

УДК 532.59:539.3

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА КОЛЕБЛЮЩИЙСЯ ЦИЛИНДР, ПОГРУЖЕННЫЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННУЮ ЖИДКОСТЬ, ПРИ НАЛИЧИИ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

В линейной постановке с использованием приближения Буссинеска рассмотрена двумерная задача об установившихся колебаниях горизонтально расположенного цилиндра, погруженного в слой линейно стратифицированной жидкости, верхняя граница которого является ледяным покровом. В режиме генерации внутренних волн использован метод распределенных по контуру тела массовых источников, а в режиме отсутствия внутренних волн — интегральное уравнение для возмущенного давления в жидкости. Для случая сплошного ледяного покрова, а также для частных случаев (битого льда, свободной поверхности и твердой крышки) выполнены расчеты гидродинамической нагрузки, действующей на тело, в зависимости от частоты его колебаний.

Ключевые слова: линейная теория волн, стратифицированная жидкость, ледяной покров, колебания погруженного цилиндра, гидродинамическая нагрузка.

В линейной постановке задача о колебаниях тела, находящегося под свободной поверхностью жидкости, и возникающих при этом гидродинамических нагрузках достаточно полно рассмотрена как для случая однородной жидкости, так и для некоторых случаев жидкости с плотностной стратификацией (обзор этих работ приведен в [1]). Однако влияние ледяного покрова на гидродинамические характеристики погруженного тела изучено недостаточно. Лишь в последние годы появились работы, в которых определены коэффициенты присоединенных масс и демпфирования для сферы, погруженной в однородную и двухслойную жидкости [2, 3]. Близкой к радиационной задаче о вынужденных колебаниях погруженного тела является дифракционная задача о рассеянии системы периодических волн, набегающих на неподвижно закрепленное тело. В [4, 5] исследовано косое набежание волн на погруженный в однородную и двухслойную жидкости горизонтально расположенный круговой цилиндр. (В последнем случае внешнее волнение может быть вызвано как поверхностными, так и внутренними волнами.) Появление этих исследований обусловлено активным освоением полярных районов Мирового океана.

В [2–5] использован метод мультипольных разложений, позволяющий получить наиболее точные решения в случае потенциальных течений и тел простейшей геометрии: в двумерном случае — для кругового цилиндра, а в трехмерном — для сферы.

В данной работе предложен метод решения двумерной задачи о малых колебаниях горизонтально расположенного цилиндра произвольного сечения, погруженного в слой линейно стратифицированной жидкости, верхняя граница которого является ледяным покровом. Для частного случая однородной жидкости рассмотрена также задача о рассеянии

поверхностной волны. Используемый метод ранее был применен при исследовании колебаний цилиндра, пересекающего средний слой линейно стратифицированной жидкости в безграничной трехслойной жидкости с однородными верхним и нижним слоями [6].

1. Постановка задачи. В невозмущенном состоянии слой жидкости толщиной H занимает область $-\infty < x < \infty$, $-H < y < 0$ (x, y — горизонтальная и вертикальная координаты). Предполагается, что жидкость является невязкой и несжимаемой, а плотность $\rho_0(y)$ линейно возрастает по мере увеличения глубины: $\rho_0(y) = \rho_s(1 - \alpha y)$, где $\alpha > 0$; $\rho_s = \rho_0(0)$. Снизу жидкость ограничена твердым горизонтальным дном, сверху — плавающим ледяным покровом, который рассматривается как тонкая упругая пластина постоянной толщины. Волновые движения в первоначально покоящейся жидкости вызваны малыми горизонтальными, вертикальными и вращательными колебаниями погруженного тела.

Считая возмущенное движение жидкости и ледяного покрова установившимся, в рамках предположений линейной теории волн выражение для полного возмущенного давления в жидкости можно записать в виде

$$P(x, y, t) = \rho_s \operatorname{Re} \left(\exp(i\omega t) \sum_{j=1}^3 \eta_j p_j(x, y) \right), \quad (1.1)$$

где комплексные функции $p_j(x, y)$ ($j = 1, 2, 3$) характеризуют радиационное давление, обусловленное колебаниями тела с частотой ω по трем степеням свободы с амплитудами η_j ; t — время.

В приближении Буссинеска для линейно стратифицированной жидкости функции $p_j(x, y)$ удовлетворяют уравнению (см., например, [7])

$$\Delta p_j = \frac{N^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, \quad -H < y < 0), \quad (1.2)$$

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_s} \frac{d\rho_0}{dy}} = \sqrt{\alpha g},$$

где $N = \text{const}$ — частота плавучести; g — ускорение свободного падения.

В общем случае нестационарного движения уравнение малых изгибных колебаний ледяного покрова имеет вид [8]

$$M \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + B \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + g\zeta = \frac{P}{\rho_s} \quad (y = 0),$$

$$M = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_s}, \quad B = \frac{E h_1^3}{12(1 - \nu^2)\rho_s}, \quad Q = \frac{K h_1}{\rho_s},$$

где $\zeta(x, t)$ — вертикальное перемещение льда; E, ν, K, ρ_1, h_1 — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, усилие сжатия, плотность и толщина льда. В частном случае при $B = Q = 0$ верхняя поверхность жидкости представляет собой битый лед. Если при этом и $M = 0$, то верхняя граница жидкости становится обычной свободной поверхностью.

Используя кинематическое соотношение на нижней поверхности льда, получаем следующее граничное условие для $p_j(x, y)$ [9, 10]:

$$\left(B \frac{\partial^4}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g - M\omega^2 \right) \frac{\partial p_j}{\partial y} + (N^2 - \omega^2) p_j = 0 \quad (y = 0). \quad (1.3)$$

На замкнутом контуре погруженного тела S ставится условие непротекания

$$n_x \frac{\partial p_j}{\partial x} - \frac{n_y}{\beta^2} \frac{\partial p_j}{\partial y} = \omega^2 n_j \quad (x, y \in S), \quad \beta^2 = \frac{N^2}{\omega^2} - 1. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — внутренняя нормаль к контуру S ;

$$n_1 = n_x, \quad n_2 = n_y, \quad n_3 = (y - y_0)n_1 - (x - x_0)n_2, \quad (1.5)$$

x_0, y_0 — координаты точки, относительно которой происходят вращательные колебания тела.

Граничное условие на дне имеет вид

$$\frac{\partial p_j}{\partial y} = 0 \quad (y = -H). \quad (1.6)$$

В дальнейшем поле следует потребовать выполнения условия излучения, которое означает, что генерируемые волны являются расходящимися.

Гидродинамическая нагрузка, действующая на колеблющийся цилиндр, определяется силой $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и моментом F_3 , которые без учета гидростатической составляющей имеют вид

$$F_k = \sum_{j=1}^3 \eta_j \tau_{kj}, \quad \tau_{kj} = \rho_s \int_S p_j n_k ds = \omega^2 \mu_{kj} - i\omega \lambda_{kj} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.7)$$

Здесь μ_{kj}, λ_{kj} — коэффициенты присоединенных масс и демпфирования соответственно.

Решение задачи (1.2)–(1.4), (1.6) существенно зависит от частоты колебаний тела. При $\omega < N$ ($\beta^2 > 0$) уравнение (1.2) является гиперболическим, и колебания тела генерируют в жидкости как поверхностные, так и внутренние волны. При $\omega > N$ ($\beta^2 < 0$) уравнение (1.2) становится эллиптическим, внутренние волны отсутствуют, и в жидкости возбуждаются только поверхностные волны. Ниже эти случаи рассматриваются более подробно.

2. Случай $\omega < N$. При решении задачи (1.2)–(1.4), (1.6) для соответствующей моды колебаний тела введем неизвестное распределение массовых источников по контуру S , обозначив его $\sigma_j(x, y)$. Тогда возмущение давления в любой точке жидкости можно представить в виде

$$p_j(x, y) = \int_S \sigma_j(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) ds. \quad (2.1)$$

Здесь $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина рассматриваемой задачи, определяющая поле давления в жидкости, вызванное пульсациями массового источника единичной интенсивности.

Для определения функции Грина необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 2\pi \delta(x - \xi) \delta(y - \eta)$$

(δ — дельта-функция Дирака) с граничными условиями, аналогичными (1.3), (1.6), и условием излучения в дальнем поле.

Используя интегральное преобразование Фурье, получаем представление для функции Грина

$$G = -\frac{i\pi}{\beta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos k_n \beta (y + H)}{k_n D_n} \cos k_n \beta (\eta + H) \exp(-ik_n |x - \xi|),$$

где k_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) — вещественные положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(k\beta H) = \frac{C}{k\beta\Lambda(k)}, \quad C = N^2 - \omega^2, \quad \Lambda(k) = Bk^4 - Qk^2 + g - M\omega^2, \quad (2.2)$$

$$D_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2k_n\beta H)}{2k_n\beta} + H \right).$$

Уравнение (2.2) является дисперсионным соотношением для гравитационных волн в линейно стратифицированной жидкости под ледяным покровом постоянной толщины [9, 10]. Это уравнение имеет счетное число простых корней k_n ($k_0 < k_1 < \dots$) для заданного значения частоты ω . Наименьшее волновое число k_0 соответствует поверхностной волне, остальные волновые числа k_n ($n \geq 1$) — внутренним волнам, которые существуют только при $\omega < N$, причем $k_n \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow N$.

С использованием граничного условия (1.4) на поверхности тела S получаем интегральное уравнение для определения функций $\sigma_j(x, y)$

$$\pi\sigma_j(x, y) - \int_S \sigma_j(\xi, \eta) \left(n_1 \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{n_2}{\beta^2} \frac{\partial G}{\partial y} \right) ds = \omega^2 n_j. \quad (2.3)$$

Вычислив распределение особенностей $\sigma_j(x, y)$, можно определить давление (2.1) и гидродинамическую нагрузку (1.7).

Представляет интерес сравнение решения рассматриваемой задачи с более простым вариантом, когда верхняя граница жидкости является твердой крышкой. В этом случае граничное условие (1.3) заменяется условием непротекания

$$\frac{\partial p_j}{\partial y} = 0 \quad (y = 0). \quad (2.4)$$

Функция Грина $G_1(x, y; \xi, \eta)$ задачи (1.2), (1.6), (2.4) имеет вид

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = -\frac{2i\pi}{H\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(k_n\beta y)}{k_n} \cos(k_n\beta\eta) \exp(-ik_n|x - \xi|), \quad k_n = \frac{n\pi}{\beta H}. \quad (2.5)$$

При наличии твердой крышки в жидкости существуют только внутренние волны.

3. Случай $\omega > N$. В данном случае также можно использовать метод распределенных особенностей, но для линейной стратификации жидкости удобнее решать интегральное уравнение для возмущенного давления. Запишем уравнение (1.2) в виде

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2} = 0, \quad \gamma^2 = -\beta^2 = 1 - \frac{N^2}{\omega^2}. \quad (3.1)$$

Если ввести преобразование вертикальной координаты $\bar{y} = \gamma y$, то уравнение (3.1) в системе координат x, \bar{y} сведется к уравнению Лапласа, а граничное условие (1.4) на S — к значению нормальной производной на деформируемом контуре с точностью до множителя, зависящего от геометрии тела. Это позволяет применить аффинное подобие при определении гидродинамической нагрузки, которая действует на произвольный контур, колеблющийся в безграничной однородно стратифицированной жидкости [11].

Используя тождество Грина и условия в дальнем поле, получаем интегральное уравнение, которое для точек, расположенных на деформируемом контуре тела \bar{S} , имеет вид

$$p_j(x, \bar{y}) = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{S}} \left(p_j(\xi, \bar{\eta}) \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} - G(x, \bar{y}; \xi, \bar{\eta}) \frac{\partial p_j}{\partial \bar{n}} \right) d\bar{s}. \quad (3.2)$$

Здесь чертой сверху отмечены величины, представленные в деформируемых координатах.

Функция Грина $G(x, \bar{y}; \xi, \bar{\eta})$ определяется из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} &= 2\pi\delta(x - \xi)\delta(\bar{y} - \bar{\eta}) \quad (-\infty < x < \infty, \quad -\bar{H} < \bar{y} < 0), \\ \gamma \left(B \frac{\partial^4}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g - M\omega^2 \right) \frac{\partial p_j}{\partial \bar{y}} + (N^2 - \omega^2)p_j &= 0 \quad (\bar{y} = 0), \\ \frac{\partial p_j}{\partial \bar{y}} &= 0 \quad (\bar{y} = -\bar{H}), \quad \bar{\eta} = \gamma\eta, \quad \bar{H} = \gamma H. \end{aligned}$$

Решение для функции Грина имеет вид

$$\begin{aligned} G = \ln \frac{\bar{r}}{\bar{r}_1} + pv \int_0^\infty (A(k, \bar{\eta}) \exp(-k\bar{y}) + B(k, \bar{\eta}) \exp(k\bar{y})) \frac{\cos k(x - \xi)}{\Omega(k)} dk - \\ - i\pi (A(k_0, \bar{\eta}) \exp(-k_0\bar{y}) + B(k_0, \bar{\eta}) \exp(k_0\bar{y})) \frac{\cos k_0(x - \xi)}{\Omega'(k_0)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где pv — интеграл в смысле главного значения,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2}, \quad \bar{r}_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (\bar{y} + \bar{\eta})^2}, \\ A(k, \bar{\eta}) &= (C/k - \gamma\Lambda(k)) e^{k(\bar{\eta} - 2\bar{H})} - (C/k + \gamma\Lambda(k)) e^{-k(\bar{\eta} + 2\bar{H})}, \\ B(k, \bar{\eta}) &= -[2\gamma\Lambda(k) e^{k\bar{\eta}} + (C/k - \gamma\Lambda(k)) (e^{k(\bar{\eta} - 2\bar{H})} - e^{-k(\bar{\eta} + 2\bar{H})})], \\ \Omega(k) &= C + \gamma k\Lambda(k) + [C - \gamma k\Lambda(k)] e^{-2k\bar{H}}, \quad \Omega'(k_0) \equiv \left. \frac{d\Omega}{dk} \right|_{k=k_0}. \end{aligned}$$

При определенных ограничениях на коэффициент сжатия Q (см. п. 4) подынтегральное выражение в (3.3) может иметь один простой положительный полюс в точке k_0 , являющийся корнем уравнения

$$\Omega(k_0) = 0. \quad (3.4)$$

Это уравнение равносильно дисперсионному соотношению для поверхностных волн в линейно стратифицированной жидкости при $\omega > N$. Значение k_0 соответствует волновому числу изгибно-гравитационных волн при $B \neq 0$ или обычным поверхностным волнам при $B = Q = M = 0$. Однако в случае битого льда ($B = Q = 0, M \neq 0$) уравнение (3.4) не имеет положительного корня при $\omega > \sqrt{g/M}$ [8]. В этом случае колебания цилиндра не генерируют волновые движения в жидкости, коэффициенты демпфирования равны нулю и последнее слагаемое в (3.3) должно быть опущено. Аналогичная ситуация имеет место при замене ледяной пластины твердой крышкой. В этом случае в (3.3) следует положить $C = 0, \Lambda(k) \equiv g$.

В результате решения интегрального уравнения (3.2) определяется распределение давления по контуру тела, а затем соответствующая гидродинамическая нагрузка. Частным случаем рассматриваемой задачи является исследование волновых движений в жидкости с постоянной плотностью ($N = 0$) под ледяным покровом.

4. Однородная жидкость. Течение однородной жидкости будем считать потенциальным. Аналогично задаче о возбуждении волновых движений жидкости колеблющимся телом можно рассмотреть задачу дифракции о рассеянии набегающей поверхностной волны на неподвижном твердом теле.

Полный потенциал скоростей всего волнового движения можно записать в виде

$$\Phi(x, y, t) = \operatorname{Re} \left(\exp(i\omega t) \sum_{j=0}^4 \eta_j \psi_j(x, y) \right);$$

$$\psi_0(x, y) = \exp(-ik_0 x) \frac{\operatorname{ch} k_0(y + H)}{\operatorname{ch} k_0 H}; \quad (4.1)$$

$$\omega^2 = \frac{k_0(Bk_0^4 - Qk_0^2 + g)}{1 + Mk_0 \operatorname{th} k_0 H} \operatorname{th} k_0 H, \quad (4.2)$$

где функции $\psi_j(x, y)$ ($j = 1, 2, 3$) характеризуют радиационные потенциалы, обусловленные колебаниями тела в покоящейся жидкости по трем степеням свободы с амплитудами η_j , аналогично (1.1); $\psi_0(x, y)$ — потенциал набегающей слева системы регулярных поверхностных волн; $\psi_4(x, y)$ — дифракционный потенциал, описывающий волновое движение, возникающее в результате рассеяния системы волн на неподвижном теле; $\eta_0 = \eta_4$ — амплитуда набегающей волны. Волновое число падающей волны k_0 связано с частотой ω дисперсионным соотношением (4.2), вытекающим из (3.4).

Внутри жидкости функции $\psi_j(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \psi_j = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad -H < y < 0).$$

В случае однородной жидкости согласно (1.3), (1.4), (1.6) граничные условия имеют следующий вид:

— на верхней границе жидкости

$$\left(B \frac{\partial^4}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g - M\omega^2 \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = \omega^2 \psi_j \quad (y = 0); \quad (4.3)$$

— на поверхности тела

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial n} = i\omega \eta_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial \psi_4}{\partial n} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial n} \quad (x, y \in S); \quad (4.4)$$

— на дне

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y} = 0 \quad (y = -H).$$

Значения потенциалов $\psi_j(x, y)$ на контуре S можно вычислить с помощью интегрального уравнения, аналогичного (3.2). Функция Грина определяется из интегрального представления (3.3), в котором следует положить $N = 0$, $\gamma = 1$.

Ниже рассматриваются только такие значения коэффициента сжатия, при которых в уравнении (4.2) существует не более одного корня. Как показано в [12, 13], этот случай имеет место при $Q < 1,4\sqrt{gB}$.

Используя интеграл Грина, можно вычислить потенциалы в дальнем поле. При этом в функции Грина достаточно ограничиться предельными значениями двух последних слагаемых при $x - \xi \rightarrow \pm\infty$:

$$G(x, y; \xi, \eta) \approx -\frac{i\pi}{\Omega_1(k_0)} \left(A_1(k_0, \eta) \exp(-k_0 y) + B_1(k_0, \eta) \exp(k_0 y) \right) \exp[\mp ik_0(x - \xi)].$$

Здесь

$$A_1(k, \eta) = (\omega^2/k - \Lambda(k)) e^{-k(\eta+2H)} - (\omega^2/k + \Lambda(k)) e^{k(\eta-2H)},$$

$$B_1(k, \eta) = (\omega^2/k + \Lambda(k)) (e^{k(\eta-2H)} - e^{-k(\eta+2H)}) - 2\Lambda(k) e^{k\eta},$$

$$\Omega_1(k) = [\Lambda(k) + k\Lambda'(k)](1 - e^{-2kH}) + 2H[k\Lambda(k) + \omega^2] e^{-2kH}.$$

Следовательно, при $x \rightarrow \pm\infty$ с использованием (4.1) и условий на контуре тела (4.4) получаем

$$\psi_j = C_j^\pm \exp(\mp ik_0 x) \operatorname{ch} k_0(y + H) / \operatorname{ch} k_0 H \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где C_j^\pm ($j = 1, 2, 3$) — коэффициенты при радиационных потенциалах:

$$C_j^\pm = \frac{i\Lambda(k_0)}{\Omega_1(k_0)} \int_S e^{\pm ik_0 \xi} \{k_0[n_2 Z_1(k_0, \eta) \pm in_1 Z_2(k_0, \eta)]\psi_j - i\omega n_j Z_2(k_0, \eta)\} ds,$$

C_4^\pm — коэффициент при дифракционном потенциале:

$$C_4^\pm = \frac{i\Lambda(k_0)}{\Omega_1(k_0)} \int_S e^{\pm ik_0 \xi} \left\{ k_0[n_2 Z_1(k_0, \eta) \pm in_1 Z_2(k_0, \eta)]\psi_4 + Z_2(k_0, \eta) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right\} ds,$$

$$Z_{1,2}(k, \eta) = e^{k\eta} \mp e^{-k(\eta+2H)}.$$

В дифракционной задаче коэффициенты прохождения T и отражения R равны соответственно $T = 1 + C_4^+$ и $R = C_4^-$.

Для тела, симметричного относительно вертикальной оси, выполняются следующие соотношения для амплитуд радиационных волн:

$$C_1^+ = -C_1^- = S_1, \quad C_2^+ = C_2^- = S_2, \quad C_3^+ = -C_3^- = S_3.$$

В случае однодогового волнового движения в однородной жидкости под ледяным покровом можно использовать результаты работы [14], которые позволяют получить решение дифракционной задачи с помощью характеристик волнового движения для радиационной задачи при горизонтальных и вертикальных колебаниях тела. В частности, для симметричного тела коэффициенты прохождения и отражения определяются через амплитуды радиационных волн в дальнем поле:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_1}{S_1^*} \right), \quad R = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1}{S_1^*} + \frac{S_2}{S_2^*} \right) \quad (4.5)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение). Следствием этих соотношений является известное энергетическое равенство $|T|^2 + |R|^2 = 1$.

Для однородной жидкости со свободной поверхностью известны соотношения эквивалентности, которые устанавливают связь между амплитудами волнового движения в дальнем поле и гидродинамической нагрузкой (см., например, [15]). Эти соотношения выполняются также для битого льда. Однако в случае волнового движения в жидкости под сплошным ледяным покровом эти соотношения имеют более сложный вид, что вызвано наличием производных высокого порядка по горизонтальной координате в граничном условии (4.3) при $y = 0$ [16].

5. Результаты численных расчетов. Для выполнения расчетов использован эллиптический контур $x^2/a^2 + (y+h)^2/b^2 = 1$, где a, b — большая и малая полуоси эллипса соответственно; h — глубина погружения его центра. Вращательные колебания происходят относительно точки $x_0 = 0, y_0 = -h$ (см. (1.5)). Параметры имеют следующие значения: $E = 5 \cdot 10^9$ Па, $\rho_s = 1025$ кг/м³, $\rho_1 = 922,5$ кг/м³, $K = 10^4$ Н/м², $\nu = 0,3$, $N = 0,05$ с⁻¹, $b = 10$ м, $H = 500$ м. Расчеты выполнены при толщине льда $h_1 = 2$ м (за исключением случаев, которые оговорены особо).

Для решения интегральных уравнений (2.3), (3.2) контур тела S разбивается на K элементов. Внутри каждого элемента вводится дополнительная средняя точка, и распределение искомой величины на каждом элементе аппроксимируется квадратичной функцией

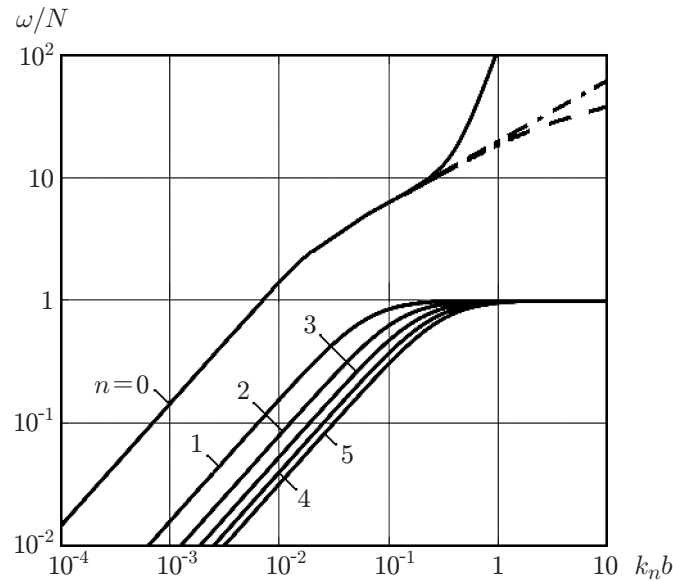


Рис. 1. Дисперсионные кривые:
сплошные линии — ледяной покров, штриховая — битый лед, штрихпунктирная — свободная поверхность

относительно дуговой координаты. Таким образом, для каждого значения $j = 1, 2, 3$ следует решить систему линейных уравнений порядка $2K$ для определения значений σ_j и p_j во всех узловых точках контура S , причем от номера j зависит только правая часть этой системы. В расчетах при $\omega < N$ учитывалось 300 мод внутренних волн, число элементов во всех расчетах равно $K = 20$.

На рис. 1 показаны дисперсионные кривые для поверхностной моды k_0 и первых пяти мод внутренних волн k_1, \dots, k_5 . Сплошные линии соответствуют ледяному покрову, штриховая — битому льду, штрихпунктирная — свободной поверхности. Различия между этими тремя случаями существенны только для поверхностной моды при относительно высоких частотах $\omega > 10N$. Дисперсионные кривые для внутренних волн практически не зависят от условий на верхней границе жидкости и с большой точностью совпадают со значениями, полученными согласно (2.5) в приближении “твердой крышки” (см. [9, 10]).

На рис. 2, 3 представлены зависимости коэффициента присоединенной массы $M_{jj} = \mu_{jj}/\tilde{\mu}_{jj}$ и коэффициента демпфирования $L_{jj} = \lambda_{jj}/(\pi\rho_s\sqrt{gb^3})$ ($j = 1, 2$) от безразмерной частоты $\omega\sqrt{b/g}$ для кругового цилиндра, погруженного на глубину $h = 20, 50$ м соответственно. В этом случае ненулевые значения имеют только коэффициенты гидродинамической нагрузки τ_{11} и τ_{22} в (1.7). Диагональные коэффициенты присоединенных масс отнесены к их значениям в безграничной однородной жидкости $\tilde{\mu}_{jj}$, которые в случае эллиптического контура равны

$$\tilde{\mu}_{11} = \pi\rho_s b^2, \quad \tilde{\mu}_{22} = \pi\rho_s a^2, \quad \tilde{\mu}_{33} = \pi\rho_s(a^2 - b^2)^2/8.$$

В проведенных расчетах различие между значениями гидродинамической нагрузки при горизонтальных и вертикальных колебаниях имеет место только для коэффициентов присоединенной массы при $\omega < N$. В диапазоне частот $\omega\sqrt{b/g} < 0,15$ условия на верхней границе жидкости практически не оказывают влияния: решения почти совпадают с решениями в приближении “твердой крышки”. Только в этом диапазоне частот влияние стратификации существенно. На рис. 2, а, 3, а штриховыми кривыми показаны зависимости коэффициента присоединенной массы μ_{11} от частоты колебаний для однородной жидкости,

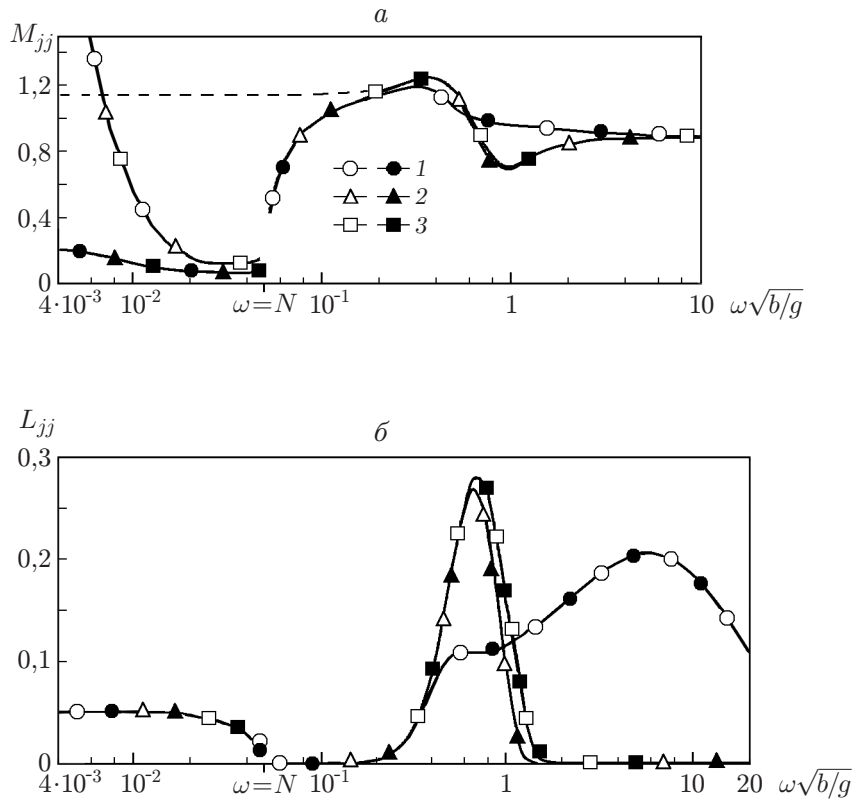


Рис. 2. Зависимости коэффициентов присоединенной массы (а) и демпфирования (б) от частоты колебаний кругового цилиндра при $h = 20$ м: светлые точки — $j = 1$, темные — $j = 2$; 1 — сплошной ледяной покров, 2 — битый лед, 3 — свободная поверхность; штриховая кривая — зависимость $\mu_{11}(\omega\sqrt{b/g})$ для однородной жидкости

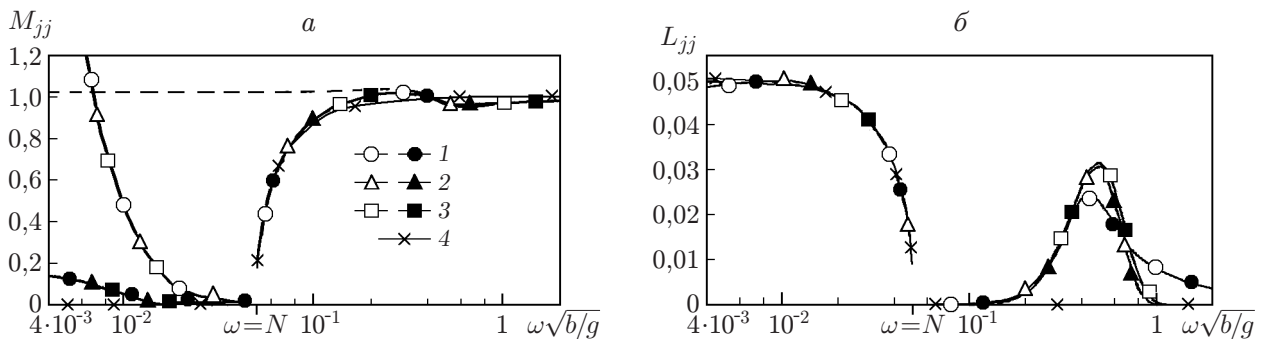


Рис. 3. Зависимости коэффициентов присоединенной массы (а) и демпфирования (б) от частоты колебаний кругового цилиндра при $h = 50$ м: 4 — безграничная однородно стратифицированная жидкость; штриховая кривая — зависимость $\mu_{11}(\omega\sqrt{b/g})$ для однородной жидкости; остальные обозначения те же, что на рис. 2

находящейся под ледяным покровом. В этом случае для кругового цилиндра при достаточно большой толщине слоя жидкости H коэффициенты μ_{11} и μ_{22} практически совпадают.

На рис. 3 показаны зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от частоты колебаний кругового цилиндра в безграничной однородно стратифицированной жидкости (кривые 4). В этом случае решение для гидродинамической нагрузки имеет вид [17]

$$\begin{aligned} \mu_{11} = \mu_{22} = 0, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = \pi \rho_s b^2 \sqrt{N^2 - \omega^2} \quad (\omega < N), \\ \mu_{11} = \mu_{22} = \pi \rho_s b^2 \sqrt{\omega^2 - N^2} / \omega, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = 0 \quad (\omega > N). \end{aligned} \quad (5.1)$$

При достаточно большом заглублении кругового цилиндра полученные численные решения при $\omega < N$ приближаются к зависимостям (5.1) для коэффициента демпфирования как при горизонтальных, так и при вертикальных колебаниях тела и для коэффициента присоединенной массы при вертикальных колебаниях. Значительное увеличение коэффициента присоединенной массы при низкочастотных горизонтальных колебаниях цилиндра можно объяснить их блокировкой в случае стратифицированной жидкости конечной глубины. В [9, 10] при исследовании внутренних волн под ледяным покровом обнаружено увеличение прогибов льда на частотах ω , близких к N . Однако проведенные расчеты показывают, что при $\omega \rightarrow N$ коэффициенты демпфирования, характеризующие мощность, затрачиваемую телом на генерацию волн, резко уменьшаются.

Из рис. 2, 3 следует, что в области $\omega \sqrt{b/g} < 0,15$, где влияние стратификации существенно, гидродинамические нагрузки незначительно меняются с увеличением глубины погружения тела. Однако в области высоких частот, где волновые нагрузки определяются поверхностной модой, происходит их резкое уменьшение с увеличением глубины.

Зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от частоты колебаний эллиптического цилиндра при $a = h = 2b$ в случае однородной жидкости представлены на рис. 4, 5 соответственно. В случае эллиптического цилиндра ненулевые значения имеют только диагональные коэффициенты гидродинамической нагрузки τ_{jj} ($j = 1, 2, 3$) и $\tau_{13} = \tau_{31}$ в (1.7). По оси ординат помимо коэффициентов M_{jj} , L_{jj} ($j = 1, 2$) отложены коэффициенты

$$M_{33} = \frac{\mu_{33}}{\tilde{\mu}_{33}}, \quad M_{13} = \frac{\mu_{13}}{\pi \rho_s b^3}, \quad L_{33} = \frac{\lambda_{33}}{\pi \rho_s \sqrt{gb^7}}, \quad L_{13} = \frac{\lambda_{13}}{\pi \rho_s \sqrt{gb^5}}.$$

Из рис. 2–5 следует, что влияние различных условий на верхней границе жидкости существенно только при относительно высоких частотах. При наличии битого льда гидродинамические нагрузки незначительно отличаются от нагрузок в случае свободной поверхности. В случае сплошного ледяного покрова коэффициенты присоединенных масс изменяются более плавно, чем в случаях свободной поверхности и битого льда, тогда как максимальные значения коэффициентов демпфирования и соответствующие им частоты меняются существенно.

На рис. 6 показана зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ в дифракционной задаче, определенного согласно (4.5), от частоты набегающей поверхностной волны для эллиптического цилиндра. Результаты проведенного исследования показывают, что максимальные значения коэффициента отражения имеют место в случаях свободной поверхности и битого льда. С ростом толщины сплошного ледяного покрова уменьшается максимальное значение $|R|$, но увеличивается диапазон частот, при которых значение $|R|$ отлично от нуля. В случае глубоко погруженного эллиптического цилиндра для расчета гидродинамической нагрузки в дифракционной задаче можно использовать приближенные решения [18].

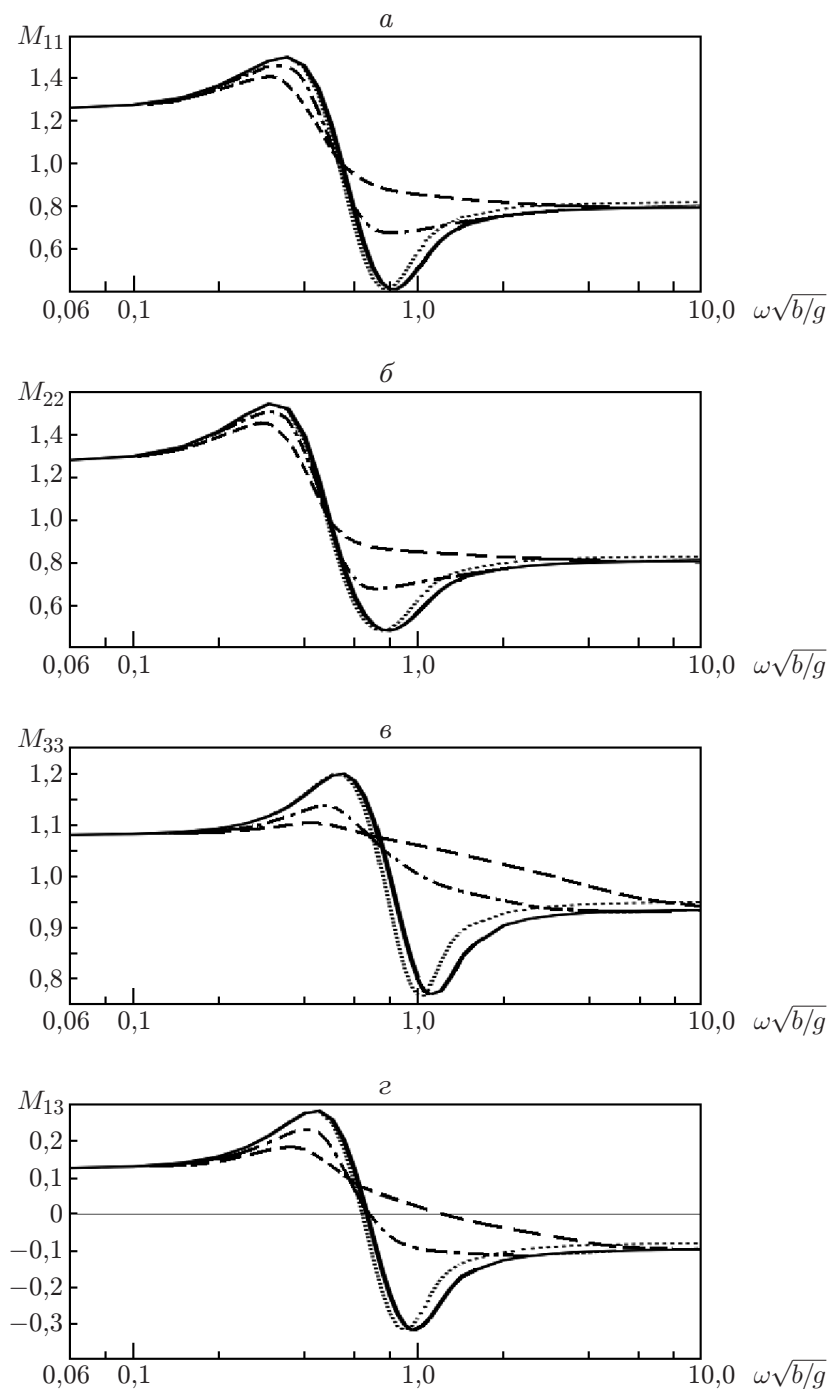


Рис. 4. Зависимости коэффициентов присоединенной массы M_{11} (*a*), M_{22} (*б*), M_{33} (*в*), M_{13} (*г*) от частоты колебаний эллиптического цилиндра при $a = h = 20$ м: сплошные линии — свободная поверхность, пунктирные — битый лед, штриховые — сплошной лед ($h_1 = 2$ м), штрихпунктирные — сплошной лед ($h_1 = 1$ м)

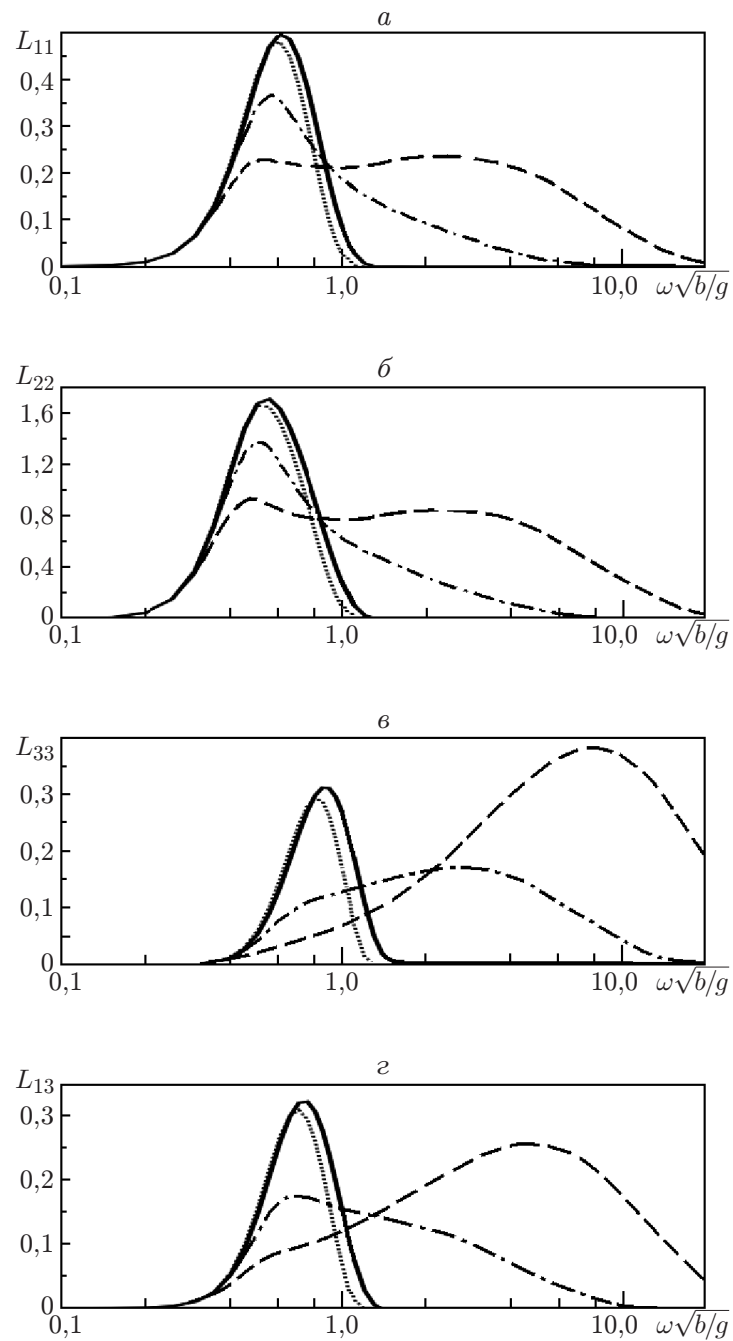


Рис. 5. Зависимости коэффициентов демпфирования L_{11} (*a*), L_{22} (*б*), L_{33} (*в*), L_{13} (*г*) от частоты колебаний эллиптического цилиндра при $a = h = 20$ м (обозначения те же, что на рис. 4)

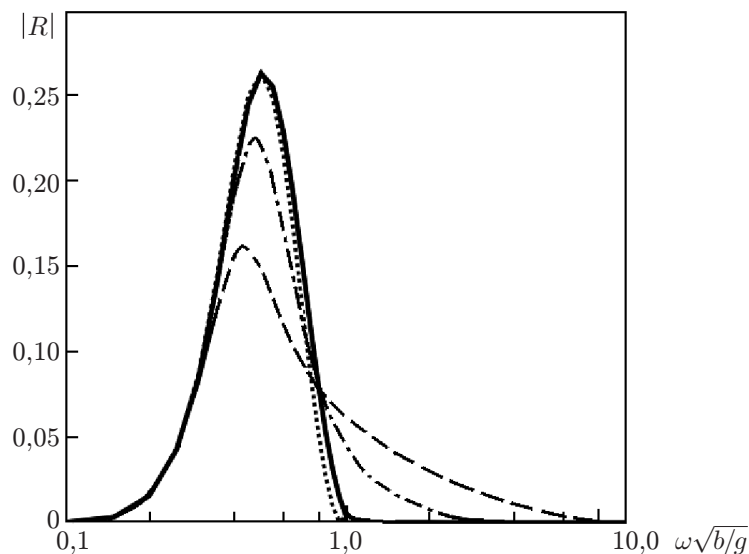


Рис. 6. Зависимость коэффициента отражения от частоты набегающей волны для эллиптического цилиндра при $a = h = 20$ м (обозначения те же, что на рис. 4)

Сила ледового сжатия практически не влияет на гидродинамические нагрузки в диапазоне $0 < K < 10^4$ Н/м². Аналогичный вывод о влиянии на распространение изгибно-гравитационных волн только очень больших значений параметра K сделан в работе [19], где также отмечено, что указанный диапазон включает все значения этого параметра, возможные в реальных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Korotkin A. I.** Added masses of ship structures. S. l.: Springer, 2009. (Ser. Fluid mechanics and its applications; V. 88).
2. **Das D., Mandal B. N.** Water wave radiation by a sphere submerged in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78, N 8. P. 649–661.
3. **Mohapatra S., Bora S. N.** Radiation of water waves by a sphere in an ice-covered two-layer fluid of finite depth // J. Adv. Res. Appl. Math. 2010. V. 2, N 1. P. 46–63.
4. **Das D., Mandal B. N.** Oblique wave scattering by a circular cylinder submerged beneath an ice-cover // Intern. J. Engng Sci. 2006. V. 44, N 3/4. P. 166–179.
5. **Das D., Mandal B. N.** Wave scattering by a horizontal circular cylinder in a two-layer fluid with an ice-cover // Intern. J. Engng Sci. 2007. V. 45, N 10. P. 842–872.
6. **Стурова И. В.** Колебания цилиндра, пересекающего слой линейно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 149–157.
7. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
8. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
9. **Музылев С. В., Олейникова Л. Н.** К теории внутренних волн под ледяным покровом // Океанология. 2007. Т. 47, № 2. С. 191–196.
10. **Музылев С. В.** Внутренние волны под ледяным покровом // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 3. С. 397–400.

11. **Ermanyuk E. V.** The rule of affine similitude for the force coefficients of a body oscillating in a uniformly stratified fluid // *Exp. Fluids*. 2002. V. 32, N 2. P. 242–251.
12. **Букатов А. Е.** Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // *Прикл. механика*. 1981. Т. 17, № 1. С. 93–98.
13. **Букатов А. Е., Завьялов Д. Д.** Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 1995. № 3. С. 121–126.
14. **McIver M.** Global relationships between two-dimensional water wave potentials // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 312. P. 299–309.
15. **Mei C. C., Stiassnie M., Yue D. K.-P.** Theory and applications of ocean surface waves. Pt 1. Linear aspects. Singapore: World Sci. Publ. Co, 2009. (Ser. Advanced series on ocean engineering; V. 23).
16. **Das D., Mandal B. N., Chakrabarti A.** Energy identities in water wave theory for free-surface boundary condition with higher-order derivatives // *Fluid Dynamics Res.* 2008. V. 40, N 4. P. 253–272.
17. **Hurley D. G.** The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 1. Inviscid solution // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 351. P. 105–118.
18. **Стурова И. В.** Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела без хода в двухслойной жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 1994. № 3. С. 144–155.
19. **Schulkes R. M. S. M., Hosking R. J., Sneyd A. D.** Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 180. P. 297–318.

*Поступила в редакцию 3/III 2010 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 2010 г.*
