УДК 512.643

Об описании пар квазикоммутирующих теплицевых и ганкелевых матриц*

В.Н. Чугунов[1], Х.Д. Икрамов[2]

[1]Институт вычислительной математики Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, 119333

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991
E-mails: chugunov.vadim@gmail.com (Чугунов В.Н.), ikramov@cs.msu.su (Икрамов Х.Д.)

Чугунов В.Н., Икрамов Х.Д. Об описании пар квазикоммутирующих теплицевых и ганкелевых матриц // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 4. — С. 439–444.

Квадратные матрицы A и B одного порядка квазикоммутируют, если $AB = \sigma BA$ для некоторого параметра σ. Классические определения коммутирования и антикоммутирования являются частными случаями этого определения. Мы даем полное описание множеств пар квазикоммутирующих теплицевых и ганкелевых матриц для $\sigma \neq \pm 1$.

DOI: 10.15372/SJNM20170407

Ключевые слова: *теплицева матрица, ганкелева матрица, ϕ-циркулянт, квазикоммутирующие матрицы.*

Chugunov V.N., Ikramov Kh.D. A description of pairs of the quasi-commuting Toeplitz and Hankel matrices // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 4. — P. 439–444.

We say that the square matrices A and B are of the same order quasi-commute if $AB = \sigma BA$ for some scalar σ. Classical relations of commutation and anti-commutation are particular cases of this definition. We give a complete description of pairs of the quasi-commuting Toeplitz and Hankel matrices for $\sigma \neq \pm 1$.

Keywords: *Toeplitz matrix, Hankel matrix, ϕ-circulant, quasi-commuting matrices.*

1. Постановка задачи

Теплицевой называется $(n \times n)$-матрица T, имеющая вид:

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется $(n \times n)$-матрица H вида:

*Работа первого автора поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 14-11-00806).

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Переставив столбцы теплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей теплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n,$$

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Будем называть T теплицевой матрицей, *соответствующей* ганкелевой матрице H.

Теплицева матрица (1) называется *ϕ-циркулянтом*, если

$$t_{-j} = \phi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ганкелеву матрицу (2) называем *ганкелевым ϕ-циркулянтом*, если

$$h_{-j} = \phi h_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\phi \in \mathbf{C}$.

Ганкелева матрица H называется *верхнетреугольной*, если

$$\{H\}_{km} = 0 \quad \text{при} \quad k + m > n + 1,$$

и *нижнетреугольной*, если

$$\{H\}_{km} = 0 \quad \text{при} \quad k + m < n + 1.$$

Эти определения отличаются от общепринятого представления о треугольных матрицах и оправданы тем, что для ганкелевых матриц важно направление вдоль антидиагонали $(1, n), (2, n-1), \dots, (n, 1)$, а не главной диагонали.

Условия, при которых теплицевы матрицы коммутируют, известны, по крайней мере, с 1998 г. (см. [1]). Эти условия тесно связаны с задачей об описании нормальных теплицевых матриц, решенной авторами примерно в то же время [2]. Несколько лет назад авторы дали решение значительно более трудной задачи о классификации нормальных ганкелевых матриц [3]. Опираясь на это описание, В.И. Гельфгат сформулировал условия перестановочности пары комплексных ганкелевых матриц [4].

В недавней публикации [5] первый автор нашел условия, при которых ганкелевы матрицы H_1 и H_2 антикоммутируют, что означает $H_1H_2 = -H_2H_1$. Более сложная задача описания пар антикоммутирующих теплицевых матриц остается пока открытой. Ее частный случай для кососимметричных теплицевых матриц решается теоремой 2 из статьи [6].

Определения коммутирующих и антикоммутирующих матриц можно обобщить следующим образом. Будем говорить, что матрицы A и B одного порядка *квазикоммутируют* или, более точно, что они *σ-коммутируют*, если найдется число σ такое, что

$$AB = \sigma BA.$$

Квазикоммутирующие матрицы играют важную роль в квантовой физике (см. по этому поводу монографии [7, 8]).

В настоящей работе исследуются задачи о σ-коммутировании теплицевых и ганкелевых матриц для $\sigma \neq \pm 1$. Как видно из [4] и [5], условия коммутирования и антикоммутирования ганкелевых матриц формулируются и обосновываются довольно сложно. Напротив, обе указанные задачи о σ-коммутировании решаются весьма просто. Их решения даются следующими утверждениями.

Теорема 1. *Ненулевые теплицевы матрицы T_1 и T_2 σ-коммутируют $(\sigma \neq \pm 1)$ тогда и только тогда, когда они принадлежат одному из следующих классов*:

Класс 1.1. Матрицы T_1 и T_2 — ϕ-циркулянты для одного и того же числа ϕ $(\phi \neq 0)$. При этом T_1 и T_2 делят нуль, т. е. $T_1 T_2 = 0$.

Класс 1.2. Обе матрицы T_1 и T_2 — верхнетреугольные или же обе — нижнетреугольные. В первом случае k последних строк в T_1 и $n - k$ последних строк в T_2, где $0 < k < n$, — нулевые. Во втором случае нулевыми являются первые k строк в T_1 и $n - k$ первых строк в T_2.

Теорема 2. *Ненулевые ганкелевы матрицы H_1 и H_2 σ-коммутируют $(\sigma \neq \pm 1)$ тогда и только тогда, когда они принадлежат одному из следующих классов*:

Класс 2.1. Матрица H_1 есть ганкелев ϕ-циркулянт, а H_2 — ганкелев $1/\phi$-циркулянт $(\phi \neq 0)$. При этом H_1 и H_2 делят нуль, т. е. $H_1 H_2 = 0$.

Класс 2.2. H_1 и H_2 — ганкелевы треугольные матрицы различного типа. Если H_1 — верхнетреугольная матрица, то ее последние k столбцов, где $0 < k < n$, — нулевые. В нижнетреугольной матрице H_2 нулевыми являются первые $n - k$ столбцов. Если же H_1 — нижнетреугольная матрица, то в ней, наоборот, первые k столбцов нулевые, а в H_2 нулевыми являются последние $n - k$ столбцов.

Как видно из теоремы 1, σ-коммутирующие $(\sigma \neq \pm 1)$ теплицевы матрицы T_1 и T_2 обоих классов должны делить нуль. То же самое, согласно теореме 2, верно для всех пар σ-коммутирующих ганкелевых матриц H_1 и H_2.

Доказательства теорем 1 и 2 даны в п. 2. В этих доказательствах используется следующий вспомогательный факт.

Лемма 1. *Произведение нескалярных теплицевых матриц T_1 и T_2 тогда и только тогда является теплицевой матрицей, когда T_1 и T_2 принадлежат хотя бы одному из следующих классов*:

Класс 1. Матрицы T_1 и T_2 суть ϕ-циркулянты для одного и того же числа $\phi \neq 0$.

Класс 2. Обе матрицы T_1 и T_2 — верхнетреугольные или же обе — нижнетреугольные.

Этот факт принадлежит к теплицеву фольклору. Все знают о нем, но никто не знает первоисточника.

2. Доказательства теорем 1 и 2

В данном пункте установим справедливость теорем 1 и 2.

Доказательство (теоремы 1). Рассмотрим условие σ-коммутирования теплицевых матриц

$$T_1 T_2 = \sigma T_2 T_1. \tag{3}$$

Транспонируя обе части в (3), получаем соотношение

$$T_2^\top T_1^\top = \sigma T_1^\top T_2^\top,$$

которое после умножения справа и слева на $\mathcal{P}_n$ можно записать как

$$\mathcal{P}_n T_2^\top \mathcal{P}_n \mathcal{P}_n T_1^\top \mathcal{P}_n = \sigma \mathcal{P}_n T_1^\top \mathcal{P}_n \mathcal{P}_n T_2^\top \mathcal{P}_n.$$

Теплицевы матрицы T_1 и T_2 персимметричны (т. е. симметричны относительно антидиагонали). Это обстоятельство выражается равенствами:

$$\mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = T_1^\top, \qquad \mathcal{P}_n T_2 \mathcal{P}_n = T_2^\top, \tag{4}$$

приводящими выписанное выше соотношение к виду

$$T_2 T_1 = \sigma T_1 T_2. \tag{5}$$

Из (3) и (5) выводим

$$T_1 T_2 = \sigma T_2 T_1 = \sigma\,(\sigma T_1 T_2) = \sigma^2 T_1 T_2$$

или

$$(1-\sigma^2) T_1 T_2 = 0.$$

Так как $\sigma \neq \pm 1$, то $T_1 T_2 = 0$ и, в силу леммы, получаем утверждение теоремы 1. $\square$

Доказательство (теоремы 2). Рассмотрим условие σ-коммутирования ганкелевых матриц

$$H_1 H_2 = \sigma H_2 H_1.$$

От пары H_1 и H_2 перейдем к паре соответствующих теплицевых матриц T_1 и T_2, т. е. $H_1 = T_1 \mathcal{P}_n$ и $H_2 = T_2 \mathcal{P}_n$. Рассматриваемое условие приобретает вид

$$T_1 \mathcal{P}_n T_2 \mathcal{P}_n = \sigma T_2 \mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n.$$

Снова применяя равенства (4), получаем условие

$$T_1 T_2^\top = \sigma T_2 T_1^\top, \tag{6}$$

после транспонирования которого приходим к соотношению

$$T_2 T_1^\top = \sigma T_1 T_2^\top. \tag{7}$$

Из (6) и (7) выводим

$$T_1T_2^\top = \sigma T_2T_1^\top = \sigma\left(\sigma T_1T_2^\top\right) = \sigma^2 T_1T_2^\top$$

или

$$(1-\sigma^2)T_1T_2^\top = 0.$$

Так как $\sigma \neq \pm 1$, то $T_1T_2^\top = 0$. Применяя лемму, видим, что если T_1 и $T_2^\top$ являются ϕ-циркулянтами для одного и того же числа ϕ, то H_1 и H_2 будут соответственно ганкелевым ϕ-циркулянтом и ганкелевым $1/\phi$-циркулянтом. Если же теплицевы матрицы T_1 и $T_2^\top$ — верхние (нижние) треугольные, то исходные ганкелевы матрицы имеют разные типы треугольности. И в том, и в другом случае H_1 и H_2 должны делить нуль. □

Литература

1. **Гельфгат В.И.** Условия коммутирования теплицевых матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 1. — С. 11–14. — Перевод: Gel'fgat V.I. Commutation criterion for Toeplitz matrices // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1998. — Vol. 38, № 1. — P. 7–10.
2. **Икрамов Х.Д.** Об описании нормальных теплицевых матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 473–479. — Перевод: Ikramov Kh.D. Describing normal Toeplitz matrices // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1994. — Vol. 34, № 3. — P. 399–404.
3. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A complete solution of the normal Hankel problem // Linear Algebra and its Appl. — 2010. — Vol. 432, № 12. — P. 3210–3230.
4. **Гельфгат В.И.** Условия коммутирования ганкелевых матриц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 7. — С. 1181–1193. — Перевод: Gel'fgat V. I. Commutation conditions for Hankel matrices // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 2011. — Vol. 51, № 7. — P. 1102–1113.
5. **Чугунов В.Н.** Об описании пар антикоммутирующих ганкелевых матриц // Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А. Стеклова Российской академии наук. — 2016. — Т. 453. — С. 243–257. — Перевод: Chugunov V.N. On the description of pairs of anti-commuting Hankel matrices// J. of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 453, № 6. — P. 971–981.
6. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** Permutability of Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 467. — P. 226–242.
7. **Kassel C.** Quantum Groups. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 155. — New York: Springer-Verlag, 1995.
8. **Manin Yu.I.** Quantum Groups and Non-Commutative Geometry. — Montreal: CRM, 1988.

Поступила в редакцию 27 февраля 2017 г.,
в окончательном варианте 19 апреля 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Gel'fgat V.I.** Usloviya kommutirovaniya teplitsevyh matrits // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 1. — S. 11–14. — Perevod: Gel'fgat V.I. Commutation criterion for Toeplitz matrices // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1998. — Vol. 38, № 1. — P. 7–10.
2. **Ikramov Kh.D.** Ob opisanii normal'nyh teplitsevyh matrits // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1994. — T. 34, № 3. — S. 473–479. — Perevod: Ikramov Kh.D. Describing normal Toeplitz matrices // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 1994. — Vol. 34, № 3. — P. 399–404.
3. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** A complete solution of the normal Hankel problem // Linear Algebra and its Appl. — 2010. — Vol. 432, № 12. — P. 3210–3230.

4. **Gel'fgat V.I.** Usloviya kommutirovaniya gankelevyh matrits // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2011. — T. 51, № 7. — S. 1181–1193. — Perevod: Gel'fgat V.I. Commutation conditions for Hankel matrices // Comput. Mathem. and Math. Physics. — 2011. — Vol. 51, № 7. — P. 1102–1113.

5. **Chugunov V.N.** Ob opisanii par antikommutiruyushchih gankelevyh matrits // Zapiski nauchnyh seminarov POMI im. V.A. Steklova Rossiyskoy akademii nauk. — 2016. — T. 453. — S. 243–257. — Perevod: Chugunov V.N. On the description of pairs of anti-commuting Hankel matrices// J. of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 453, № 6. — P. 971–981.

6. **Chugunov V.N., Ikramov Kh.D.** Permutability of Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra Appl. — 2015. — Vol. 467. — P. 226–242.

7. **Kassel C.** Quantum Groups. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 155. — New York: Springer-Verlag, 1995.

8. **Manin Yu.I.** Quantum Groups and Non-Commutative Geometry. — Montreal: CRM, 1988.