 4 \cdot 10^4 m^{-1}$ .  
 a — невязкий случай, b — вязкий случай.

### 3. Результаты и обсуждение

В представленной работе двумя способами получены коэффициенты преобразования длинноволновых возмущений за ударной волной в потоках, обтекающих пластину под углом атаки. Первый способ — по соотношениям (11), выведенным из общего аналитического решения невязкой задачи взаимодействия возмущений с УВ, второй — как результат численного моделирования обтекания пластины под углом атаки возмущенным сверхзвуковым потоком на основе решения двумерных уравнений Навье–Стокса. Проведены параметрические расчеты по влиянию числа Маха ( $M_\infty = 4,5 \div 8,9$ ), числа Рейнольдса ( $Re_L = 4 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^5$ ), вычисленного по параметрам набегающего потока и длине модели  $L$ , и угла атаки ( $\theta = 5^\circ \div 20^\circ$ ) на коэффициенты преобразования возмущений набегающего потока воздуха.

На рис. 2 показаны зависимости коэффициентов преобразования быстрой акустической волны от числа Маха в двух сечениях ( $x/\lambda = 0,2$  и  $x/\lambda = 0,37$ ), демонстрирующие увеличение значений этих коэффициентов с ростом числа Маха. Для сравнения на рисунке также приведены значения коэффициентов преобразования длинноволновых возмущений, полученные по соотношениям (11). Видно, что в исследуемом диапазоне чисел Маха ( $M_\infty = 4,5 \div 8,9$ ) коэффициенты преобразования ( $x/\lambda \leq 0,2$ ), полученные в численном моделировании для вязкого случая, практически совпадают с аналитическим решением (11) невязкой задачи для длинноволновых возмущений. С увеличением параметра  $x/\lambda$  до 0,37, отличие составляет не более 3 %. Аналогичные результаты получены и для других углов атаки.

На рис. 3 представлены коэффициенты преобразования быстрой акустической волны, полученные в численном моделировании для разных чисел Рейнольдса  $Re_L$ . При этом число Рейнольдса вычислялось по параметрам набегающего потока и длине модели  $L$  ( $L = 1 \div 100$  мм). Видно, что полученные коэффициенты преобразования длинноволновых возмущений для разных углов атаки практически совпадают с коэффициентами для невязкого случая при  $Re_L \geq 40000$ . При  $Re_L = 4000$  отличие значений коэффициентов преобразования от значений, полученных по невязкой теории взаимодействия, составило около 13 %. Вероятно, это связано с тем, что параметры обтекания в этом случае соответствуют режиму сильного вязко-невязкого взаимодействия.

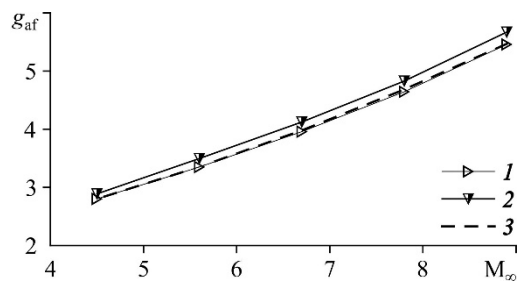


Рис. 2. Зависимости коэффициентов преобразования быстрой акустической волны от числа Маха для двух сечений.

Результаты численного моделирования в сечениях  $x/\lambda = 0,2$  (1),  $0,37$  (2) и данные, полученные по соотношениям (11) (3);  $\theta = 10^\circ$ ,  $P_\infty = 494,3$  Па,  $Re_L = 4 \cdot 10^4$ ,  $A = 0,03P_\infty$ ,  $f = 100$  кГц.

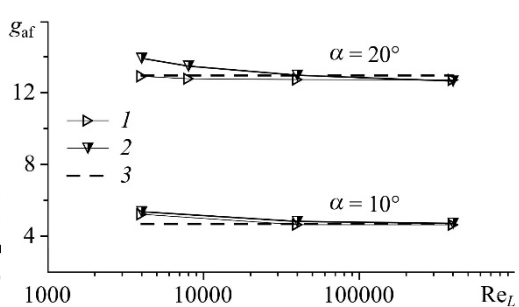


Рис. 3. Зависимости коэффициентов преобразования быстрой акустической волны от числа Рейнольдса для двух сечений.

Результаты численного моделирования в сечениях  $x/\lambda = 0,2$  (1),  $0,37$  (2) и данные, полученные по соотношениям (11) (3);  $P_\infty = 494,3$  Па,  $T_\infty = 97,8$  К,  $M_\infty = 7,8$ ,  $T_0 = 1200$  К,  $A = 0,03 \cdot P_\infty$ .



В работе получены отклонения  $\Delta g$  коэффициентов преобразования всех мод возмущений от значений, полученных по невязкой теории взаимодействия (см. соотношения (11)) в широком диапазоне определяющих параметров. Отклонения  $\Delta g$  определялись как разность значений коэффициентов преобразования, полученных в численном моделировании вязкого случая и по аналитическим формулам (11) для невязкого случая, отнесенная к значению, полученному по формуле (11) для соответствующей моды возмущения. На рис. 4 приведены значения отклонений для всех мод возмущений в диапазоне углов атаки  $\theta = 0^\circ \div 20^\circ$  и чисел Рейнольдса  $Re_L = 4000 \div 400000$  в зависимости от параметра вязко-невязкого взаимодействия  $\chi = M_c^3 / \sqrt{Re_x}$ . Здесь  $M_c$  — число Маха за УВ,  $Re_x$  — локальное число Рейнольдса, вычисленное по значению координаты  $x$  в сечении  $x/\lambda = 0,35$ . Параметр  $\chi$  введен для гиперзвуковых течений и характеризует долю вязкого пограничного слоя в течении за УВ [20, 21]. Если  $\chi$  значительно меньше единицы, то течение за УВ можно рассчитывать без учета вязких эффектов, т.е. как полностью невязкое. Если  $\chi$  больше единицы, то вязкие эффекты играют значительную роль в формировании течения за УВ. Поэтому гиперзвуковой параметр  $\chi$  называют параметром вязко-невязкого взаимодействия [20].

На рис. 4 видно, что в случае быстрой акустической волны до значения  $\chi = 2$  существенных отличий для коэффициента  $g_{af}$  от невязкого случая не наблюдаются, при  $\chi > 2$  отклонение увеличивается с ростом параметра вязко-невязкого взаимодействия и при  $\chi = 4$  достигает 25 %. Аналогичным образом себя ведет коэффициент преобразования  $g_e$ , достигая максимума отклонения от невязкого случая в 25 % уже при  $\chi = 2,5$ . Для коэффициентов преобразования  $g_v, g_{as}$  отклонения от невязкого случая до 15 % наблюдаются уже при  $\chi = 1$ . Это свидетельствует о том, что при значениях параметра  $\chi > 1$  для рассматриваемых режимов обтекания требуется учет вязко-невязкого взаимодействия. Поэтому далее была проведена корректировка коэффициентов преобразования всех мод в соотношениях (11) с целью использования их для вязких течений. Для этого к функциям  $C_i$  из соотношений (8)–(10) для невязких течений были добавлены корректировочные члены  $\delta C_i^{vis}$  (vis — вязкий) как функции от параметра  $\chi$ , полученные с помощью численного моделирования вязкой задачи:

$$C_i^{vis} = C_i(1 + \delta C_i^{vis}), \quad (12)$$

где  $\delta C_i^{vis}(\chi) = (C_i^{vis} - C_i) / C_i$  — безразмерные величины.

На рис. 5 приведены значения поправок  $\delta C_i^{vis}$  в зависимости от параметра вязко-невязкого взаимодействия  $\chi$ . Учет полученных корректировочных членов в аналитическом решении невязкой задачи для длинноволновых возмущений (11) снижает отклонения коэффициентов

Рис. 4. Отклонения коэффициентов преобразования всех мод возмущений от невязкой теории взаимодействия (соотношения (11)) в зависимости от параметра вязко-невязкого взаимодействия.

1, 2 — быстрые и медленные акустические волны соответственно, 3 — вихревая мода, 4 — энтропийная мода, кривые — аппроксимация соответствующих данных полиномом;  $\theta = 0 \div 20^\circ$ ,  $Re_L = 4 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^5$ ,  $M_\infty = 7,8$ .

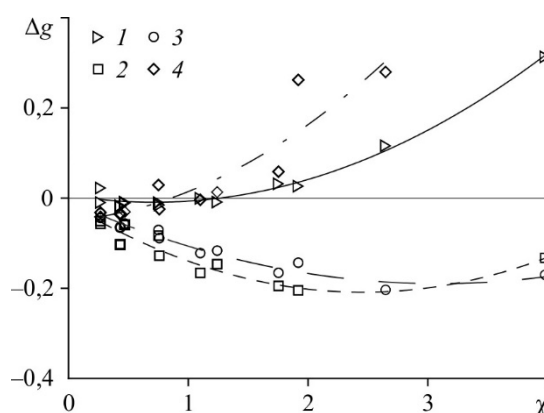
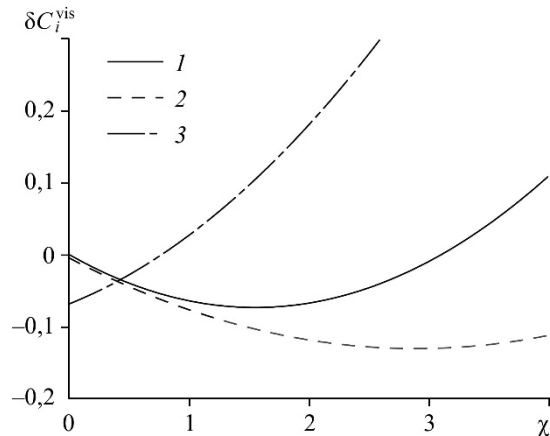


Рис. 5. Корректировочные члены уравнения (12) в зависимости от параметра вязко-невязкого взаимодействия  $\chi$ .  
 1 —  $\delta C_1^{\text{vis}}$ , 2 —  $\delta C_2^{\text{vis}}$ , 3 —  $\delta C_3^{\text{vis}}$ .



преобразования возмущений всех мод до 3 % в диапазоне чисел Маха от 4,5 до 8,9, чисел Рейнольдса от  $4 \cdot 10^3$  до  $4 \cdot 10^5$ , углов атаки от  $5^\circ$  до  $20^\circ$  и параметра вязко-невязкого взаимодействия  $\chi$  от 0 до 4. Такие корректировочные члены уравнения (12) позволяют использовать общее решение невязкой задачи в приближении длинных волн (11) для определения коэффициентов преобразования всех мод в вязких течениях в указанном диапазоне определяющих параметров.

### Заключение

Из общего аналитического решения невязкой задачи взаимодействия возмущений на клине с наклонной УВ [16] путем разложения по малому параметру  $x/\lambda$  получены аналитические зависимости для коэффициентов преобразования возмущений в пульсации давления для случая длинноволновых ( $x/\lambda \ll 1$ ) возмущений внешнего потока разного типа.

Выполнено численное моделирование взаимодействия длинноволновых возмущений с ударной волной на пластине под углом атаки для невязкого и вязкого режимов течения в широком диапазоне определяющих параметров ( $M_\infty = 4,5 \div 8,9$ ,  $Re_L = 4 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^5$ , углы атаки  $5^\circ \div 20^\circ$ ).

Вычислены значения отклонений коэффициентов преобразования, полученных в численном моделировании для вязкого случая, от значений, полученных для невязкого аналитического решения в приближении длинных волн ( $x/\lambda \ll 1$ ) для всех вариантов расчета в зависимости от гиперзвукового параметра взаимодействия  $\chi = M_\infty^3 / \sqrt{Re_x}$ . Показано, что с увеличением параметра вязко-невязкого взаимодействия отклонения коэффициентов преобразования всех мод возмущений, полученных по невязкой теории взаимодействия, от расчетных значений для вязкого случая увеличиваются до 30 %.

Получены корректирующие поправки на вязко-невязкое взаимодействие в аналитическом решении (11). Учет полученных корректировочных членов снижает отклонения коэффициентов преобразования возмущений всех мод до 3 % в рассматриваемом диапазоне определяющих параметров.

### Список литературы

1. Reshotko E. Boundary-layer stability and transition // Ann. Rev. Fluid Mech. 1976. Vol. 8. P. 311–349.
2. Бойко А.В., Кириловский С.В., Маслов А.А., Поплавская Т.В. Инженерное моделирование ламинарно-турбулентного перехода: достижения и проблемы (обзор) // Прикл. механика и технич. физика. 2015. Т. 56, № 5. С. 30–49.
3. Maslov A.A., Mironov S.G., Poplavskaya T.V., Shpiyuk A.N., Vetlutsky V.N. Viscous shock layer on a plate in hypersonic flow // European J. Mechanics B-Fluids 1999. Vol. 18, No. 2. P. 213–226.
4. Маслов А.А., Кудрявцев А.Н., Миронов С.Г., Поплавская Т.В., Цырюльников И.С. Численное моделирование восприимчивости гиперзвукового ударного слоя к акустическим возмущениям // Прикл. механика и технич. физика. 2007. Т. 48, № 3. С. 84–91.
5. Маслов А.А., Миронов С.Г., Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Цырюльников И.С. Управление возмущениями в гиперзвуковом ударном слое на пластине нестационарным воздействием с поверхности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. Т. 43, № 3. С. 152–161.

6. **Маслов А.А., Миронов С.Г., Поплавская Т.В., Цырюльников И.С.** Волновые процессы в ударном слое на пластине под углом атаки // Прикл. механика и технич. физика. 2010. Т. 51, № 4. С. 39–47.
7. **Кириловский С.В., Маслов А.А., Поплавская Т.В., Цырюльников И.С.** Влияние колебательной релаксации на развитие возмущений в ударном слое на пластине // Журнал техн. физики. 2015. Т. 85, № 5. С. 12–22.
8. **Кириловский С.В., Поплавская Т.В., Цырюльников И.С., Маслов А.А.** Развитие возмущений в ударном слое на пластине в потоке смеси колебательно-возбужденных газов // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 3. С. 433–442.
9. **Kirilovskiy S.V., Poplavskaya T.V., Tsyryulnikov I.S.** Numerical simulation of interaction of long-wave disturbances with a shock wave on a wedge for the problem of mode decomposition of supersonic flow oscillations // 18th Inter. Conf. on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR2016), Russia, Perm, 27 Jun.–3 Jul., 2016: AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1770, S. 1. P. 030040-1–030040-6.
10. **Tsyryulnikov I.S., Kirilovskiy S.V., Poplavskaya T.V.** Determination of the mode composition of long-wave disturbances in a supersonic flow in a hotshot wind tunnel // 18th Inter. Conf. on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR2016), Russia, Perm, 27 Jun.–3 Jul., 2016. AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1770, S. 1. P. 030018-1–030018-6.
11. **Tsyryulnikov I.S., Kirilovskiy S.V., Poplavskaya T.V.** Interaction of long-wave perturbations with a shock wave on a wedge and method of mode decomposition of supersonic flow pulsations // J. Phys. Conf. Ser. 2017. Vol. 894, No. 1. P. 012103-1–012103-7.
12. **Reshetova A.I., Poplavskaya T.V., Kirilovskiy S.V., Tsyryulnikov I.S.** Modeling of interaction of long-wave disturbances with a shock wave on a flat plate with allowance for real gas effects // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1128. P. 012026-1–012026-6.
13. **Kirilovskiy S.V., Poplavskaya T.V., Tsyryulnikov I.S.** Numerical simulation of interaction of long-wave disturbances with a shock wave on a wedge for the problem of mode decomposition of supersonic flow oscillations // Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Abactstr. Pt. II / Ed. V.M. Fomin. Perm, 2016. P. 98–99.
14. **Tsyryulnikov I.S., Kirilovskiy S.V., Poplavskaya T.V.** Determination of the mode composition of long-wave disturbances in a supersonic flow in a hotshot wind tunnel // Inter. Conf. on Methods of Aerophysical Research: Abactstr. Pt. II / Ed. V.M. Fomin. Perm: 2016. P. 211–212.
15. **Поплавская Т.В., Цырюльников И.С.** О взаимодействии коротковолновых акустических возмущений с ударной волной на клине в гиперзвуковом потоке // Уч. записки ЦАГИ. 2012. Т. XLIII, № 4. С. 30–38.
16. **Цырюльников И.С., Кириловский С.В., Поплавская Т.В.** Коэффициенты преобразования длинноволновых возмущений набегающего потока в пульсации давления на поверхности клина в сверхзвуковом потоке // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, вып. 21. С. 70–78.
17. **Duck P.W., Lasseigne D.G., Hussaini M.Y.** On the interaction between the shock wave attached to a wedge and freestream disturbances // Theor. Comp. Fluid Dyn. 1995. Vol. 7. P. 119–139.
18. **McKenzie J.F., Westphal K.O.** Interaction of linear waves with oblique shock waves // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11. P. 2350–2362.
19. **Duck P.W., Lasseigne D.G., Hussaini M.Y.** The effect of three-dimensional freestream disturbances on the supersonic flow past a wedge // ICASE report 97–26. No. 26. 27 p.
20. **Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.** Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М: Физматлит, 2004. 453 с.
21. **Anderson J.Jr.** Hypersonic and high-temperature gas dynamics. 2-nd edition. AIAA Education Series. Publisher AIAA. 2006. 813 p.

*Статья поступила в редакцию 3 августа 2020 г.,  
после доработки — 23 сентября 2020 г.,  
принята к публикации 7 октября 2020 г.*