

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodman F. O. On the theory of accommodation coefficients, *Surface Sci.*, 1968, vol. 10, p. 283.
2. Долгов А. С. О динамике неоднородной одномерной цепи гармонических осцилляторов.—*Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1971, № 5, 48.
3. Tasi J. Dynamic initial slip in a linear chain. *Phys. Rev.*, 1972, Ser. B, vol. 6, p. 4851.
4. Долгов А. С. Общая нестационарная задача динамики кристаллической решетки в гармоническом приближении.—*ФТТ*, 1973, № 15, с. 421.
5. Улам С. Нерешенные математические проблемы. М., «Наука», 1964.
6. Леонас В. Б. Об обмене энергией при столкновении частиц с твердой стенкой.—*ПМТФ*, 1963, № 6, с. 124.
7. Рыжов Ю. А., Стриженов Д. С. О взаимодействии атомов с поверхностью твердого тела.—*ПМТФ*, 1967, № 4, с. 113.
8. Долгов А. С. О диссипации энергии в цепочке связанных гармонических осцилляторов.—*ПМТФ*, 1971, № 1, с. 46.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
10. Моисеев И. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
11. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.

УДК 532.542 : 660.095.26

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ИЗМЕНЕНИЕМ ВЯЗКОСТИ С ГЛУБИНОЙ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Д. А. Ваганов

(Москва)

Химические превращения сопровождаются изменением вязкости, причем в процессе полимеризации весьма значительным. Изменение вязкости с глубиной превращения приводит к появлению специфических гидродинамических эффектов при течении реагирующей жидкости. Некоторые из этих эффектов будут обсуждены в данной работе.

1. Рассмотрим течение реагирующей жидкости в трубе. Обозначим через z_0 —длинну трубы; P_0 —перепад давления по длине трубы; v —объемный расход жидкости, отнесенный к единице площади сечения; t_0 —характерное время химических превращений; μ —вязкость, μ_0 и μ_* —начальную вязкость жидкости и вязкость жидкости при полном превращении соответственно; r —радиус трубы; z —расстояние от начала трубы; η —глубину превращения. Плотность жидкости будем считать постоянной, так что v совпадает со средней скоростью течения жидкости.

Введем безразмерные величины

$$(1.1) \quad \kappa = P_0 / \left(8 \frac{\mu_0}{r^2} \frac{z_0}{t_0} z_0 \right); \quad \theta = \left(\frac{z_0}{v} \right) / t_0; \quad \omega = v / \left(\frac{z_0}{t_0} \right) = \theta^{-1},$$

где κ —безразмерный перепад давления по длине трубы, ω —безразмерный расход жидкости, а в стационарном режиме θ является безразмерным средним временем пребывания жидкости в трубе.

В общем случае соотношение между перепадом давления и расходом жидкости может быть записано в виде

$$(1.2) \quad \kappa = \lambda \omega,$$

где λ —безразмерное сопротивление, оказываемое движению жидкости, которое зависит от имеющегося в данный момент времени распределения вязкости жидкости в трубе. Если вязкость жидкости не меняется, то, согласно закону Пуазейля [1], при установившемся ламинарном течении жидкости $\lambda = 1$.

Поддерживая постоянным перепад давления или расход жидкости, можно получить стационарный режим течения. В нем λ является функцией среднего времени пребывания жидкости в трубе.

$$(1.3) \quad \lambda = F(\theta),$$

которую можно определить, например, из опытов с поддерживаемым постоянным расходом жидкости.

В случае экзотермической реакции функция $F(\theta)$ может быть неоднозначной из-за существования различных тепловых режимов. Однако для выявления характерных черт явления достаточно разобрать простейший случай, когда функция $F(\theta)$ однозначна.

2. Рассмотрим течение жидкости при постоянном перепаде давления. Для нахождения стационарного значения расхода жидкости по заданному значению перепада давления из (1.2) и (1.3) получаем уравнение

$$(2.1) \quad \kappa\theta = F(\theta).$$

Искомое решение этого уравнения в координатах θ , λ представляет собой точку пересечения прямой, выходящей из начала координат и имеющей тангенс угла наклона, равный κ , с графиком функции $\lambda = F(\theta)$.

При любом перепаде давления существует стационарный режим течения, т. е. при любом κ уравнение (2.1) имеет решение. Однако в некоторых случаях решение уравнения (2.1) может оказаться не единственным. Рассмотрим, к чему это может привести.

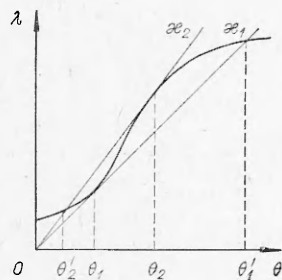
Если при всех κ решение уравнения (2.1) единственно, то зависимость стационарного значения расхода жидкости от перепада давления является непрерывной, и надлежащим выбором перепада давления можно получить любое наперед заданное значение времени пребывания жидкости в трубе, а значит и любую глубину превращения на выходе из трубы.

Пусть теперь при $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ уравнение (2.1) допускает три различных решения. Графически это означает, что соответствующие этим значениям κ прямые трижды пересекают график функции $\lambda = F(\theta)$ (фиг. 1). Прямые, выходящие из начала координат с тангенсами угла наклона, равными κ_1 и κ_2 имеют точку касания и точку пересечения с графиком функции $\lambda = F(\theta)$. Обозначим значения параметров в точках касания индексами 1 и 2 соответственно, а значения параметров в точке пересечения отметим дополнительным штрихом.

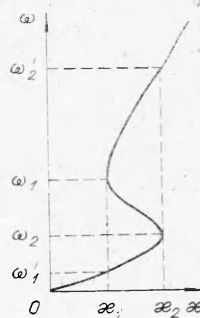
В данном случае значения κ , θ , удовлетворяющие уравнению (2.1), в координатах κ , $\omega = \theta^{-1}$ образуют характерную S-образную кривую (фиг. 2). Очевидно, что при уменьшении κ от достаточно большого значения до $\kappa = \kappa_1$ стационарное значение ω непрерывно уменьшается до $\omega = \omega_1$ вдоль верхней ветви S-образной кривой. Дальнейшее уменьшение κ на сколь угодно малую величину приводит к скачку стационарного значения ω от $\omega = \omega_1$ до $\omega = \omega_1' < \omega_1$. При малых $\kappa < \kappa_1$ стационарное значение ω находится на нижней ветви S-образной кривой, и, если κ начинает расти от достаточно низкого значения, то вплоть до $\kappa = \kappa_2 > \kappa_1$ стационарное значение ω остается на нижней ветви кривой. Поэтому в зависимости от направления изменения κ при $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ имеют место различные стационарные состояния. Происходящий при $\kappa = \kappa_2$ переход с нижней ветви S-образной кривой на верхнюю ветвь сопровождается скачком стационарного значения ω от $\omega = \omega_2$ до $\omega = \omega_2' > \omega_2$, которым соответствуют и скачки глубины превращения на выходе из трубы.

Таким образом, неединственность решения уравнения (2.1) приводит к гистерезисному характеру зависимости стационарного значения расхода жидкости, а тем самым — времени пребывания жидкости в трубе и глубины превращения на выходе из трубы от перепада давления.

Перепады давления, при которых происходит скачкообразное падение или рост стационарного значения расхода жидкости, назовем соответственно нижним и верхним критическими перепадами давления. При течении с поддерживаемым постоянным расходом жидкости критическим перепадам давления соответствуют точки минимума



Фиг. 1



Фиг. 2

и максимума зависимости стационарного значения перепада давления от расхода жидкости.

Стационарные состояния, лежащие на промежуточной ветви S-образной кривой на фиг. 2, не могут быть достигнуты с помощью изменения перепада давления. Можно утверждать, что эти состояния при постоянном перепаде давления являются неустойчивыми.

3. Простейшей моделью, позволяющей проиллюстрировать сделанные выше заключения, является следующая одномерная модель.

Примем, что распределения температуры, концентрации и вязкости по сечению трубы отсутствуют. Это допущение соответствует часто используемой одномерной модели трубчатого реактора. Считая течение жидкости установившимся и ламинарным, для градиента давления dP/dz имеем [1]

$$(3.1) \quad dP/dz = -8\mu v/r^2.$$

Интегрируя (3.1) по длине трубы и вводя безразмерные величины (1.1), находим

$$(3.2) \quad \lambda = \int_0^{z_0} \mu dz / \mu_0 z_0,$$

т. е. λ совпадает с безразмерной средней вязкостью жидкости в трубе.

Предположим, что течение является изотермическим, а влиянием продольной диффузии можно пренебречь. Тогда в любом сечении в стационарном режиме глубина превращения, а значит и вязкость жидкости, будут определяться лишь значением отношения z/v , представляющего собой среднее время, за которое жидкость достигает данное сечение. Зависимость вязкости от этого отношения не отличается от изменения вязкости во времени t при химических превращениях в неподвижной жидкости, которое можно считать известным и записать в виде

$$(3.3) \quad \mu = \mu_0 f(\tau),$$

где $\tau = t/t_0$; $f(0) = 1$; $f(\infty) = \mu_*/\mu_0$. Из (3.2) и (3.3) для функции $F(\theta)$ (1.3) получаем выражение

$$F(\theta) = \theta^{-1} \int_0^\theta f(\tau) d\tau, \quad F(0) = 1, \quad F(\infty) = \mu_*/\mu_0.$$

Представим изменение вязкости во времени (3.3) в виде

$$(3.4) \quad \mu/\mu_0 = f(\tau) = 1 + \delta f_0(\tau),$$

где $\delta = (\mu_* - \mu_0)/\mu_0$ определяет величину относительного изменения вязкости, а функция $f_0(\tau)$ описывает характер этого изменения во времени, $f_0(0) = 0$, $f_0(\infty) = 1$. Изменение вязкости с глубиной превращения при малых η может быть аппроксимировано степенной зависимостью. Положим в (3.4)

$$(3.5) \quad f_0 = \eta^v, \quad v < 0$$

и рассмотрим реакцию первого порядка

$$(3.6) \quad d\eta/d\tau = 1 - \eta.$$

С учетом (3.5) и (3.6) из (3.4) следует

$$d^2f/d\tau^2 = \delta v \eta^{v-2} (1 - \eta)(v - 1 - \eta v).$$

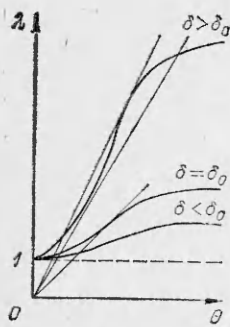
Пусть $v > 1$ и $\delta > 0$. Тогда при $\eta < (v-1)/v$ $d^2f/d\tau^2 > 0$, а так как

$$\frac{d^2F}{d\theta^2} = \theta^{-3} \int_0^\theta \tau^2 \frac{d^2f}{d\tau^2} d\tau,$$

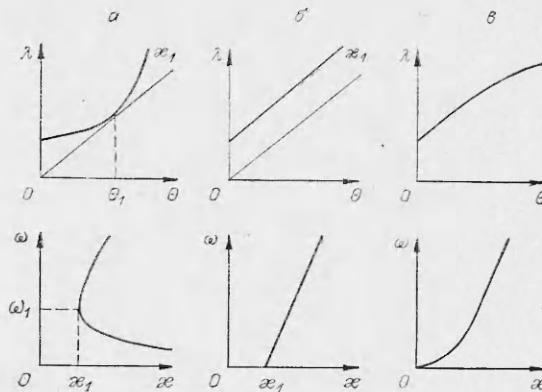
то при малых θ функция $F(\theta)$ выпукла вниз, $d^2F/d\theta^2 > 0$. Как показано на фиг. 3, при достаточно больших δ ($\delta > \delta_0$) существуют такие выходящие из начала координат прямые, которые пересекают график функции $\lambda = F(\theta)$ в нескольких точках, что и означает неединственность решения уравнения (2.1). Значение δ_0 определяется только характером относительного изменения вязкости в масштабе безразмерного времени τ и не зависит от абсолютного значения характерного времени химических превращений t_0 .

В случае нулевого порядка реакции и степенной зависимости вязкости жидкости от глубины превращения (3.5), т. е. когда

$$(3.7) \quad \mu/\mu_0 = f(\tau) = \begin{cases} 1 + \delta\tau^v & \text{при } \tau \leq 1, \\ 1 + \delta = \mu_*/\mu_0 & \text{при } \tau > 1, \end{cases}$$



Фиг. 3



Фиг. 4.

уравнение (2.1) имеет достаточно простой вид, и для критических значений получают следующие выражения:

$$(3.8) \quad \delta_0 = \frac{\nu + 1}{\nu - 1}; \quad \kappa_1 = \frac{\nu}{\nu - 1} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^{1/\nu}; \quad \kappa_2 = \frac{\nu + 1}{\nu} \frac{(1 + \delta)^2}{4\delta}, \quad (\nu > 1).$$

Чем более резко выражен ускоренный рост вязкости во времени, тем при меньших значениях δ возникают критические явления. Однако уменьшение δ_0 ограничено снизу и, как показывает предельный переход $\nu \rightarrow \infty$ в выражениях (3.7) и (3.8), даже при наиболее резком скачкообразном росте вязкости $\delta_0 = 1$. Уменьшение вязкости с глубиной превращения не приводит к появлению критических явлений.

4. Иногда при полном превращении «жидкость» не обладает текучестью, что формально соответствует $\mu_* = \infty$. В этом случае увеличение времени пребывания ее в трубе сопровождается неограниченным ростом сопротивления, а потому нижняя ветвь S-образной кривой на фиг. 2 совпадает с осью абсцисс. В описанной выше одномерной модели порядок роста сопротивления при $\theta \rightarrow \infty$ совпадает с порядком роста вязкости во времени.

Различия, связанные со скоростью роста сопротивления, можно усмотреть из фиг. 4. Так, если λ растет быстрее, чем по линейному закону (фиг. 4, а), то нижний критический перепад давления κ_1 и соответствующее ему значение расхода жидкости $\omega_1 = 1/\theta$, имеют конечные ненулевые значения. При линейном росте λ (фиг. 4, б) $\omega_1 = 0$, но $\kappa_1 > 0$. Если же λ растет медленнее, чем по линейному закону (фиг. 4, в), то $\omega_1 = 0$.

Следовательно, если с увеличением времени пребывания жидкости в трубе сопротивление возрастает не медленнее, чем по линейному закону, то существует критический перепад давления, ниже которого невозможно стационарное движение жидкости в трубе. Если же сопротивление стремится к бесконечности медленнее, чем по линейному закону, то при любом отличном от нуля перепаде давления существует стационарный режим течения с ненулевым значением расхода жидкости.

Рассматриваемые критические явления включают в себя как частный случай процесс закупорки трубчатого реактора. Допустим, что перепад давления в реакторе стал меньше нижнего критического значения. Тогда система будет стремиться перейти в устойчивое стационарное состояние, лежащее на нижней ветви S-образной кривой. Если при полном превращении вязкость жидкости велика, то может оказаться, что верхний критический перепад давления превышает реально допустимые значения давления в реакторе, а на нижней ветви стационарных состояний возможны лишь крайне малые значения расхода жидкости. При $\mu_* = \infty$ на нижней ветви движение жидкости вообще отсутствует, а выйти с этой ветви гидравлическим путем, т. е. с помощью повышения перепада давления, в принципе невозможно, $\kappa_2 = \infty$. Поэтому переход на нижнюю ветвь стационарных состояний в этих случаях может быть отождествлен с процессом закупорки реактора (образованием «козла»).

Возможны и более сложные виды зависимостей $\lambda = F(\theta)$, чем рассмотренные выше, но их анализ может быть проведен по той же схеме. Несмотря на различия в причинах и физических проявлениях, проведенный анализ во многом формально совпадает с анализом гидродинамических критических явлений тепловой природы [2], а диаграмма на фиг. 1 напоминает известную диаграмму Семенова в теории теплового взрыва [3]. По аналогии рассмотренные здесь критические явления, вызванные ускоренным ростом вязкости, могут быть названы вязкостным «взрывом».

Автор благодарит В. Г. Абрамова и А. М. Столина за ценные советы и обсуждения.

Поступила 7 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
2. Мержанов А. Г., Столин А. М. Гидродинамические аналоги явлений воспламенения и потухания.—ПМТФ, 1974, № 1.
3. Семенов Н. Н. Тепловая теория горения и взрывов.—«Усп. физ. наук», 1940, т. 23, вып. 3.

УДК 532.592

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Б. Н. Гончаренко, А. Л. Уринцев

(Ростов-на-Дону)

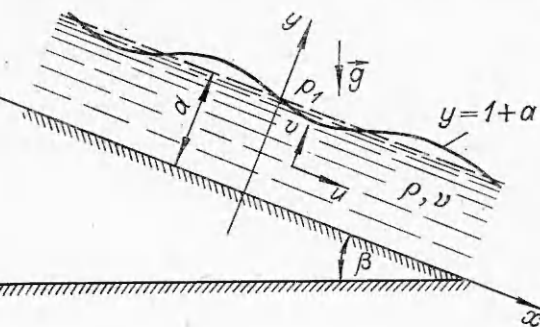
В линейной постановке на основе уравнений Навье — Стокса изучается устойчивость слоя вязкой жидкости, стекающей по твердой поверхности под действием силы тяжести, а также влияние на границы устойчивости поверхностного натяжения и угла наклона твердой стенки. Рассчитаны кривые нейтральной устойчивости относительно двух типов возмущений — поверхностных волн и волн сдвига.

1. Постановка задачи. Начало подробному изучению волнового течения слоя вязкой жидкости по наклонной плоскости было положено работами П. Л. Капицы и С. П. Капицы [1, 2]. В работах [3–6] вопрос об устойчивости стекания пленки со свободной поверхностью сводится к задаче на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда, что позволяет рассчитать границы устойчивости на плоскости параметров. Одна из границ, соответствующая возмущениям типа поверхностных волн, найдена в [3–5] аналитически для малых αRe . Существование второй границы, соответствующей возмущениям типа волн сдвига, впервые отмечается в [3], расчет этой нейтральной кривой проведен в работе [6] с использованием асимптотики больших αRe .

Исследованию нелинейной задачи посвящены работы [7–10], последняя из которых содержит обширный список литературы по вопросам нелинейной устойчивости падающей пленки.

Рассмотрим слой вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по плоской поверхности, наклоненной к горизонту под углом $0 < \beta \leq 90^\circ$ (фиг. 1). Предположим, что на свободной границе действует поверхностное натяжение с коэффициентом σ .

Примем за единицы длины, времени и массы соответственно величины d , $d^2\nu^{-1}$ и ρd^3 , где d — средняя толщина слоя; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность, и введем



Фиг. 1

безразмерные параметры $Re = 0,5 \sin \beta g d^3 \nu^{-2}$ — число Рейнольдса; $W = \sigma d \rho^{-1} \nu^{-2}$ — число Вебера. Будем искать решения уравнений гидродинамики, имеющие по x заданный период $2\pi/\alpha$, в безразмерном виде. Течение жидкости вызвано влиянием силы тяжести. Средний по периоду продольный градиент давления, который, как это видно из уравнений движения, не зависит от y , считаем равным нулю:

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0.$$

На свободной поверхности $y=1+\alpha(x, t)$ выполняются динамические и кинематические условия [11]: $P_{nn} + P_1 = Wa(1+\alpha^2)^{-3/2}$; $P_{nt} = 0$; $a_t + uax = v$, где t — время; $\alpha(x, t)$ —