

## СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЕТОНАЦИИ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ СЖАТИЯ

А. Т. Берлянд, В. В. Власенко, С. В. Свищев

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского,  
140160 Жуковский Московской обл.

Представлены результаты численного моделирования структуры течений с наклонными детонационными волнами, которые возникают при обтекании двумерных поверхностей сжатия (клин, конус) сверхзвуковым потоком однородно перемешанной смеси водорода с воздухом. В первой серии расчетов внутренняя структура фронта детонации не разрешена, но физические процессы в остальной области течения моделировались с учетом неравновесных химических реакций. Получена сложная волновая структура такого течения, и исследована зависимость этой структуры от параметров задачи. Во второй серии расчетов получены нестационарные волновые структуры во фронте детонации. Проведено сопоставление этих нестационарных волн со структурой головы спина в нестационарной спиновой детонации.

### ВВЕДЕНИЕ

В конце 50-х годов необходимость расширения диапазона работы воздушно-реактивных двигателей в направлении увеличения скорости набегающего потока привела к созданию концепции двигателя со сверхзвуковым горением [1, 2]. В нашей стране первые принципиальные работы по созданию таких двигателей принадлежат Е. С. Щетинкову [3]. В то время наиболее изученным режимом сверхзвукового горения являлась детонация. Однако стремление уменьшить потери в тракте двигателя заставило исследователей обратиться к тогда еще совсем не изученному диффузионному режиму сверхзвукового горения (первые экспериментальные работы по сверхзвуковому горению в канале появились в литературе в начале 70-х годов [4]). Тем не менее очевидно, что детонационный режим горения наряду с явными недостатками имеет и определенные преимущества по сравнению с диффузионным. В любом случае в реальных устройствах с горением в сверхзвуковом потоке наличие большого числа скачков уплотнения приведет к смешанному механизму теплоподвода. В связи с этим попытки анализа возможностей использования детонации в качестве рабочего процесса в двигателях продолжают и по сей день [5].

Наряду с техническими аспектами использования детонационного горения, приблизительно в те же годы наблюдалось очередное обострение интереса специалистов по газоди-

намике горения к исследованию детонационных волн, вызванное развернувшейся в литературе дискуссией о пространственной нестационарной структуре детонационного фронта [6–8], исследования которой впоследствии велись уже с использованием более тонких современных экспериментальных и вычислительных методов. Очевидно, что результаты этих исследований должны были иметь прямое отношение к попыткам стабилизации горения в сверхзвуковом потоке и анализу возможностей и целесообразности реализации различных технических устройств с детонационным горением [9].

На начальном этапе исследование детонационных волн проводилось на основе модели Зельдовича — Неймана — Дёринга (ЗНД-модель), которая сводится к предположению, что детонационная волна состоит из ударного фронта и следующей за ним одномерной зоны тепловыделения, между которыми имеет место сильное взаимодействие [10–12]. Если добавить к ЗНД-модели предположения о том, что, как и для ударных волн, при переходе через косую детонационную волну сохраняется тангенциальная составляющая скорости, что область тепловыделения состоит из бесконечно тонкого фронта реакции, в котором физико-химические процессы протекают бесконечно быстро и до конца (до равновесных значений всех параметров), и, наконец, если пренебречь вязкостью газа, то в рамках этих предположений косой детонационной волне соответствует автомодель-

ное решение. Анализ параметров такой волны с использованием обобщенной адиабаты Гюгонио показывает, что ее наклон превышает угол соответствующей ударной волны на конечную величину, зависящую от тепловыделения [13].

Несмотря на то, что ЗНД-модель до сих пор используется для приближенной оценки интегральных параметров процесса, которые определяются условиями сохранения в направлении, перпендикулярном фронту детонационной волны (см., например, [5]), установлено, что внутренняя структура фронта детонационной волны значительно сложнее. При учете конечности толщины зоны тепловыделения ЗНД-структура оказывается неустойчивой [6], и в экспериментальных работах группы исследователей из Новосибирска была получена сложная структура фронта детонационной волны с нестационарными поперечными волнами [8]. Много позже с развитием высокопроизводительных ЭВМ аналогичные структуры были получены при численном моделировании нестационарного течения с детонационной волной (при задании нестационарных возмущений в граничных условиях) (см., например, [14]).

Однако теорию фронта детонационной волны нельзя считать завершенной, поскольку до сих пор остается неясным, каким образом, под воздействием каких факторов и в какой последовательности формируется столь сложная регулярная структура детонационной волны. Возможно, здесь проявляются более общие законы динамики нелинейных систем. Очевидно только то, что течение в косой детонационной волне не может описываться автомодельным решением, поскольку в задаче с конечными скоростями химических реакций появляется дополнительный характерный линейный размер — длина периода индукции, который зависит от термодинамических параметров течения и физико-химических свойств смеси, хотя граничные условия при этом могут оставаться автомодельными.

В настоящей работе приводятся результаты численного исследования наклонных детонационных волн с учетом конечной скорости химических реакций. Использовался комплекс программ «SOLVER3», который предназначен для численного моделирования двумерных нестационарных и стационарных течений многокомпонентного газа с неравновесными химическими реакциями и позволяет рассматривать различные физические модели: мо-

дель невязкого газа (система уравнений Эйлера), модель ламинарного течения вязкого газа (система уравнений Навье — Стокса при числах Рейнольдса, меньших критического значения), модель турбулентного течения (осредненная по Фавру система уравнений Навье — Стокса, замкнутая полумпирической моделью турбулентности). Во всех расчетах рассматривалось горение предварительно перемешанной стехиометрической смеси водорода с воздухом; применялась кинетическая схема Моретти, включающая восемь реакций между семью компонентами [15]. Стационарные течения моделировались на базе нестационарной системы уравнений методом установления. Численный метод (см. [16]) имеет второй порядок аппроксимации по всем переменным и основан на явной монотонной схеме Годунова — Колгана — Родионова. Для диффузионных членов в системе уравнений Навье — Стокса применяется явная центрально-разностная аппроксимация. Для источниковых членов используется локально-неявная аппроксимация. Расчеты ведутся на многоблочной регулярной расчетной сетке; каждая ячейка сетки является четырехугольником (см., например, рис. 12, а).

Были проведены две серии расчетов. Основная цель первой серии расчетов (результаты которой описаны в § 1) состояла в том, чтобы, не рассматривая внутреннюю структуру детонационных фронтов, исследовать влияние конечной скорости химических реакций на физические свойства течения. Во всех расчетах этой серии использовалась расчетная сетка, размер ячеек которой был на порядок меньше периода задержки воспламенения в большей части расчетной области, но был сопоставим с шириной фронта детонационных волн. В результате детонационные волны рассматривались фактически в рамках ЗНД-модели. Но физические процессы в остальной области течения, которые так или иначе связаны с генерацией и стабилизацией детонационных волн, рассматривались с учетом неравновесных химических реакций. Во второй серии расчетов (§ 2) режим течения и расчетная сетка были подобраны таким образом, чтобы было детально представлено течение внутри фронта детонационной волны.

Во всех расчетах рассматривался сверхзвуковой набегающий поток однородно перемешанной стехиометрической водородовоздушной смеси со статическим давлением  $p =$

$1,68833 \cdot 10^4$  Па и статической температурой  $T = 850$  К, для которой число Маха волны детонации Чемпена — Жуге  $M_{CJ} = 2,726$ . На всех расчетных полях различных параметров вдоль координатных осей отложены метры; за исключением рис. 6, б, масштабы вдоль вертикальной и горизонтальной осей совпадают; набегающий поток всюду направлен слева направо.

## 1. СТАЦИОНАРНЫЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЕТОНАЦИИ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ СЖАТИЯ

### 1.1. Структура течения у поверхности клина при его обтекании сверхзвуковым потоком неравновесно реагирующей смеси

Рассмотрим обтекание клина вязким потоком детонирующей смеси в рамках ЗНД-модели. Поскольку угол детонационной волны превышает угол косого скачка уплотнения на том же клине, то угол поворота вектора скорости в ударном фронте, входящем в ЗНД-структуру, превышает угол соответствующего клина. Это означает, что либо вблизи вершины клина разрушается ЗНД-структура, либо клин обтекается детонирующей смесью с отрывом потока в вершине, что, вообще говоря, не противоречит уравнениям газовой динамики. Для преодоления этого противоречия достаточно рассмотреть релаксирующую среду с конечным временем индукции.

Рассмотрим случай, когда на поверхности клина выполняется условие непротекания, и клин обтекается вязкой детонирующей смесью с конечными скоростями реакций. Схематическое изображение характерной картины такого течения, полученное на основании интерпретации результатов многочисленных расчетов, представлено на рис. 1.

Видно, что решение неавтономно. У поверхности клина появляется характерная волновая структура ( $\lambda$ -структура). Механизм ее образования таков: в рамках модели с конечным периодом релаксации фронт пламени удален на длину индукции вниз по потоку от головного скачка уплотнения; зона тепловыделения генерирует двумерные волны сжатия, которые с ним взаимодействуют и усиливают его; в волнах сжатия и за усиленным таким образом головным скачком возрастает температура, сокращается длина индукции и по мере



Рис. 1. Схема  $\lambda$ -структуры

удаления от поверхности фронт пламени постепенно приближается к скачку уплотнения. Наконец, угол наклона скачка уплотнения становится равным значению, которое предсказывают интегральные законы сохранения для косой детонационной волны с данным тепловыделением. При этом волны сжатия, порождаемые зоной тепловыделения, по-прежнему догоняют ударный фронт и стремятся еще повысить угол его наклона. Однако это повышение приводит к тому, что за фронтом пламени линии тока разворачиваются на угол, превышающий угол клина. В результате за фронтом пламени образуются волны разрежения; поскольку по нормали к детонационному фронту течение является дозвуковым, эти волны разрежения догоняют ударный фронт детонационной волны и возвращают его обратно к тому углу наклона, который удовлетворяет интегральным законам сохранения для косой детонационной волны с заданным тепловыделением. В результате образуется единая газодинамическая структура — детонационная волна, которая состоит из скачка уплотнения и параллельной ему зоны тепловыделения, сильно взаимодействующих друг с другом (скачок уплотнения, повышая температуру газа, инициирует горение, а фронт пламени генерирует волны сжатия и таким образом поддерживает перепад давления в скачке уплотнения), и которая удовлетворяет одномерным интегральным законам сохранения для волны с данным тепловыделением. Угол наклона детонационной волны существенно превосходит угол наклона скачка уплотнения на клине, а расстояние между ударным фронтом и зоной горения существенно меньше, чем у поверхности клина.

Рассматриваемое течение разделено на две области: зона А — слой, расположен-

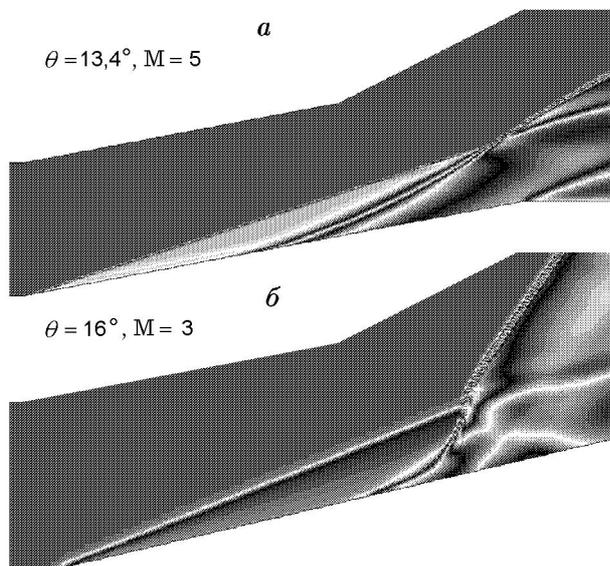


Рис. 2. Два варианта  $\lambda$ -структуры

ный ниже «тройной точки», в которой скачок уплотнения на клине и следующий за ним фронт пламени «объединяются» с образованием наклонной детонационной волны; зона В расположена выше этой «тройной точки», вниз по потоку от наклонной детонационной волны. При определенных условиях возможна ситуация, когда волны сжатия, генерируемые зоной горения, еще до взаимодействия с головным скачком уплотнения пересекаются и образуют вторичную ударную волну. В этом случае  $\lambda$ -структура несколько видоизменяется: внутри нее возникает вторичная детонационная волна, генерируемая вторичной ударной волной, а в точке взаимодействия ее с головным скачком уплотнения появляется излом результирующей детонационной волны. Такой режим течения был также получен в работе [17]. На рис. 2 даны примеры обоих вариантов  $\lambda$ -структуры, полученные в расчетах: на рис. 2,а показано течение около клина с углом  $\theta = 13,4^\circ$ ,  $M = 5$ , на рис. 2,б — течение около конуса с углом полураствора  $\theta = 16^\circ$ ,  $M = 3$ .

Наличие известной аналогии между двумерными стационарными и одномерными нестационарными газодинамическими течениями [13] позволяет установить определенную аналогию между описанными  $\lambda$ -структурами и течениями в сужающейся детонационной трубе, где разделенные предварительно ударный фронт и зона горения объединяются в единую пересжатую детонационную волну [18].

### 1.2. Изменение структуры течения с детонационной волной, стабилизированной на клине, при уменьшении его угла

Оказалось, что наличие  $\lambda$ -структуры и изменение ее линейного размера при квазистационарном изменении угла поверхности сжатия  $\theta$  играют определяющую роль в стабилизации горения. На рис. 3 показаны расчетные поля числа Маха для трех значений угла клина  $\theta$  ( $M = 5$ ; использовалась равномерная расчетная сетка, содержащая 55 ячеек в продольном направлении). При  $\theta = 20^\circ$   $\lambda$ -структура настолько мала, что на рисунке ее практически не видно. При уменьшении угла  $\theta$  на  $\approx 6,5^\circ$  ее размеры становятся вполне конечными, а при уменьшении угла еще на  $\approx 2^\circ$  увеличиваются еще примерно в два раза. При дальнейшем уменьшении угла клина зона горения уходит за пределы расчетной области. Расстояние  $L$  от вершины клина, на котором будет формиро-

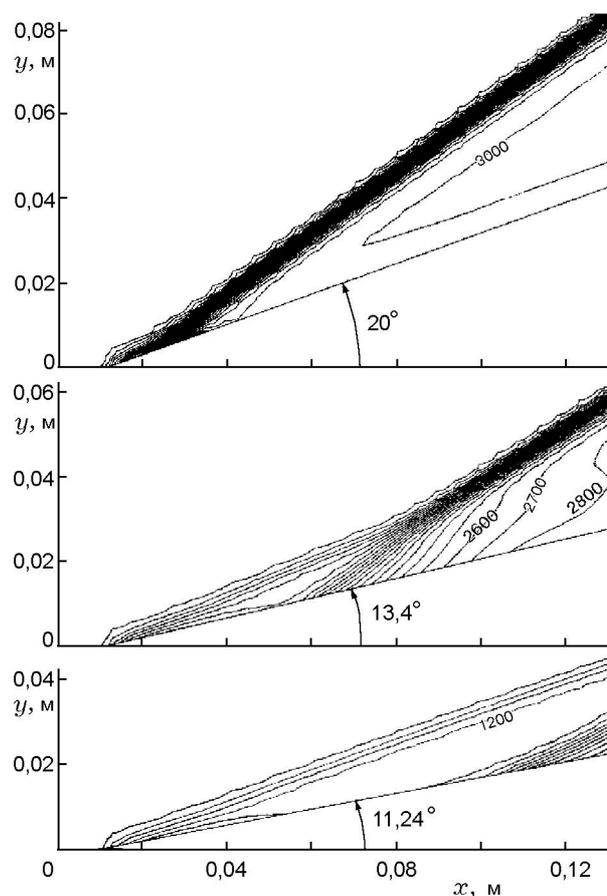


Рис. 3. Расчеты наклонных детонационных волн для различных значений угла клина (поля температуры)

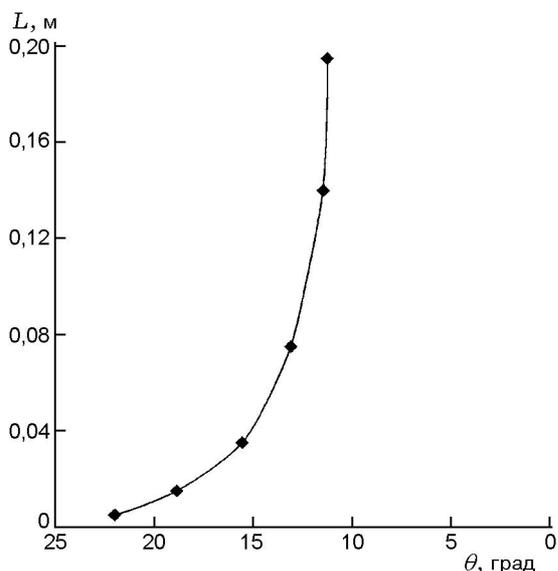


Рис. 4. Пример зависимости продольного размера  $\lambda$ -структуры от угла клина

ваться детонационная волна, очень быстро возрастает при уменьшении  $\theta$ . Зависимость  $L(\theta)$  для рассматриваемого режима течения показана на рис. 4. Разумеется, к аналогичным результатам приводит и изменение параметров набегающего потока.

На рис. 5 приведены распределения температуры вдоль поверхности «клин — плоское тело», полученные в расчетах для разных значений

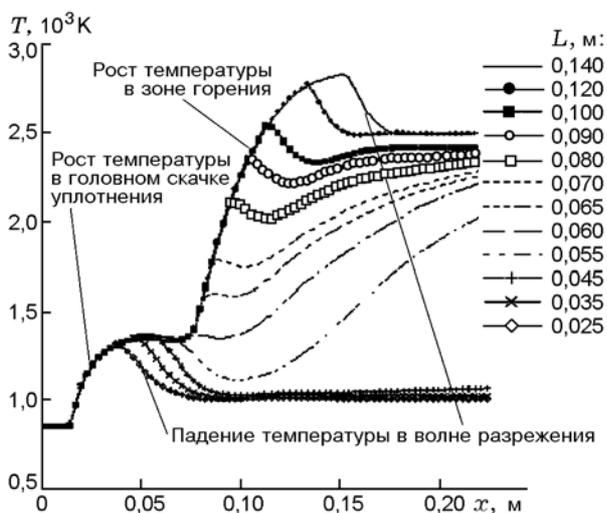


Рис. 5. Распределения температуры вдоль поверхности тела, полученные в расчетах течения детонирующей смеси около комбинации «клин — плоское тело» для различных значений длины клина  $L$

чений длины клина  $L$ . Видно, как при сокращении  $L$  все раньше и раньше начинается падение температуры в волне разрежения. Наконец, когда волна разрежения начинает разрушать зону индукции, происходит резкое падение скорости реакции, зона горения покидает расчетную область, и структура потока существенно меняется: образуется течение с обычным косым скачком уплотнения и последующей волной разрежения, которые в пределе при  $L \rightarrow 0$  переходят в простую характеристику в невозмущенном потоке.

### 1.3. Влияние пограничного слоя на стабилизацию детонационной волны

Можно предположить, что учет влияния пограничного слоя может привести к существенному изменению структуры течения вблизи поверхности клина и это может оказывать влияние на стабилизацию горения на клине при уменьшении угла клина. Поэтому был проведен расчет течения около клина с углом  $\theta = 20^\circ$  ( $M = 5$ ) в рамках модели ламинарного течения вязкого газа. На входе в расчетную область у нижней стенки (которая считалась охлаждаемой и имела постоянную температуру 1000 К) был задан профиль ламинарного пограничного слоя на пластине длиной 25 см.

На рис. 6, а представлено полученное в расчете поле числа Маха. Скачок уплотнения на клине создает отрывную зону. Но это не обычный отрыв. Скачок лишь инициирует его; затем в области возвратного течения начинается горение, и пламя распространяется по пограничному слою вперед, значительно увеличивая размеры отрывной зоны.

Далее было проведено сравнение с расчетом невязкого течения. Ожидалось, что в вязком газе детонация должна возникать раньше, чем в невязком случае, так как течение в отрывной зоне характеризуется высокой температурой и низкими скоростями, что должно стабилизировать горение. Однако расчет дал противоположный результат: детонация возникает не раньше, а позже, чем в невязком случае (см. поле концентрации воды на рис. 6, б).

Изучение расчетных данных позволило объяснить этот любопытный эффект. Дело в том, что горение в пограничном слое осуществляется на некотором расстоянии перед вершиной клина и вблизи нее реакции уже отсутствуют; скачок уплотнения зарождается уже

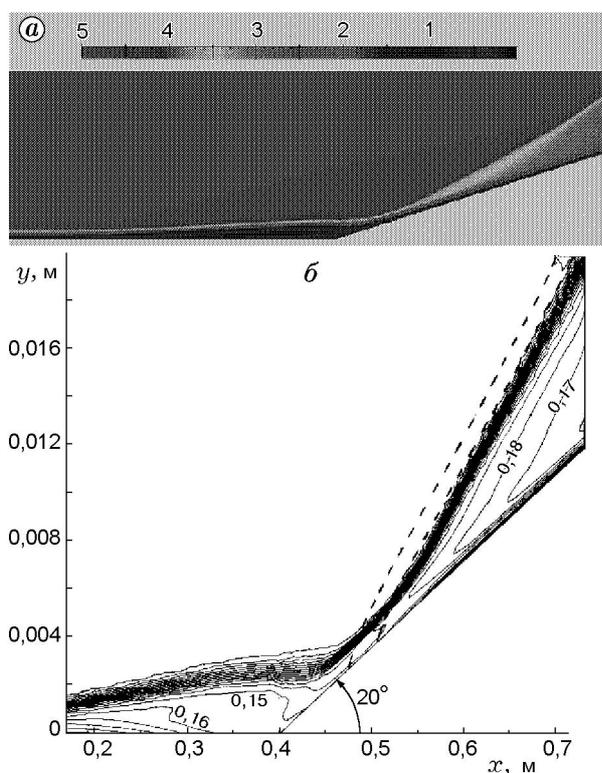


Рис. 6. Расчет наклонной детонационной волны на клине с учетом пограничного слоя:

*a* — поле числа Маха; *b* — поле массовой концентрации паров воды и его сравнение с невязким расчетом, штриховая линия — невязкий расчет

в продуктах сгорания, и за скачком уплотнения не происходит заметного тепловыделения; при этом отрыв оказывает вытесняющее воздействие на поток, отдаляя точку возникновения детонации. С другой стороны, во внешней части пограничного слоя газ является непрореагировавшим, а температура там выше, чем во внешнем потоке. Это приводит к сокращению задержки воспламенения за скачком уплотнения примерно в 1,5 раза. Если бы не этот эффект, детонация стабилизировалась бы еще дальше вниз по потоку.

Таким образом, положение точки возникновения детонационной волны определяется взаимодействием двух противоположных эффектов: 1) вытесняющего действия отрывной зоны и 2) сокращения задержки воспламенения из-за повышенной температуры в пограничном слое.

При увеличении угла клина размеры отрывной зоны растут, а задержка воспламенения мала даже для невязкого течения. Поэтому основную роль будет играть первый эффект.

Чем больше отрывная зона, тем дальше формируется детонация. Наоборот, при уменьшении угла клина отрывная зона становится все меньше и основную роль будет играть второй фактор, несколько замедляя смещение детонации вниз по потоку; однако вряд ли этот эффект будет значительным.

Итак, можно сделать вывод, что нельзя рассчитывать на отрывную зону как на средство стабилизации горения в детонационной волне при изменении угла клина или режима течения.

Необходимо отметить, что при проведении описанных расчетов не ставилась цель получить высокоточные значения параметров потока, определить тепловые потоки на стенке и т. п. Нужно было лишь определить характер взаимодействия детонационной волны с пограничным слоем. Вот почему авторы ограничились расчетом на довольно крупной сетке (на входной границе пограничный слой занимал лишь пять ячеек сетки; внутри отрывной зоны помещалось не более десяти ячеек сетки). В связи с этим было опасение, что все наблюдаемые эффекты обусловлены не физической, а численной вязкостью. Для проверки этого был проведен расчет с теми же граничными условиями (в том числе с условием торможения на стенке) и с тем же начальным полем (в том числе с «намазанным» на стенку пограничным слоем), но без учета физической вязкости, массовой диффузии и теплопроводности. В результате была получена совершенно иная картина течения. Это доказывает, что в описанных выше расчетах физические вязкие эффекты существенны и, следовательно, полученная в них картина течения, по крайней мере, качественно соответствует реальной.

Более подробно этот анализ проведен в работе [19].

#### 1.4. Изменение структуры течения с детонационной волной, стабилизированной на клине, при увеличении его угла вплоть до критического значения

Рассмотрим противоположную задачу: выясним, как  $\lambda$ -структура трансформируется при квазистационарном увеличении угла поворота вектора скорости в волне ( $\theta$ ). Пусть число Маха набегающего потока  $M = 3$ . Результаты расчетов (поля числа Маха) для нескольких значений угла  $\theta$  представлены на рис. 7. (Все расчеты проводились на равномерной сетке,

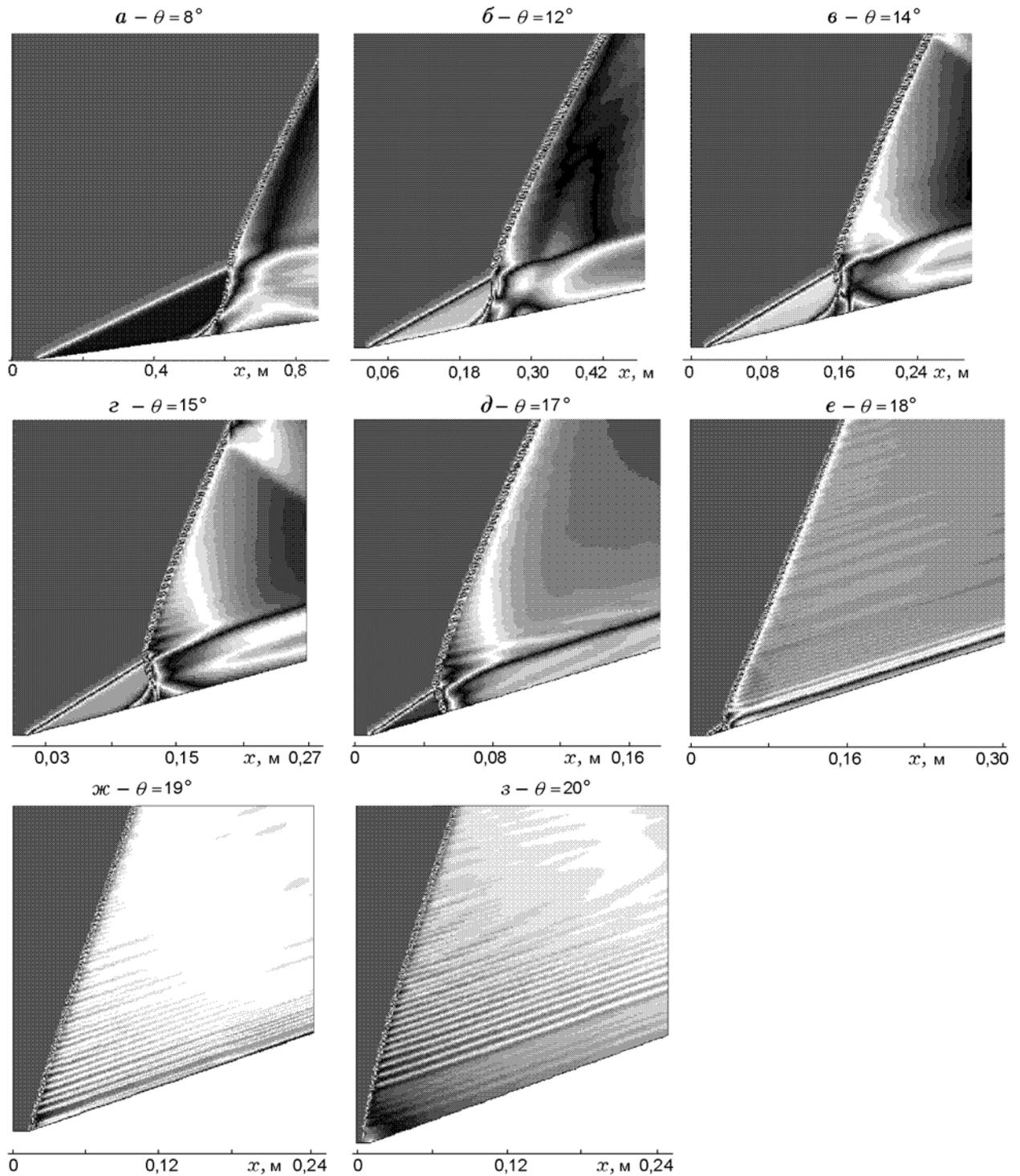


Рис. 7. Изменение структуры течения с наклонной детонационной волной на клине при увеличении угла клина

которая содержала 170 ячеек в продольном направлении.)

Наибольший интерес представляют значения углов клина, близкие к предельному, при котором присоединенная детонация еще может существовать. В связи с этим в рассмотренной серии режимов число Маха за головным скачком близко к единице, и поэтому даже небольшое повышение давления в зоне реакции приводит к возникновению предельных углов поворота потока и, соответственно, к образованию внутри  $\lambda$ -структуры маховских конфигураций.

Вначале возьмем небольшой угол клина ( $8^\circ$ ). В этом случае у поверхности клина образуется второй вариант  $\lambda$ -структуры (см. рис. 2, б). Очевидно, что при увеличении  $\theta$  возрастают температура и давление за головным скачком уплотнения, период индукции падает и размеры  $\lambda$ -структуры сокращаются. (Для всех полей течения, показанных на рис. 7, а–г, масштаб выбран таким образом, что на каждом рисунке протяженность участка индукции примерно одинакова.) Кроме того, постепенно формируется отраженная волна сжатия, идущая по продуктам сгорания вниз, к поверхности клина, от точки внутри  $\lambda$ -структуры, в которой из-за пересечения волн сжатия образуется вторичная детонационная волна (см. рис. 7, б).

Необходимо отметить, что угол клина, который соответствует наклонной детонации Чепмена — Жуге [4], для данного режима течения приблизительно равен  $13^\circ$ . Поэтому в расчетах, представленных на рис. 7, а, б, за самоподдерживающейся детонационной волной Чепмена — Жуге следует непосредственно прилегающая к ней неавтономная волна разрежения, возвращающая поток к направлению, определяемому клином. Эта волна особенно хорошо видна на картине изолиний статического давления для угла клина  $8^\circ$  на рис. 8, а. По мере удаления от носика клина структура течения стремится к автомодельному течению с волной Чепмена — Жуге и последующей централизованной волной Прандтля — Майера, которое получается в пределе бесконечных скоростей химических реакций и которое рассматривалось в предыдущем параграфе. Для сравнения на рис. 8, б представлена картина изолиний давления для угла клина, большего, чем угол Чепмена — Жуге. В этом случае нет волны разрежения, непосредственно прилегающей к наклонной детонационной волне. Волна разрежения,

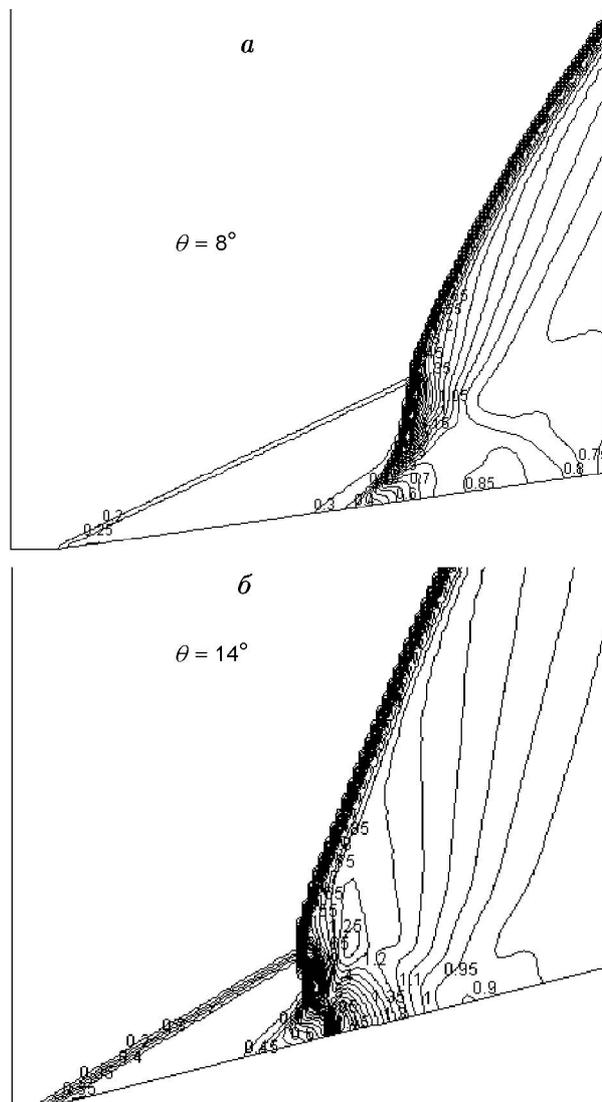


Рис. 8. Изолинии статического давления для углов клина  $8^\circ$  и  $14^\circ$

разрежения, которую можно видеть на этом рисунке, получилась в результате отражения от поверхности клина волны, зародившейся внутри  $\lambda$ -структуры и направленной к клину.

При дальнейшем увеличении  $\theta$  (до  $\approx 13^\circ$ ) волновая структура течения вблизи поверхности клина значительно усложняется. Вторичная детонационная волна внутри  $\lambda$ -структуры превращается в сильную детонационную волну с дозвуковой скоростью за ней (см. рис. 7, в).

Фактически внутри  $\lambda$ -структуры формируется «маховская детонационная конфигурация». (Похожие поперечные волны наблюдаются в голове спина, возникающего также вблизи пределов детонации [8].) Одновременно с этим

из-за низких значений числа Маха отраженная волна сжатия также не может регулярно отражаться от поверхности клина, что приводит к образованию вторичной (уже не детонационной, а ударной) маховской конфигурации в продуктах сгорания у поверхности клина.

Расчеты показывают, что при дальнейшем увеличении  $\theta$  этот вторичный прямой скачок уплотнения смещается вперед (ср. рис. 7,в и рис. 7,г). В конце концов он догоняет зону горения (см. рис. 7,г), меняется с ней местами и сливается с ней, образуя единую прямую детонационную волну, идущую от поверхности клина до головного скачка уплотнения и после пересечения с ним переходящую в наклонную детонационную волну (см. рис. 7,д).

Последующее повышение угла клина приводит к продвижению вторичного детонационного фронта вперед (см. рис. 7,д-з) — до тех пор, пока он не достигает вершины клина и не превращается в отошедшую детонационную волну (см. рис. 7,з). При этом размер области, ограниченной поверхностью клина, головным скачком уплотнения и детонационной волной, постепенно сокращается и в момент отхода волны становится равным нулю.

Заметим, что отход происходит при приблизительно таком же значении угла клина, при котором он должен происходить по теории ЗНД: например, для рассматриваемого режима течения при относительном теплоподводе  $Q = q/c_{p\infty}T_{\infty} \approx 2,25$  и при отношениях теплоемкостей до и после волны  $\gamma_1 = 1,374$  и  $\gamma_2 = 1,238$  законы сохранения [13] предсказывают критический угол клина  $\theta \approx 19,4^\circ$ .

При выполнении этих расчетов авторы столкнулись с вычислительной проблемой — возникновением осцилляций за фронтом детонационной волны (см. рис. 7,г-з). Используемый численный метод, как правило, исключает появление подобных осцилляций, если рассчитываются обычные косые скачки уплотнения. По-видимому, природа этих осцилляций аналогична природе неустойчивости ЗНД-структуры [6]. Удалось установить, что источником осцилляций являются сильные сеточные погрешности, возникающие при переходе искривленного фронта детонации с одного горизонтального слоя ячеек расчетной сетки на следующий. Эти возмущения, взаимодействуя с химической кинетикой, генерируют осцилляции за фронтом волны. Если направить сеточные линии вдоль фронта волны, то осцилляции

исчезают; при этом существенной перестройки структуры течения не происходит.

Авторы ясно отдают себе отчет в том, что в реальных детонационных волнах неустойчивость ЗНД-структуры приводит к образованию нестационарной внутренней структуры фронта детонации [8]. Этот факт в представленных результатах находит свое отражение в том, что вблизи ее фронта параметр сходимости (относительное изменение решения за один шаг по времени), как правило, ненулевой. В § 2 будет представлена попытка разрешить эту внутреннюю нестационарную структуру в расчетах.

### 1.5. Сходство и отличие течений детонирующей смеси у клина и конуса

Расчеты, аналогичные описанным в предыдущем параграфе, были также проведены для осесимметричного случая. Был выбран тот же режим течения ( $M = 3$ ). На рис. 9 сравниваются расчетные поля числа Маха для течений около конуса (рис. 9,а) и

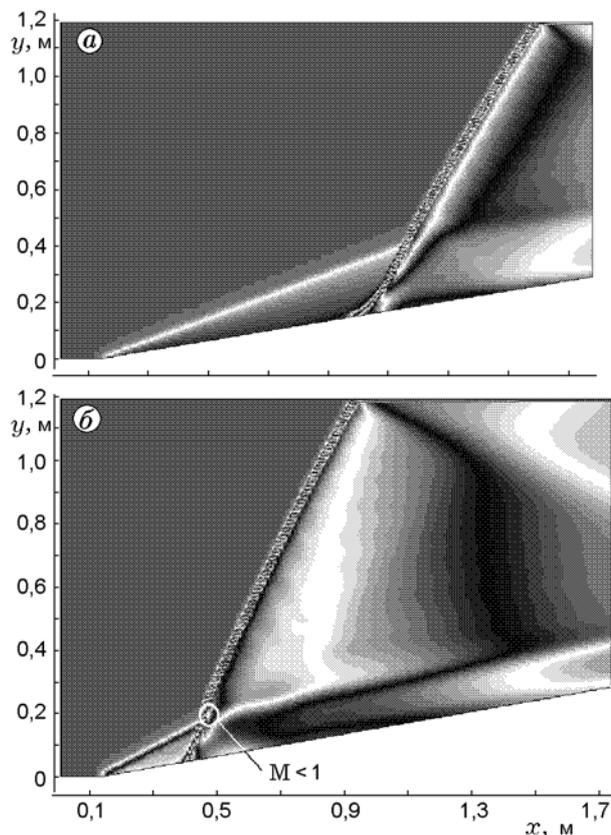


Рис. 9. Сравнение полей числа Маха на конусе и клине с углом  $10^\circ$

клина (рис. 9,б) с одинаковым углом ( $10^\circ$ ). Расчетная сетка и масштаб на обоих рисунках совпадают. Характерные особенности осесимметричного течения легко обнаруживаются на участке течения между головным скачком уплотнения и фронтом пламени: в отличие от плоского случая, где параметры потока за прямолинейным скачком должны быть всюду постоянны, за скачком на конусе параметры постоянны лишь вдоль лучей, выходящих из вершины конуса, но изменяются от одного луча к другому. Растекание газа на конусе объясняет все отличия в волновой структуре наклонной детонации от аналогичного течения вблизи клина: 1) температура за скачком уплотнения на конусе ниже, чем на клине, и период задержки воспламенения увеличивается в 3–3,5 раза; 2) температура понижается в направлении, перпендикулярном поверхности конуса, поэтому при удалении от поверхности конуса воспламенение наступает все дальше, и фронт пламени приобретает значительно более сильно искривленную форму, чем на клине; 3) угол наклона детонационной волны на конусе меньше, чем на клине (соответственно  $60^\circ$  и  $64^\circ$ ), и поэтому, например, число Маха за детонацией на конусе несколько выше; 4) при  $\theta = 10^\circ$  течение еще остается всюду сверхзвуковым, тогда как на клине уже появилась небольшая дозвуковая область в районе «тройной точки», где формируется наклонная детонационная волна. Но в целом качественные особенности  $\lambda$ -структуры в обоих случаях близки друг другу.

На рис. 10 приведены поля числа Маха для разных углов конуса. (Все расчеты проводились на равномерной сетке, которая содержала 170 ячеек в продольном направлении.) Так же, как и на рис. 7, масштаб изменяется от рисунка к рисунку таким образом, чтобы на каждом рисунке участок индукции имел примерно одну и ту же протяженность. Видно, что  $\lambda$ -структура проходит те же стадии трансформаций, как и в плоском случае, только гораздо более медленно (так, структура течения на конусе с углом  $24^\circ$  аналогична структуре течения на клине с углом  $15^\circ$ ). Однако при углах конуса, близких к предельному углу существования присоединенной детонации, у поверхности конуса формируется очень сложная волновая структура, обусловленная взаимодействием вторичных ударных волн, отраженных от поверхности конуса, с наклонной детонацион-

ной волной (см. рис. 10,з).

### 1.6. Пример сверхзвукового горения, близкого по характеру к недосжатой детонации, в котором роль «ведущего процесса» играют двумерные волны сжатия

Одномерный анализ течения реагирующей смеси с использованием обобщенной адиабаты Гюгонио и прямой Рэлея — Михельсона в плоскости  $(p, 1/\rho)$  показывает, что при заданных значениях скорости волны горения и теплоподвода в волне, вообще говоря, возможны два способа распространения волн горения со сверхзвуковой скоростью относительно горючей смеси: «пересжатая детонация» и «недосжатая детонация» [13]. В случае пересжатой детонации нормальная скорость продуктов сгорания относительно фронта пламени является дозвуковой; в случае недосжатой детонации — сверхзвуковой. Характеристический анализ показывает, что в модели невязкого реагирующего газа невозможно организовать недосжатую детонацию в одномерном течении; требуется дополнительный ведущий процесс неконвективного происхождения (здесь термин «конвекция» означает движение невязкого сжимаемого газа как сплошной среды) — например, диффузия, луч лазера и др. [13]. Тем не менее этот вывод справедлив только для одномерных течений. В неодномерном случае возникает возможность организовать полностью сверхзвуковое горение в невязком потоке горючей смеси [20]. При этом роль ведущего процесса будут играть двумерные волны сжатия.

Вернемся к рис. 1. Горение в зоне А нельзя отнести к классу детонационных волн, так как в этой зоне отсутствует сильное взаимодействие между скачком уплотнения и фронтом пламени. По некоторым свойствам (сверхзвуковое течение, рост давления вдоль линий тока в области тепловыделения и т. п.) это течение напоминает недосжатую детонацию. Тем не менее, строго говоря, это течение нельзя отнести и к классу недосжатой детонации, поскольку оно существенно неодномерно и не описывается соотношениями, справедливыми для недосжатой детонации.

Интересно, что с точки зрения минимизации потерь этот режим более привлекателен, чем горение в наклонной детонационной волне. На рис. 11 показаны результаты расчета течения водородовоздушной смеси около комбинации «клин — плоское тело». Угол клина  $\theta =$

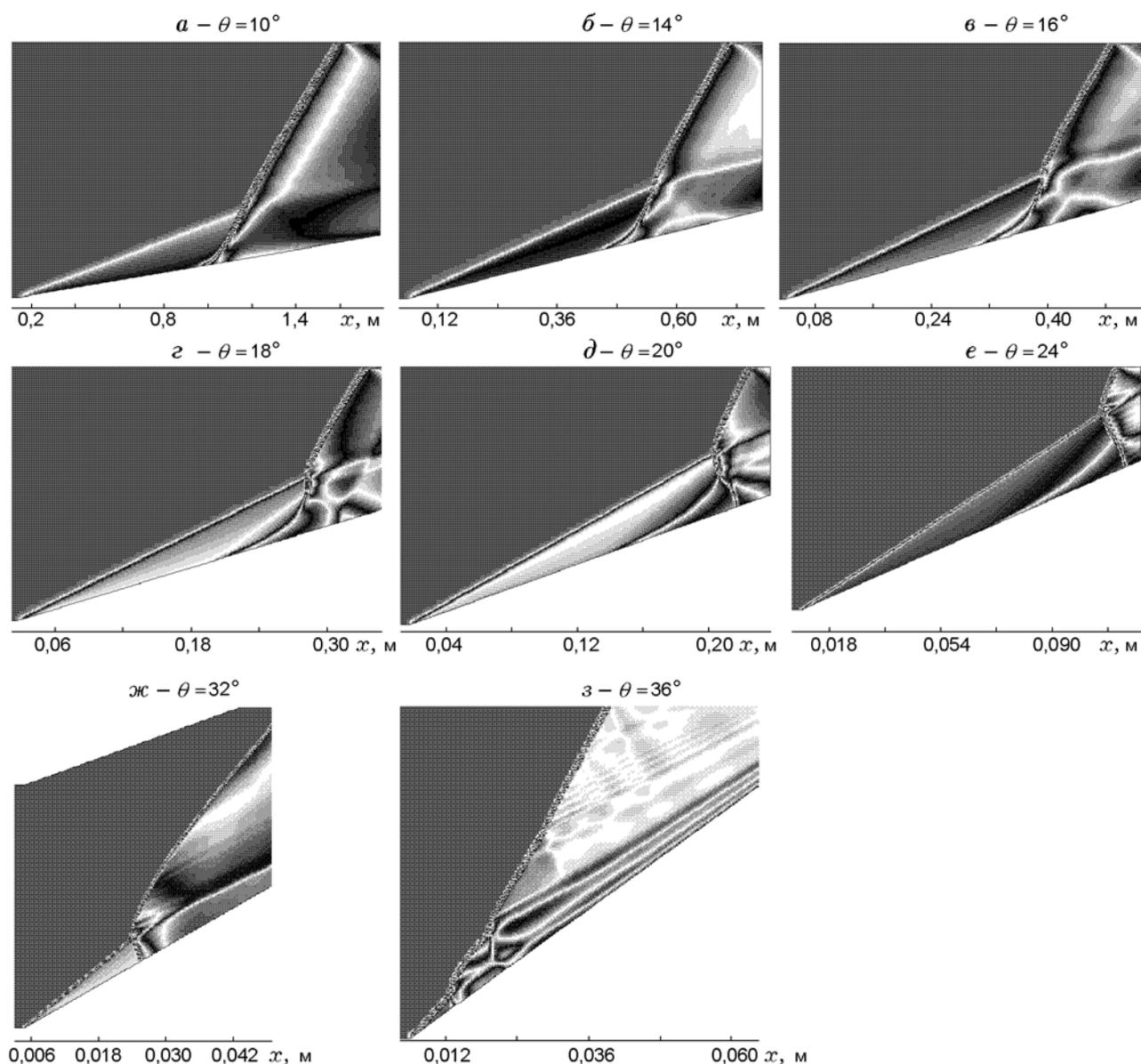


Рис. 10. Изменение структуры течения с наклонной детонационной волной на конусе при увеличении угла полураствора конуса  $\theta$

$13,4^\circ$ . На рис. 11, *a* представлено поле массовой концентрации водяного пара  $Y_{H_2O}$ , которая характеризует полноту сгорания горючей смеси. Видно, что за наклонной детонационной волной (зона В) значение  $Y_{H_2O}$  ниже, чем в зоне А. По-видимому, это можно объяснить тем, что температура за детонационной волной значительно выше, что приводит к диссоциации части молекул воды (потери на диссоциацию). Анализ поля полного давления (см. рис. 11, *б*) показывает, что за детонационной волной мы также имеем несколько большие потери полного дав-

ления. Таким образом, минимальные суммарные потери реализуются в области неоднородного сверхзвукового горения (зона А).

Очевидно, можно выделить течение в зоне А и реализовать этот режим горения независимо, без образования наклонной детонационной волны внутри соответствующего канала. Для этого достаточно ограничить течение сверху твердой поверхностью, начало которой можно разместить немного ниже области, в которой должны были бы появиться «тройная точка» и наклонная детонационная волна.

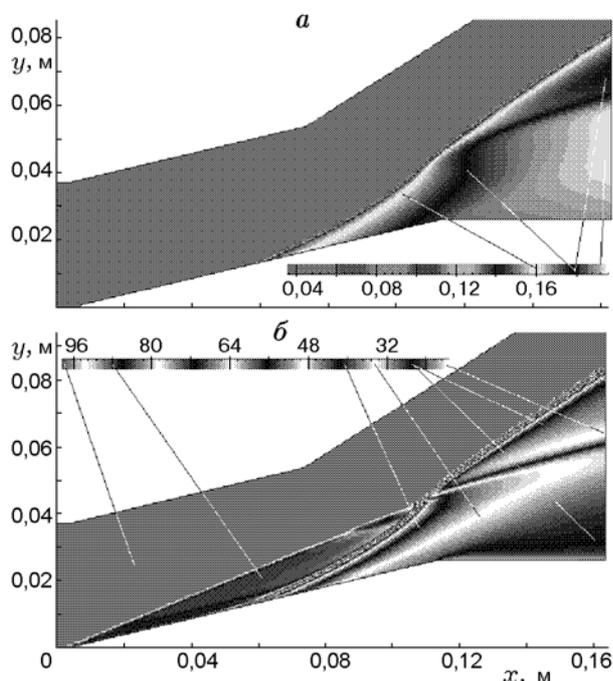


Рис. 11. Расчеты течения детонирующей смеси около комбинации «клин — плоское тело»: *a* — поле массовой концентрации паров воды; *б* — поле полного давления, атм

Было проведено численное моделирование такого течения.

На рис. 12, *a* показаны геометрия расчетной области и расчетная сетка. Течение ограничено сверху твердой поверхностью с отклоненной передней кромкой. Полное количество ячеек расчетной сетки в продольном направлении было равно 235. На рис. 12, *б* изображено расчетное поле числа Маха. Видно, что течение всюду является сверхзвуковым. Поток сначала тормозится в косом скачке уплотнения, затем происходит дальнейшее постепенное торможение в зоне реакции. Наконец, рис. 12, *в, г* демонстрируют поля  $Y_{H_2O}$  и полного давления соответственно. Несмотря на дополнительное взаимодействие течения с верхней твердой поверхностью, эти поля совершенно аналогичны полям, полученным в зоне А в случае без верхней поверхности (см. рис. 11).

Естественно возникает вопрос: возможно ли сверхзвуковое горение в полностью безударном течении. Для ответа достаточно рассмотреть поверхность непрерывного сжатия с висячим скачком уплотнения. На рис. 13 приведены результаты расчетов обтекания горючей смесью ( $M = 5$ ) поверхности сжатия, образу-

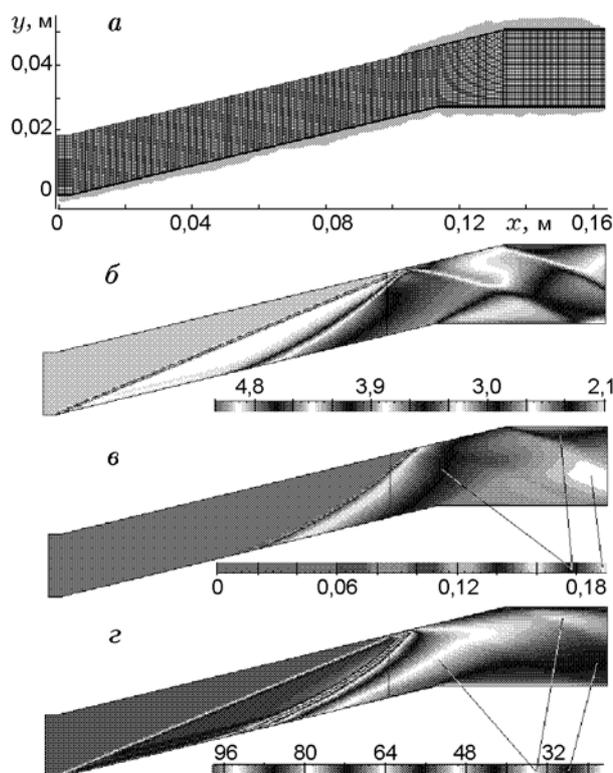


Рис. 12. Расчеты сверхзвукового неоднородного горения в канале:

*a* — геометрия и расчетная сетка, *б* — поле числа Маха, *в* — поле массовой концентрации паров воды, *г* — поле полного давления, атм

ющая которой составлена из прямолинейного участка и дуги окружности, касательной к осевой линии в точке ведущей кромки (использовалась равномерная расчетная сетка, содержащая 155 ячеек в продольном направлении). Из соотношений на характеристиках для смеси с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$  после определенных выкладок можно получить координаты точки, где начинается висячий скачок (рис. 13):

$$\Delta x_* = 2R \frac{(M_\infty^2 - 1)^{3/2}}{M_\infty^2 (1 + \gamma M_\infty^2)}, \quad \Delta y_* = \frac{\Delta x_*}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}.$$

Очевидно, что в струйках тока, проходящих ниже этой точки, реализуется полностью безударное сверхзвуковое горение. При необходимости эта зона может быть локализована в отдельном канале. Из распределения энтропии, приведенного на рис. 13, следует, что потери полного давления в этой области оказываются еще меньшими, чем в области сверхзвуко-

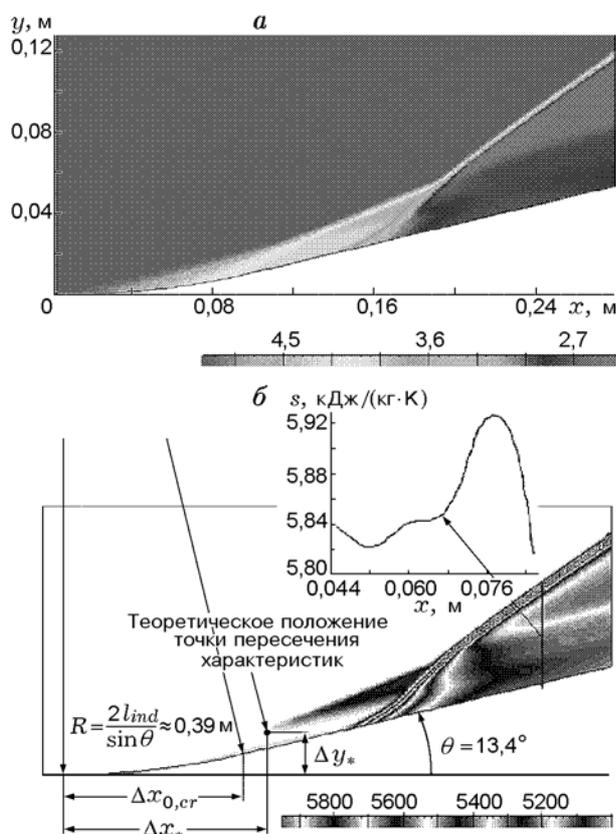


Рис. 13. Расчет течения детонирующей смеси около поверхности сжатия, не содержащей изломов:

*a* — поле числа Маха, *b* — поле энтропии и распределение энтропии вдоль выделенной линии

вого неоднородного горения за косым скачком уплотнения.

## 2. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СО СТАЦИОНАРНЫМИ ВОЛНОВЫМИ СТРУКТУРАМИ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЕТОНАЦИИ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ СЖАТИЯ

Как отмечалось в § 1.5, при обтекании конических тел детонирующей смесью могут возникать весьма сложные волновые структуры. На рис. 10,з приведена структура течения однородно перемешанной стехиометрической водородовоздушной смеси около конуса при  $\theta = 36^\circ$  ( $M = 3$ ), в которой наблюдаются две «тройные» точки. Вторая такая точка возникла в результате взаимодействия отраженной от поверхности конуса «вторичной» волны с головной волной. В принципе, таких стационарных точек на поверхности основной волны может возникнуть сколько угодно, однако нам не при-

ходило наблюдать более двух, так как стационарная «вторичная» волна постепенно ослабевает.

В расчетах, представленных в § 1, была получена в целом стационарная картина течения. Тем не менее среди исследователей детонации существует точка зрения (см., например, [8, 21]) о том, что всякая детонационная волна имеет нестационарную внутреннюю структуру. Многофронтная ячеистая внутренняя структура детонационных волн была получена и во многих расчетных исследованиях (см., например, [22]). Однако, как правило, в расчетах внутренней структуры детонационных волн рассматриваются самоподдерживающиеся детонационные волны, фронт которых перпендикулярен набегающему потоку. Получить нестационарную внутреннюю структуру в наклонной детонационной волне, стабилизированной на клине или конусе, гораздо сложнее, поскольку в таком расчете обязательно должна быть представлена волновая структура вблизи поверхности сжатия. Как видно из приведенных выше данных, в большинстве случаев линейный размер этой пристенной волновой структуры во много раз превосходит ширину фронта развитой детонационной волны (и, соответственно, линейные масштабы внутренней нестационарной структуры). Необходимость моделировать одновременно структуры существенно различных линейных масштабов требует очень больших компьютерных затрат, что, как правило, исключает возможность проведения таких расчетов на современных персональных компьютерах. (Эта проблема напоминает известную проблему жесткости обыкновенных дифференциальных уравнений, которая возникает, в частности, при решении уравнений химической кинетики [14]; легко также обнаружить сходство этой проблемы с трудностями, возникающими при моделировании течений с пограничными слоями при больших значениях числа Рейнольдса.)

В расчетах, описанных в § 1, использовалась расчетная сетка, размер ячеек которой был на порядок меньше периода задержки воспламенения в районе пристенной волновой структуры, но был сопоставим с шириной фронта детонационных волн. В результате нестационарная внутренняя структура фронта детонации не разрешалась. Тем не менее даже в этих расчетах наблюдались нестационарные возмущения решения в окрестности

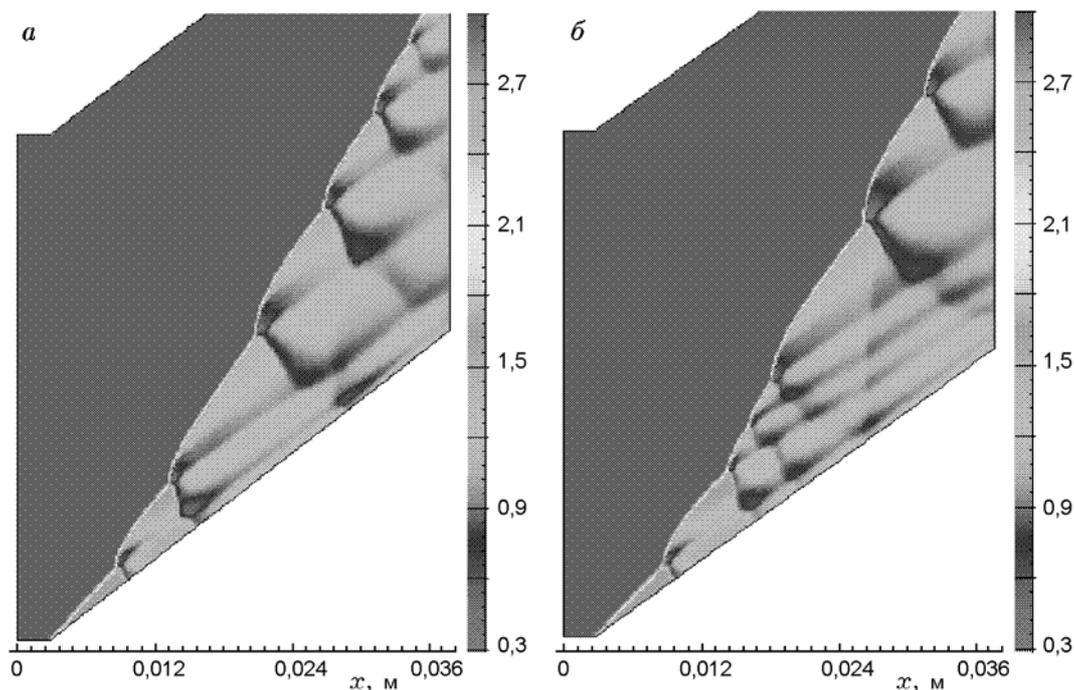


Рис. 14. Расчет нестационарных поперечных структур во фронте наклонной детонации на конусе при  $\theta = 36^\circ$  (поля числа Маха для двух различных моментов счета)

фронта детонационной волны (см. § 1.4). Поэтому мы продолжали поиск этой нестационарной структуры в наших расчетах. Нужно было подобрать такой режим течения, чтобы линейные масштабы пристенной волновой структуры и нестационарных структур во фронте детонационной волны были сопоставимы по величине.

Оказалось, что в расчетах обтекания конуса при  $\theta = 36^\circ$  достаточно было измельчить расчетную сетку примерно в два раза вдоль обоих координатных направлений по сравнению с расчетом, представленным на рис. 10,з, чтобы неустойчивость фронта детонации [21] обусловила формирование нестационарных поперечных волн в расчетном поле течения. Структура этих нестационарных волн повторяет, с одной стороны, структуру описанных выше «детонационных маховских конфигураций» (см. § 1.4 и 1.5), а с другой стороны — структуру «головы спина» в нестационарной спиновой детонации [8]. На основе этих расчетов был сгенерирован вычислительный видеофильм, некоторые кадры из которого приведены на рис. 14.

Для более подробного анализа полученных нестационарных структур на рис. 15,а пред-

ставлено расчетное поле температуры, на котором видны ударно-волновая структура течения и положение зон быстрого тепловыделения (фронтов пламени). Это численное решение сопоставляется со структурой «головы спина», полученной в классических экспериментах [22]. На рис. 15,б показан фрагмент развертки собственного свечения при спиновой детонации смеси  $2\text{CO} + \text{O}_2$ , взятой из работы [22]. Наконец, на рис. 15,г представлена интерпретация волновой структуры спиновой детонации, предложенная в работе [23], а на рис. 15,в изображен увеличенный фрагмент расчетного поля, на котором выделена аналогичная волновая структура.

Действительно, рассмотрим течение вблизи одной из поперечных волн. Волна имеет вид классического «мостообразного» скачка, у которого собственно «мостик» образован сильной пересжатой детонационной волной, а с обоих концов этого «мостика» расположено по паре «ножек»; в каждой паре «ножка», расположенная вверх по потоку, является слабой пересжатой детонационной волной, а другая «ножка» — обычным слабым скачком уплотнения, в котором не происходит активного тепловыделе-

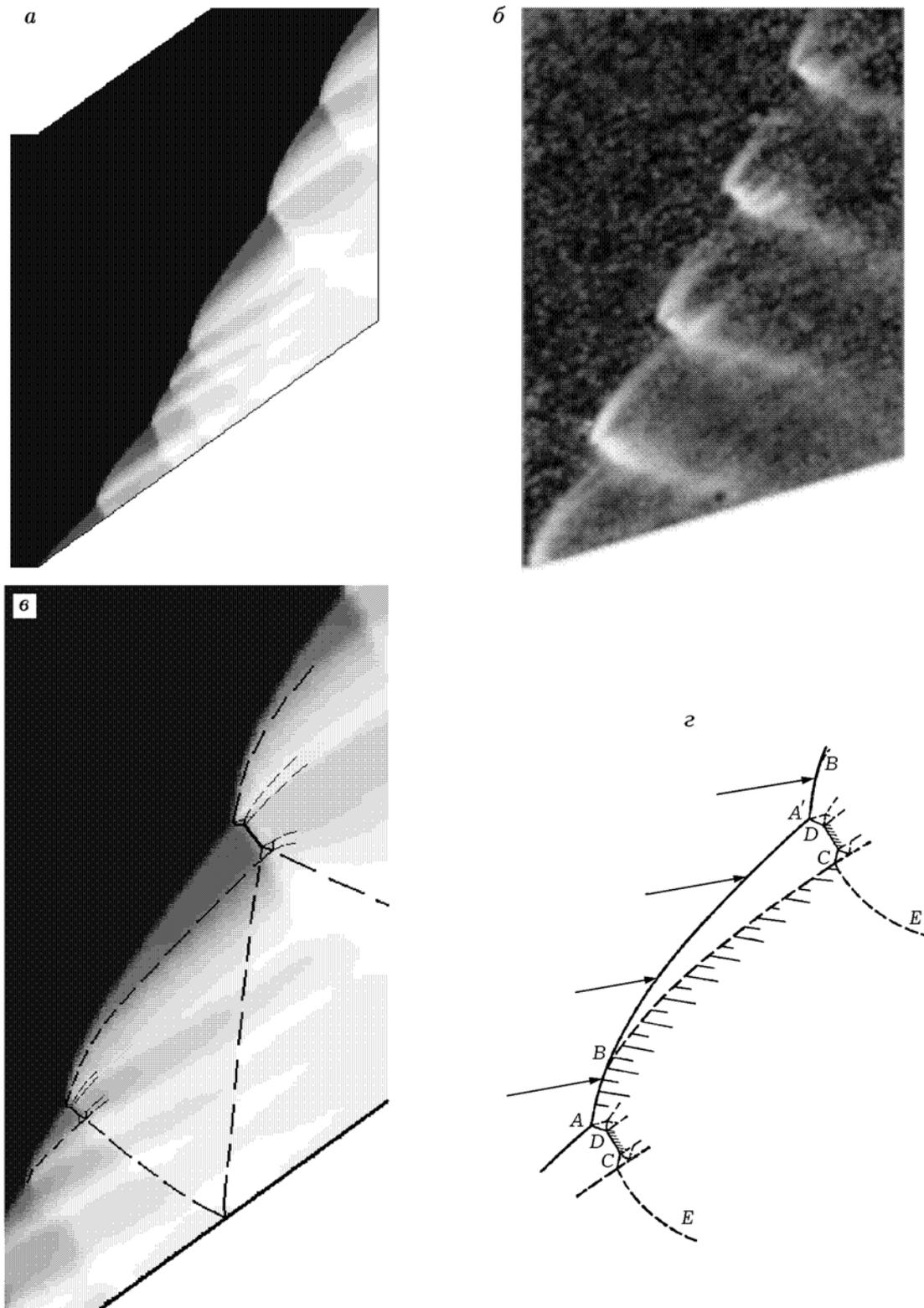


Рис. 15. Расчет нестационарных поперечных структур во фронте наклонной детонации на конусе с углом полураствора  $36^\circ$  и его сопоставление с экспериментальными данными по спиновой детонации:

момент счета соответствует рис. 14, б; а — поле температуры, расчет; б — развертка свечения спиновой детонации, эксперимент; в — интерпретация расчета; г — интерпретация эксперимента

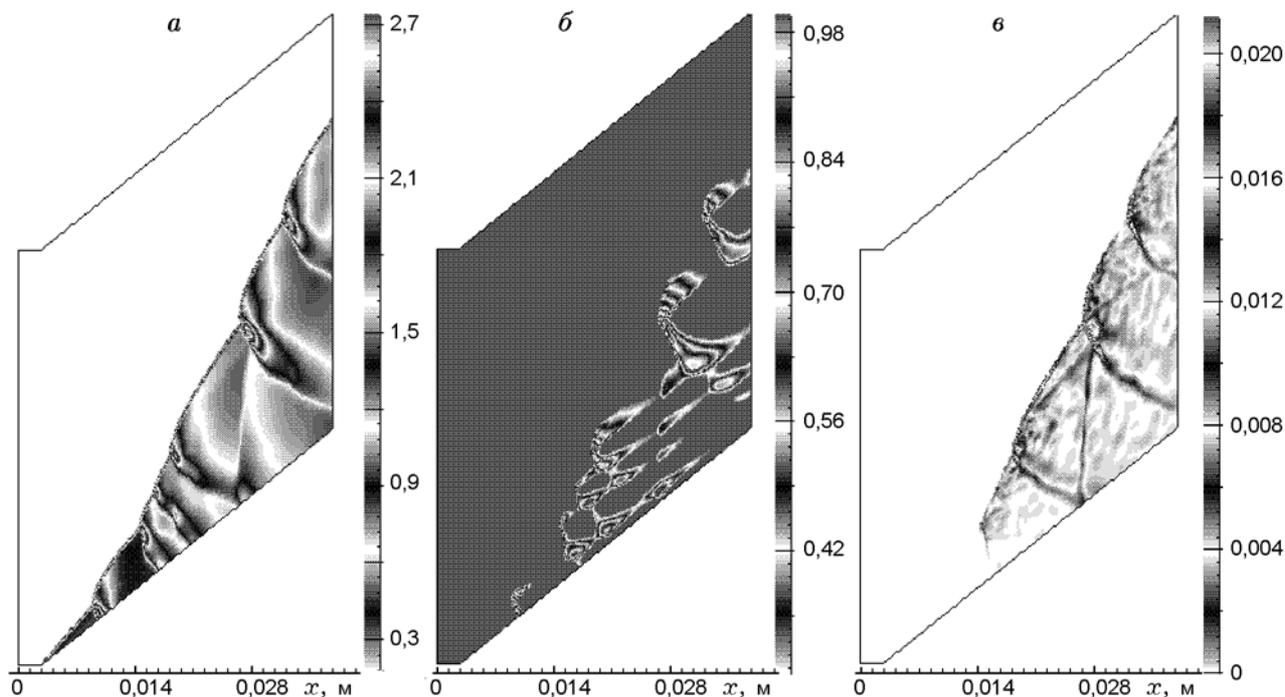


Рис. 16. Расчет нестационарных поперечных структур во фронте наклонной детонации на конусе с углом полураствора  $36^\circ$ : момент счета соответствует рис. 14, б; а — поле статического давления, атм; б — поле дозвуковых значений числа Маха; в — поле параметра сходимости

ния, поскольку он расположен в продуктах сгорания. Избыточный рост температуры и давления в районе взаимодействия «ножки мостика» с головным скачком приводит к чрезмерному увеличению угла наклона головного скачка. В результате линии тока за фронтом пламени отклоняются на избыточный угол и возникает разрежение, которое взаимодействует с головным скачком, возвращая его к «нормальному» углу наклона. При этом период индукции за головным скачком возрастает и наблюдается расслоение головного скачка и фронта горения, которые продолжают расходиться до тех пор, пока снизу в зону активного тепловыделения не приходит отраженный от поверхности сжатия вторичный скачок уплотнения, идущий от предыдущей аналогичной волновой структуры. В области их взаимодействия оказываются слишком низкие значения числа Маха и в результате даже очень небольшого повышения давления возникает новая поперечная волна («детонационная маховская конфи-

гурация»), которая снова повторяет описанную структуру. Предложенный механизм формирования глобальной структуры рассматриваемого течения подтверждается также полученными полями параметров течения, приведенными на рис. 16 (особенно следует обратить внимание на поле давления и на поле дозвуковых значений числа Маха).

Этот процесс несколько напоминает формирование структуры, приведенной на рис. 10,з, и может повторяться неограниченное число раз. Однако предложенная структура несколько усложняется в связи с ее нестационарностью, о чем, в частности, свидетельствует приведенное на рис. 16 поле параметра сходимости («невязки»  $\Delta = |(f^{n+1} - f^n)/f^n| 100\%$ , где  $f = p/T$ ,  $n$  — номер шага по времени). Анализ упомянувшегося вычислительного видеофильма показывает, что полученные поперечные волны могут перемещаться вдоль головного скачка уплотнения в обе стороны, создавая

сгущения и разрежения соответствующих волновых структур. Из данных, приведенных на рис. 16, следует, что при сгущении и/или приближении к поверхности сжатия эти структуры могут трансформироваться в структуры с двумя прямыми скачками, один из которых (верхний) является детонационным, а другой — ударным, наподобие соответствующих стационарных структур, описанных в § 1 (ср. рис. 10 и рис. 16).

Наиболее неожиданным для нас оказалось то, что в своем движении вдоль фронта детонационной волны соответствующие поперечные волны не достигают вершины конуса, вблизи нее в течение всего процесса остается область полностью стационарного течения, доходящая примерно до места локализации первой поперечной волны. Эта область полностью стационарного течения хорошо видна на поле параметра сходимости (см. рис. 16): в этой области «невязка» всегда практически равна нулю. Этому можно предложить следующее объяснение: нестационарные явления обусловлены неустойчивостью фронта детонационной волны [21]; природа этой неустойчивости кроется в сильном взаимодействии между ударным фронтом и фронтом тепловыделения. Но в области, ограниченной начальным участком головной ударной волны вблизи вершины конуса и первой поперечной волной, сильное взаимодействие между головным скачком уплотнения и зоной горения отсутствует. В самом деле, положение первой поперечной волны определяется, в конечном счете, задержкой воспламенения за головным скачком уплотнения, которая зависит только от условий набегающего потока и угла конуса; обратного влияния первой поперечной волны на головной скачок уплотнения нет; поэтому течение вверх по потоку от первой поперечной волны стационарно и устойчиво. Таким образом, можно утверждать, что все стационарные волновые структуры, рассмотренные в § 1, реализуются вне зависимости от нестационарности глобальной структуры течения.

Уязвимым местом представленных результатов является то, что в связи с относительно низкой производительностью имеющихся в нашем распоряжении компьютеров решалась осесимметричная (т. е. двумерная) задача, тогда как реальная нестационарная структура детонационных волн всегда трехмерна. Некоторым оправданием такого подхода служит то, что

сдвиг по фазе в этих расчетах в некотором смысле аналогичен смещению по азимутальному углу  $\varphi$ . Тем не менее для того, чтобы полностью убедиться в правильности сделанных выводов, необходимо провести соответствующие трехмерные расчеты.

Расчет одного нестационарного варианта (40 000 шагов по времени) без учета вязкости на сетке из 20 000 ячеек для кинетической схемы из восьми реакций для семи компонентов занимает около 14 суток работы центрального процессора компьютера класса Pentium II-350.

## ВЫВОДЫ

1. В течениях с наклонными детонационными волнами вблизи поверхностей сжатия при конечных скоростях химических реакций формируется особая волновая структура ( $\lambda$ -структура). Течение в  $\lambda$ -структуре значительно отличается от автомоделного решения, которое можно получить в приближении бесконечной скорости химических реакций.

2. Размер  $\lambda$ -структуры зависит от температуры газа за головным скачком уплотнения. Поэтому при уменьшении угла клина стабилизация горения в наклонной детонационной волне отсутствует, пламя уходит вниз по потоку.

3. Обратный процесс — повышение угла клина — приводит к значительным изменениям в  $\lambda$ -структуре, включая формирование внутри нее поперечных детонационных волн. При этом структура течения становится подобной структуре нестационарной спиновой детонации.

4. В осесимметричном случае структура течения подобна плоскому случаю. Но ее изменение при изменении угла раствора конуса происходит гораздо медленнее.

5. В потоке за  $\lambda$ -структурой потери полного давления ниже, а эффективность тепловыделения выше, чем за наклонной детонационной волной.

6. Существует возможность реализовать режим полностью безударного сверхзвукового горения с минимальными потерями.

7. В расчетах также получены нестационарные волновые структуры, возникающие при двумерном обтекании поверхности сжатия детонирующей смесью. Показано, что поперечные волны, распространяющиеся вдоль головного скачка уплотнения, имеют, с одной стороны, приблизительно ту же структуру, что и

стационарные волновые структуры, рассмотренные в § 1, а с другой стороны, повторяют структуру «головы спина» в нестационарной спиновой детонации.

8. Установлено, что при обтекании поверхности сжатия вблизи ее вершины существует область полностью стационарного течения, что связано с отсутствием в этой области сильного взаимодействия ударного фронта с зоной тепловыделения, которое в одномерном случае и приводит к неустойчивости детонационного фронта. Размер этой области определяется длиной задержки воспламенения за головным скачком уплотнения (т. е. химической кинетикой).

9. Полученные результаты позволяют утверждать, что рассмотренные в § 1 стационарные волновые структуры реализуются вне зависимости от нестационарности глобальной структуры течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пензин В. И. Е. С. Шетинков — изобретатель ГПВРД // Из истории авиации и космонавтики. Вып. 46. М.: ИИЕТ АН СССР, 1982. С. 27–33.
2. Weber R., Mackay J. An analysis of ramjet engines using supersonic combustion // NASA TN 4386, September 1958.
3. Беспалов И. В., Макарон В. С. О жизни и деятельности Е. С. Шетинкова (1907–1976) // Из истории авиации и космонавтики. Вып. 46. М.: ИИЕТ АН СССР, 1982. С. 3–12.
4. Леонов Б. П., Штейнман С. В., Куликов А. В. Методы расчета выгорания в сверхзвуковых потоках // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7, № 4. С. 572–577.
5. Колесников О. М., Комаров В. Н., Кузнецов М. М. и др. Расчетный анализ характеристик ГПВРД с детонационным горением // Теория и конструкция двигателей летательных аппаратов: Тр. XVII науч. чтений по космонавтике, посвященных памяти выдающихся ученых-пионеров освоения космического пространства (Москва, 25–29 января 1993 г.). М.: Фазис, 1993.
6. Щёлкин К. И., Трошин Л. К. Газодинамика горения. М.: Наука, 1963.
7. Солоухин Р. И. Ударные волны и детонация в газах. М.: Физматгиз, 1963.
8. Войцеховский Б. В., Митрофанов В. В., Топчиян М. Е. Структура фронта детонации в газах. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963.
9. Gross R. A., Chinitz W. A study of supersonic combustion // J. Aerospace Sci. 1960. V 27, N 7.
10. Зельдович Я. Б. Теория распространения детонации в газовых системах // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 524.
11. von Neumann J. Progress report on the theory of detonation waves // OSRD, Rept. N 549, 1942.
12. Doring W. Uber den detonationsvorgang in gasen // Ann. Physik. 1943. V. 43. P. 421.
13. Зверев И. Н., Смирнов Н. Н. Газодинамика горения. М.: Изд-во МГУ, 1987.
14. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990.
15. Moretti G. A new technique for the numerical analysis of nonequilibrium flows // AIAA Journal. 1965. V. 3, N 2.
16. Власенко В. В., Сабельников В. А. Численное моделирование невязких течений с горением водорода за скачками уплотнения и в детонационных волнах // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 3. С. 118–133.
17. Безгин Л. В., Ганжело А. Н., Гуськов О. В., Копченков В. И. Влияние входных параметров на течение в модельной детонационной камере сгорания // XXII науч. чтения по космонавтике: Тез. докл. М.: ИИЕТ РАН, 1998.
18. Бакланов Д. И., Гвоздева Л. Г. Нестационарные процессы при распространении детонационных волн в канале переменного сечения // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33, № 6. С. 958–961.
19. Власенко В. В. Численное исследование структуры течения с наклонной детонационной волной на клине при наличии пограничного слоя // Аэродинамика больших скоростей. 1997. Т. 1, вып. 1.
20. Berland A. T., Kolesnikov O. M., Vlasenko V. V. Possible types of supersonic combustion in the ducts // Advanced Computation and Analysis of Combustion / G. D. Roy, S. M. Frolov, P. Givi (Eds). ENAS Publ. P. 289–299.
21. Митрофанов В. В. Теория детонации. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1982.
22. Войцеховский Б. В. О спиновой детонации // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 4.
23. Войцеховский Б. В., Митрофанов В. В., Топчиян М. Е. Структура поперечной волны при спиновой детонации // ПМТФ. 1962. № 3.

Поступила в редакцию 17/IX 1999 г.,  
в окончательном варианте — 11/VII 2000 г.