

4. *Laschka B.* Interfering lifting surfaces in subsonic flow. — «Zeitschr. fur Flugwissenschaften», 1970, N 9/10.
5. *Giesing J. P., Kalman T. P., Rodden W. P.* Subsonic unsteady aerodynamics for general configurations. N. Y., AIAA Paper, 1972, N 26.
6. *Ganzer U.* Experimentelle Ergebnisse zum Nonweiler-Wellenreiter im Unterschall-Transschall und Überschallbereich. — «Zeitschr. fur Flugwissenschaften», 1973, N 5.
7. *Henderson W. P.* Subsonic aerodynamic characteristics of a highly swept fixed-wing configuration with variation in wing-dihedral angle. Washington, 1971 (NASA THX-2261).

УДК 532.516

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

О. А. Лихачев, В. Н. Штерн

(Новосибирск)

Автоколебания в вязкой жидкости существуют как промежуточный режим при переходе от параллельного ламинарного течения к турбулентному.

Представление о возникновении турбулентности как о последовательности сменяющих друг друга и все более усложняющихся ламинарных течений было развито Ландау [1]. Возбуждение новых степеней свободы при этом происходит вследствие потери устойчивости исходным, более простым режимом.

Периодические по однородным переменным автоколебания являются первым в этой последовательности режимом, сменяющим плоскопараллельный стационарный поток. Существование таких автоколебаний, как решений уравнений Навье — Стокса, ответвляющихся от стационарного решения, было доказано Юдовичем [2].

Ветвление происходит при числе Рейнольдса Re , соответствующих точкам нейтральной кривой по линейной теории устойчивости. Каждой такой точке отвечает определенный пространственный период и частота возникающих автоколебаний.

Исследование нелинейной устойчивости течения Пуазейля в плоском канале [3] показало, что при критическом числе Рейнольдса $Re_* = 5772$ (определяемом носиком нейтральной кривой) ответвляется автоколебательный режим, существующий при $Re < Re_*$. С другой стороны, энергетические оценки показывают [4], что при $Re < 50$ любое отклонение от плоскопараллельного режима будет со временем монотонно (по энергии) затухать, а экспериментальные данные свидетельствуют, что турбулентность реализуется лишь при $Re \geq 1000$. Таким образом, течение Пуазейля при малых числах Рейнольдса устойчиво к любым возмущениям сколь угодно большой начальной энергии (абсолютно устойчиво), при $Re > 5772$ неустойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям (абсолютно неустойчиво), метастабильно в определенном диапазоне чисел Рейнольдса ($1000 < Re < 5772$, т. е. устойчиво к возмущениям, энергия которых ниже пороговой, и неустойчиво к возмущениям с достаточно большой начальной энергией).

Автоколебания отвечают определенным конечным значениям энергии возмущений в области метастабильности параллельного течения и являются периодическими в среднем стационарными решениями уравнений Навье — Стокса. Но в этих условиях автоколебательные решения сами неустойчивы, и поэтому при достаточно больших возмущениях поток эволюционирует дальше, пока не устанавливается развитый турбулентный режим. Поскольку эта эволюция развертывается во времени, наблюдать ее экспериментально трудно.

В этом смысле от течения в канале выгодно отличается течение в пограничном слое, где переход к турбулентности развернут пространственно вниз по течению и можно последовательно проследить все этапы.

Опытные данные свидетельствуют [5], что при обтекании плоской пластинки течение Блазиуса сменяется вниз по потоку (при $Re > Re_*$ по линейной теории) автоколебательным режимом (волны Толлмина — Шлихтинга). Ампли-

туда автоколебаний постепенно нарастает, и при числах Рейнольдса, почти на порядок превосходящих Re_* , происходит резкий переход к турбулентному режиму течения.

Наиболее четко автоколебательный режим наблюдался в опытах Шубауэра и Скремстеда [6], где колебания инициировались вибрирующими полосками. Автоколебания прослеживаются и при «естественном» переходе на плоской пластинке в условиях слабой внешней турбулентности, как об этом свидетельствуют экспериментальные исследования [7, 8]. Частотный анализ пульсационного движения показал, что на фоне сравнительно однородного распределения энергии по частотам в исходном шуме вниз по течению начинают возрастать интенсивности для частот из диапазона, отвечающего внутренней области кривой нейтральной устойчивости. Интенсивность на этих частотах в несколько раз превосходит среднюю интенсивность внешнего шума, а сам диапазон выделенных частот меняется, подстраиваясь под нейтральную кривую. Эти данные свидетельствуют о существовании устойчивых в определенном диапазоне чисел Рейнольдса, самонастраивающихся колебаний. В рамках плоскопараллельного подхода амплитуда и частота устанавливаются в результате нелинейного взаимодействия.

Теоретическому анализу условий возникновения и характера этих автоколебаний при течении в пограничном слое с наложенным градиентом давления и посвящена данная работа.

1. Рассмотрим течение около клина. Скорость потенциального течения у поверхности клина пропорциональна степени расстояния от вершины

$$U_\infty = Cx^m.$$

В этом случае уравнения пограничного слоя для вязкой несжимаемой жидкости допускают автомодельные решения [5] для функции тока

$$\Phi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \nu x U_\infty \psi_0(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U_\infty}{\nu x}},$$

где x и y — соответственно продольная и поперечная координаты; ν — коэффициент кинематической вязкости; $m = \frac{x}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx}$ — формпараметр течения, однозначно связанный с углом раствора клина. Значения $m > 0$ отвечают положительному углу раствора клина, градиент давления при этом отрицателен. Значения $m < 0$ отвечают течению в диффузоре, градиент давления при этом положителен, и при $m = -0,0904$ происходит отрыв пограничного слоя.

Функция $\psi_0(\eta)$ является решением уравнения Фокнера—Скэн

$$\psi_0'' + \psi_0 \psi_0' + \frac{2m}{m+1} (1 - \psi_0^2) = 0;$$

$$\psi_0 = \psi_0' = 0 \text{ при } \eta = 0; \quad \psi_0 = 1 \text{ при } \eta = \infty.$$

Если x -компоненту скорости отнести к ее значению на внешней границе пограничного слоя, то профиль скорости дается выражением $U(\eta) = \psi_0'$, штрих обозначает дифференцирование.

Анализ возмущений стационарного течения проводится в рамках плоскопараллельного приближения. Это значит, что при каждом числе Рейнольдса, определяемом как $Re = \frac{U_\infty \delta_*}{\nu}$ (где δ_* — толщина вытеснения), течение аппроксимируется одномерным параллельным потоком с профилем скорости $U(y)$. Поперечная компонента скорости полагается равной

нулю. В рамках этого приближения функция тока возмущенного движения удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x}$$

(Δ — оператор Лапласа) с граничными условиями прилипания на стенке и требованием минимального роста при $y \rightarrow \infty$. Использование плоскопараллельного приближения вносит определенную погрешность при анализе возникновения автоколебаний. Однако можно надеяться, что плоскопараллельное приближение позволит качественно верно описать ответвление автоколебательных решений.

Линеаризованное уравнение (1.1) имеет спектр периодических по x и t решений, даваемый нейтральной кривой. Следуя [3], выберем произвольную точку на нейтральной кривой, соответствующую числу Рейнольдса Re_0 , дадим числу Рейнольдса приращение

$$\text{Re} = \text{Re}_0 + \varepsilon^2 f, \quad f = \pm 1$$

и будем искать решение (1.1) в виде ряда по малому параметру ε :

$$(1.2) \quad \psi = \frac{1}{\text{Re}} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(x - ct, y); \quad \text{Re } c = \text{Re}_0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon^k.$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и приравнявая нулю коэффициенты при ε^k , получим цепочку уравнений

$$(1.3) \quad \Delta \Delta \psi_k - \text{Re}_0 \left[(U - c_0) \frac{\partial \Delta \psi_k}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right] = f \left[U \frac{\partial \Delta \psi_{k-2}}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi_{k-2}}{\partial x} \right] + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\left(\frac{\partial \psi_{k-j}}{\partial y} - \text{Re}_0 c_{k-j} \right) \frac{\partial \Delta \psi_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{k-j}}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_j}{\partial y} \right].$$

При $k=1$ член в разложении (1.2) имеет вид

$$\psi_1(x - ct, y) = \beta \{ \varphi(y) \exp[i\alpha(x - ct)] + \bar{\varphi}(y) \exp[-i\alpha(x - ct)] \}$$

(черта означает комплексное сопряжение), где комплексная амплитуда $\varphi(y)$ является решением уравнения Орра—Зоммерфельда

$$(1.4) \quad L_\alpha \varphi \equiv \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi - i\alpha \text{Re}[(U - c_0)(\varphi' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi] = 0$$

с граничными условиями $\varphi = \varphi' = 0$ при $y=0$ и требованием убывания $\varphi(y)$ на бесконечности.

Можно убедиться в том, что затухание $\varphi(y)$ при $y \rightarrow \infty$ будет иметь экспоненциальный характер. Действительно, при достаточно больших y можно принять $U''=0$; $U=1$. Тогда (1.4) становится уравнением с постоянными коэффициентами, и его решения, затухающие при $y \rightarrow \infty$, имеют вид

$$(1.5) \quad \varphi = C_1 \exp(-\alpha y) + C_2 \exp(-\gamma y),$$

где

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_e; \quad \gamma_r = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad \gamma_e = \frac{b}{2\gamma_r}, \\ a = \alpha^2, \quad b = \alpha \text{Re}_0(1 - c_0).$$

Экспоненциальный характер (1.5) затухания $\varphi(y)$ может быть отражен в виде граничных условий

$$(1.6) \quad \begin{aligned} (\varphi'' - \alpha^2 \varphi)' + \gamma(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) &= 0; \\ (\varphi'' - \gamma^2 \varphi)' + \alpha(\varphi'' - \gamma^2 \varphi) &= 0, \quad y = A, \end{aligned}$$

которые следует поставить при достаточно больших y . При численном расчете задачи рассматривалась конечная область значений $0 < y < A$. При $y = A$ ставились граничные условия (1.6). Расчеты проводились при возрастающих значениях A до тех пор, пока результаты не переставали меняться. Так, при удвоении A от 5 до 10 заметного расхождения обнаружено не было.

При $k=2$ член в разложении (1.2) для функции тока имеет вид

$$\psi_2 = \beta^2 \{V_0(y) + V_1(y) \exp [2i\alpha(x-ct)] + \bar{V}_1(y) \exp [-2i\alpha(x-ct)]\}.$$

Функция $V_1(y)$ должна удовлетворять краевой задаче (1.4) при замене α на 2α и введении неоднородности:

$$L_{2z} V_1 = i\alpha(\varphi'^2 - \varphi\varphi'').$$

Функция $V_0(y)$ подчиняется уравнению $V_0'' = i\alpha(\bar{\varphi}\varphi' - \varphi\bar{\varphi}')$ и условиям $V_0 = V_0' = 0$ при $y=0$. Заметим, что функция $V_0(y)$ линейно растет при $y \rightarrow \infty$, хотя правая часть уравнения экспоненциально затухает. Но функция тока для исходного течения ψ_0 также линейно растет, поэтому отношение возмущенной функции тока к ψ_0 будет оставаться малым. При этом производные $\psi_2(x, y, t)$, которые дают вклад в поле пульсационных скоростей, остаются конечными. Условие разрешимости (1.3) при $k > 1$ является равенство нулю c_k при нечетных k .

Из (1.3) следует, что ψ_3 будет суммой гармонических колебаний с волновыми числами α и 3α . Условие разрешимости уравнения для амплитуды первой гармоники будет иметь вид

$$(1.7) \quad -c_2 \operatorname{Re}_0 I_1 + \beta^2 I_2 + f I_3 = 0;$$

$$I_1 = \int_0^\infty \theta(y) (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) dy; \quad I_2 = \int_0^\infty \theta(y) [V_0'(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) -$$

$$- V_1'(\bar{\varphi}'' - \alpha^2 \bar{\varphi}) - 2V_1(\bar{\varphi}''' - \alpha^2 \bar{\varphi}') - \varphi V_0'' +$$

$$+ 2\bar{\varphi}'(V_1' - 4\alpha^2 V_1) + \bar{\varphi}(V_1''' - 4\alpha^2 V_1')] dy;$$

$$I_3 = \int_0^\infty \theta(y) [U(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''\varphi] dy.$$

Здесь $\theta(y)$ — решение задачи, сопряженной (1.4). Интегрирование ведется по бесконечной области, но интегралы сходятся в силу экспоненциального затухания подынтегральных функций. В (1.7) знак выбирается так, чтобы выполнялось требование $\beta^2 > 0$.

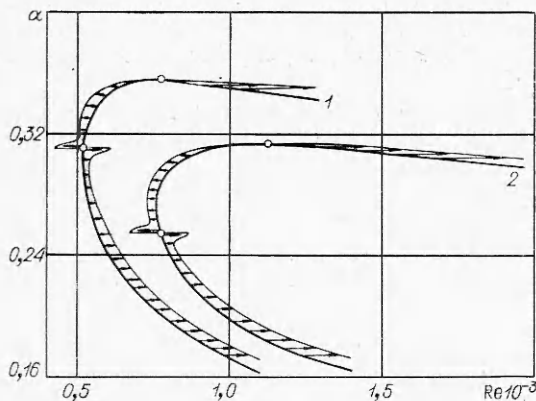
2. Численные расчеты проводились с использованием метода дифференциальной прогонки со стыковкой [9]. На фиг. 1 нанесена кривая I нейтральной устойчивости для течения Блазиуса ($m=0$). Стрелками указано, где существуют автоколебательные режимы, длина стрелок качественно соответствует величине $\partial E / \partial \operatorname{Re}$, а их направление — знаку этой производной. Здесь E — энергия автоколебаний, и на нейтральной кривой

$$\frac{\partial E}{\partial \operatorname{Re}} = f\beta^2 \int_0^\infty (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dy.$$

На нижней ветви нейтральной кривой $\partial E/\partial Re > 0$, т. е. автоколебания существуют при числах Рейнольдса, больших Re_0 , в области неустойчивости исходного течения. На верхней ветви автоколебания ответвляются в область вне нейтральной кривой, там, где исходный поток устойчив. Смена знака $\partial E/\partial Re$, которая проходит в точке $\alpha = 0,356$, $Re = 774$ через нуль, не имеет принципиального значения, а связана с изменением ориентации области устойчивости относительно нейтральной кривой.

Критическим числом Рейнольдса для течения Блазиуса является $Re_* = 519$ при $\alpha_* = 0,304$. Несколько выше этой точки на нейтральной кривой при $\alpha = 0,31$ $\partial E/\partial Re$ обращается в бесконечность и меняет знак. Это соответствует смене режима возникновения автоколебаний. Важно отметить, что на носике нейтральной кривой $\partial E/\partial Re > 0$, т. е. автоколебания ответвляются в сторону больших чисел Рейнольдса и являются устойчивыми.

Характер ветвления на носике нейтральной кривой имеет принципиальное значение. Если возбуждение жесткое, т. е. автоколебания ответвляются в область меньших значений Re , то при числах Рейнольдса, меньших критического по линейной теории, течение метастабильно. В этом случае существует нелинейное критическое число Рейнольдса, меньшее, чем Re_* линейное, при котором впервые могут возникнуть сразу конечные по амплитуде автоколебания (или турбулентность). Эту ситуацию отражает кривая 1 на фиг. 2.



Фиг. 2

Фиг. 1.

Если возбуждение мягкое, т. е. $\partial E/\partial Re > 0$, то при малых амплитудах возмущений существует устойчивый автоколебательный режим, который можно наблюдать экспериментально. Наиболее типичной ситуации в этом случае отвечает кривая 3 на фиг. 2. Но может реализоваться и случай, описываемый кривой 2. Если нанести семейство прямых линий, отвечающих значениям производной $\partial E/\partial Re$ в точках нейтральной кривой, то при малых амплитудах кривая 2 будет огибающей этого семейства. Тогда в небольшом диапазоне $Re > Re_*$ существуют устойчивые малые автоколебания, но они, как и исходное течение, являются метастабильными. Нелинейное критическое число Рейнольдса при этом может быть меньше Re_* .

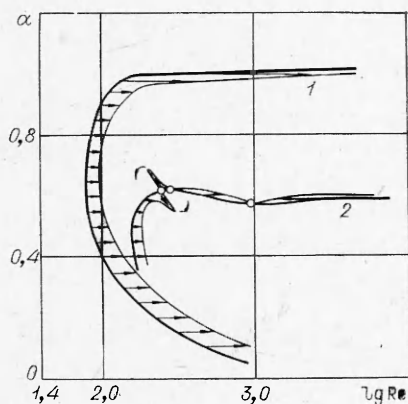
Такой случай наиболее вероятен, когда точка смены знака $\partial E/\partial Re$ близка к критической на нейтральной кривой и лежит несколько выше ее, как это и реализуется для течения Блазиуса. Можно предположить, что здесь имеет место ситуация, описываемая кривой 2 на фиг. 2, причем критические значения энергии возмущений невелики.

То, что течение Блазиуса является пограничным случаем в смысле жесткого или мягкого характера возбуждения колебаний, показывает сопоставление его с градиентными течениями. На фиг. 1 кривой 2 представлен случай отрицательного градиента давления при $m=0,0192$. Критическими параметрами являются $\alpha_*=0,272$, $Re_*=759$, а точка полюса для $\partial E/\partial Re$ расположена при $\alpha=0,254$, $Re=778$. Таким образом, носик нейтральной кривой лежит в зоне жесткого возбуждения.

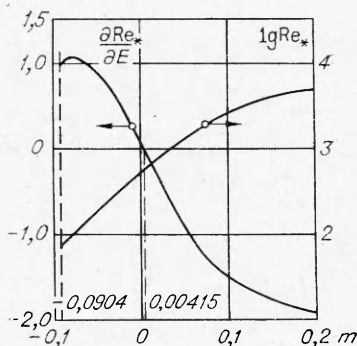
При положительном градиенте ситуация обратная. На фиг. 3 кривым 1, 2 соответствуют значения $m=-0,0882$ и $-0,0602$. С увеличением градиента точка полюса $\partial E/\partial Re$ смещается по верхней ветви в сторону больших Re и, наконец, при m , близких к отрывному значению, исчезает, слившись с корнем $\partial E/\partial Re$. При $m=-0,0882$ возбуждение мягкое на всей нейтральной кривой ($Re_*=78,4$; $\alpha_*=0,662$).

На фиг. 4 нанесена $\partial Re_*/\partial E$ в точке носика нейтральной кривой как функция m . Жесткий характер возбуждения реализуется для отрицательных градиентов давления при $m > 0,00415$.

Интересно отметить, что жесткий характер возбуждения усиливается с увеличением критического числа Рейнольдса (см. фиг. 4). Это свидетель-



Фиг. 3



Фиг. 4

ствует о том, что нелинейное критическое число Рейнольдса более консервативно по отношению к изменениям внешних параметров, чем линейное. Увеличение Re_* связано с большей заполненностью профиля скорости. Как и в случае гартмановского пограничного слоя или асимптотического профиля скорости при отсосе, это приводит, с одной стороны, к возможности затянуть ламинарный режим до больших чисел Рейнольдса, а с другой—к взрывообразному возбуждению турбулентного режима при достаточно больших возмущениях.

При наложении положительного градиента давления критические числа Рейнольдса значительно снижаются, но характер возбуждения автоколебаний становится мягким. Ситуация здесь весьма сходная со случаем свободной конвекции. После потери устойчивости исходным течением развивается вторичный ламинарный колебательный режим. Такого рода колебания часто наблюдаются за плохообтекаемыми телами. Они предшествуют появлению дорожек Кармана и развитию турбулентности.

Таким образом, проведенный анализ возбуждения автоколебаний вполне согласуется с наблюдаемыми в экспериментах явлениями.

Авторы выражают благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 27 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. — «Докл. АН СССР», 1944, т. 44, № 8.
2. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
3. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. — «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4.
4. Joseph D. D., Carmi S. Stability of poiseuille flow in pipes, annuli and channels. — «Quart. Appl. Math.», 1969, vol. 26, N 4.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.
6. Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate. NACA Tech. Rept. N 909.
7. Голов В. К., Поляков Н. Ф., Тимофеев В. А. Исследование перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при малых дозвуковых скоростях. — В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, 1972, вып. 2.
8. Поляков Н. Ф. Исследование частотных спектров возмущений в ламинарном пограничном слое и области перехода. — В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, 1973, вып. 3.
9. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости. — ПМТФ, 1970, № 2.

УДК 532.516

СПЕКТР МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

О. А. Лихачев

(Новосибирск)

В последнее время проведен тщательный анализ спектра малых возмущений ряда течений [1—3]. В то же время для пограничного слоя исследования в рамках линейной теории возмущений ограничивались окрестностью нейтральной кривой, хотя спектральный анализ представляет несомненный интерес не только для нахождения критерия устойчивости ламинарного потока, но и для решения задачи с начальными данными о развитии во времени произвольного малого возмущения. В частности, возможность представления произвольного возмущения через систему базисных функций связана с вопросом полноты системы. Ясно, что конечная система базисных функций не может быть полной. В работе [4] доказана конечность и получена оценка области существования собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя, и на этом основании сделан вывод о конечности спектра малых возмущений для течения в пограничном слое. Довольно полный обзор по исследованию нейтральной устойчивости ламинарного пограничного слоя можно найти в монографии [5].

В данной работе методами линейной теории гидродинамической устойчивости получен спектр малых возмущений течения в пограничном слое с использованием полных граничных условий на внешней границе. Показано, что спектр малых возмущений конечен для каждого фиксированного значения волнового числа α . Исследованы особенности поведения спектра при достаточно малых α .

При исследовании устойчивости пограничного слоя обычно принимается, что на внешней границе потока возмущение затухает как решение невязкой задачи

$$\varphi \sim e^{-\alpha y}.$$