

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г. О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1968. — № 2. — С. 3—8.
2. Куликовский А.Г. О течениях проводящей несжимаемой жидкости в произвольной области при наличии сильного магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1973. — № 3. — С. 147—150.

г. Москва

Поступила 29/III 1993 г.

УДК 541.18.04

Е.В. Семенов

К РАСЧЕТУ ЭВОЛЮЦИИ КОАГУЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В работе обосновывается количественный анализ дисперсного состава коагулирующих частиц.

Столкновение и последующее слияние (слипание) в потоке частиц с образованием агрегатов обуславливаются самыми разнообразными эффектами — случайным (тепловым или броуновским) блужданием, сближением под действием электрических, гравитационных, гидродинамических и других сил. При этом исследование эволюции гранулометрического состава коагулирующих в потоке частиц, строго говоря, необходимо проводить на основе математического анализа законов сохранения массы и импульса по каждой из фаз смеси, а также исходя из балансового соотношения по счетной плотности коагулирующих частиц в форме, например, кинетического уравнения Смолуховского [1]. Причем возникающие на этом пути трудности настолько велики, что имеется, как правило, возможность получить результаты по количественному моделированию кинетики коагулирующих частиц лишь для задач простейшего типа.

В предположении, что по условиям протекания процесса взаимодействия частиц выполняются все допущения, полагаемые в основу вывода уравнения Смолуховского, имеем [2]

$$(1) \quad \frac{\partial n(m)}{\partial t} = 0,5 \int_0^m \beta_1(m - \mu, \mu) n(m - \mu) n(\mu) d\mu - \\ - n(m) \int_0^{\infty} \beta_1(m, \mu) n(\mu) d\mu,$$

где $n(m)$ — счетная плотность распределения (СПР) частиц по массе; t — время; $\beta_1(m, \mu)$ — ядро интегродифференциального уравнения (1), по своему физическому смыслу являющееся симметричной неотрицательной функцией своих аргументов. С помощью введения импульсной функции δ Дирака уравнение (1) примет вид [2, 3]

$$(2) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(m, m', m'') n(m') n(m'') dm' dm''.$$

Здесь

$$K(m, m', m'') = 0,5 \beta_1(m', m'') \Delta(m, m', m''); \\ \Delta(m, m', m'') = \delta(m - m' - m'') - \delta(m - m') - \delta(m - m'').$$

В качестве начального условия для СПР принимаем

$$(3) \quad n(m, 0) = n^0(m).$$

С целью упрощения анализа задачи (2), (3) перейдем к безразмерным величинам согласно формулам

$$(4) \quad n = M^{-1}L^{-3}\bar{n}, \quad t = T\bar{t}, \quad m = M\bar{m},$$

где M, L, T — характерные величины массы, длины и времени, задаваемые по каждой конкретной задаче; $\bar{n}, \bar{t}, \bar{m}$ — безразмерные СПР, время и масса. Тогда, подставляя (4) в (2) и опуская для простоты черточки над безразмерными величинами, имеем

$$(5) \quad \partial n / \partial t = \varepsilon \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(m, m', m'') n(m') n(m'') dm' dm''$$

(ε — безразмерный параметр). При этом начальное условие (3) по безразмерной СПР сохраняет свою форму.

Решение интегродифференциального уравнения (5), согласующееся с начальным условием (3), находим в виде ряда

$$(6) \quad n(m, t; \varepsilon) = n_0(m, t) + \varepsilon n_1(m, t) + \dots$$

Тогда вследствие (3), (6) будем иметь начальные условия по последовательным приближениям n_0, n_1, \dots :

$$(7) \quad n_0(m, 0) = n^0(m);$$

$$(8) \quad n_1(m, 0) = 0, \quad n_2(m, 0) = 0, \dots,$$

а согласно (2), (6) — редуцированную систему дифференциальных уравнений

$$(9) \quad \partial n_0 / \partial t = 0;$$

$$(10) \quad \partial n_1 / \partial t = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(m, m', m'') n_0(m') n_0(m'') dm' dm'';$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \partial n_2 / \partial t = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(m, m', m'') \{n_0(m') n_1(m'') + \\ & + n_1(m') n_0(m'')\} dm' dm'', \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

правые части которых — явные двукратные квадратуры по приближениям более низкого порядка. Причем в силу специфики системы (9) — (11) ряд (6) принимает вид

$$(12) \quad n(m, t; \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon t)^i \varphi_i(m) / i!,$$

где $\varphi_0(m) = n_0(m)$, $\varphi_i(m)$ ($i = 1, 2, \dots$) — явные выражения кратных квадратур справа в системе (9) — (11). Принимая во внимание (7), (8), на основе (9) — (11) получим

$$(13) \quad n_0 = n^0(m) = \varphi_0(m);$$

$$(14) \quad n_1 = \varphi_1(m)t, \quad n_2(m, t) = 0,5 \varphi_2(m)t^2, \dots$$

Здесь

$$(15) \quad \varphi_1(m) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(m, m', m'') \varphi_0(m') \varphi_0(m'') dm' dm'';$$

$$(16) \quad \varphi_2(m) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(m, m', m'') [\varphi_0(m')\varphi_1(m'') + \varphi_1(m')\varphi_0(m'')] dm' dm'' + \dots$$

В дальнейшем, не нарушая общности рассуждений, рассмотрим начальную СПР в виде суперпозиции пары δ -образных функций [2]:

$$(17) \quad n^0(m) = \nu_0 [\alpha_1 \delta(m - m_1) + \alpha_2 \delta(m - m_2)]$$

($\nu_0 = N_0 L^3$, N_0 — число частиц в единице объема исходной смеси, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $m_1 < m_2$). Кроме того, в целях некоторого сокращения объема выкладок при конкретном количественном анализе задачи дополнительно будем предполагать, что ядро уравнения (1) является разностным. В таком случае из (15), (17), используя свойства δ -функций и принимая во внимание запрет на коагуляцию частиц одинаковой массы, имеем

$$(18) \quad \varphi_1(m) = \alpha_1 \alpha_2 \nu_0^2 D(m, m_1, m_2),$$

где

$$D(m, m_1, m_2) = \beta(m_1, m_2) \Delta(m, m_1, m_2), \quad \beta = \bar{\beta}_1.$$

Для отыскания высших приближений разложения (6) воспользуемся очевидными формулами

$$(19) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty D(z, x, y) D(x, a, b) [\alpha_1 \delta(y - a) + \alpha_2 \delta(y - b)] dx dy = \\ = \beta(a, b) \{ \alpha_1 [D(z, a + b, z_1) - D(z, a, z_1) - D(z, b, z_1)] + \\ + \alpha_2 [D(z, a + b, z_2) - D(z, a, z_2) - D(z, b, z_2)] \};$$

$$(20) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty D(z, x, y) D(x, a, b) D(y, c, d) dx dy = \beta(a, b) \beta(c, d) \times \\ \times [D(z, a + b, c + d) - D(z, a, c + d) - D(z, b, c + d) + D(z, a + b, c) - \\ - D(z, a, c) - D(z, b, c) + D(z, a + b, d) - D(z, a, d) - D(z, b, d)]$$

(a, b, c, d, z_1, z_2 — положительные постоянные величины). Тогда в силу (13), (16) — (19), а также исходя из разностного характера ядра, получим

$$(21) \quad \varphi_2(m) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty K(m, m', m'') \varphi_0(m') \varphi_1(m'') dm' dm'' = \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty D(m, m', m'') \varphi_0(m') \varphi_1(m'') dm' dm'' = \\ = \alpha_1 \alpha_2 \nu_0^3 \beta(m_1, m_2) [\alpha_1 D(m, m_1 + m_2, m_1) - \\ - (\alpha_1 + \alpha_2) D(m, m_1, m_2) + \alpha_2 D(m, m_1 + m_2, m_2)].$$

Аналогично на основе (13), (17) — (21) имеем

$$(22) \quad \varphi_3(m) = 0,5 \int_0^\infty \int_0^\infty D(m, m', m'') [2\varphi_0(m')\varphi_2(m'') + \\ + \varphi_1(m')\varphi_1(m'')] dm' dm'' = \\ = \alpha_1 \alpha_2 \nu_0^4 \beta(m_1, m_2) (\alpha_1 \beta(m_1 + m_2, m_1) \{ \alpha_1 [D(m, 2m_1 + m_2, m_1) - \\ - D(m, m_1 + m_2, m_1)] + \alpha_2 [D(m, 2m_1 + m_2, m_2) - D(m, m_1 + m_2, m_2) - \\ - D(m, m_1, m_2)] \} - (\alpha_1 + \alpha_2) \beta(m_1, m_2) \{ \alpha_1 [D(m, m_1 + m_2, m_1) - \\ - D(m, m_1, m_2)] + \alpha_2 [D(m, m_1 + m_2, m_2) - D(m, m_1, m_2)] \} +$$

$$+ \alpha_2 \beta(m_1 + m_2, m_2) \{ \alpha_1 [D(m, m_1 + 2m_2, m_2) - D(m, m_1 + m_2, m_1) - \\ - D(m, m_2, m_1)] + \alpha_2 \beta(m_1 + m_2, m_2) [D(m, 2m_2 + m_1, m_2) - \\ - D(m, m_1 + m_2, m_2)] - \alpha_1 \alpha_2 \beta(m_1, m_2) D(m, m_1, m_2) \}.$$

Из анализа формул (17), (18), (21), (22) вытекает, что каждое из последующих приближений дает оценку вклада в общее число частиц все более крупных агрегатов, образующихся за счет слияния частиц одной крупности с кратными мономерами другой. Однако отыскание приближений порядка выше третьего становится уже довольно сложной задачей, хотя структура этих приближений очевидна. Так как, согласно (17), (18), (21), (22), ряд (12) представляет собой суперпозицию δ -образных функций, то обосновать его сходимость затруднительно. Однако для первообразной по m (если она существует) этого разложения, представляющей собой с точностью до множителя счетную функцию распределения, при определенных ограничениях, наложенных на ядро коагуляции β , может быть построена мажоранта и, таким образом, доказана сходимость ряда

$$(23) \quad \int_0^m n(m, t; \varepsilon) dm = \sum_{i=0}^{\infty} (\varepsilon t)^i \int_0^m \varphi_i(m) dm / i!$$

Учитывая только симметричность ядра уравнения (1) и исходя из формул (15)–(20), заключаем, что (для неразностного ядра!) если нулевое приближение содержит два члена, то каждое из основных слагаемых по первому приближению содержит $2^2 \cdot 3$ члена, по второму — $2^3 \cdot 3^2$, по i -му — $2^{i+1} \cdot 3^i$. Поэтому i -е приближение зависит от $i \cdot 2^{i+1} \cdot 3^i$ слагаемых, каждое из которых, согласно (19), (20), пропорционально произведению

$$\prod_{j=1}^i \alpha_1^{p_j} \alpha_2^{q_j} \beta[m_1 + jm_2, m_2 + (i-j)m_1] < \prod_{j=1}^i \beta[m_1 + jm_2, m_2 + (i-j)m_1] \leq \beta_{\max}^i \\ (p_j + q_j = 1),$$

где $\beta_{\max} \geq 0$ — максимальное значение функции β в области $(0, m)$. Таким образом, для ряда (23) может быть построена мажоранта по переменной m :

$$(24) \quad \Omega = \sum_{i=1}^{\infty} t v_0^{i+1} (6\varepsilon t \beta_{\max})^i / i!$$

Как видно, в принятом предположении о наличии у ядра β максимума ряд (24) сходится в интервале времени $0 < t < \infty$, поэтому (24) мажорирует ряд (23) по тому же интервалу.

В качестве примера расчета рассмотрим задачу об эволюции дисперсности взвешенного в безграничном объеме покоящейся вязкой несжимаемой жидкости тонкого порошка из частиц двух сортов с массами m_1 и m_2 и плотностью ρ_r , подверженного действию сил тяжести, сил Архимеда и Стокса (гравитационная коагуляция). Тогда скорость седиментации частиц небольшого размера вычисляют по формуле [4]

$$v = 2g\Delta\rho R^2 / (9\mu_{*})$$

($\Delta\rho = \rho_r - \rho_{*} > 0$) или же, если $R(m) = [3m / (4\pi\rho_r)]^{4/3}$,

$$(25) \quad v(m) = [2g\Delta\rho / (9\mu_{*})] [3m / (4\pi\rho_r)]^{2/3}.$$

В таком случае ядро уравнения (1) принимает форму

$$(26) \quad \beta_i(m, \mu) = \pi [R(m) + R(\mu)]^2 |v(m) - v(\mu)|,$$

характерную для задач градиентной коагуляции [5–7]. Причем в соответствии с (25), (26)

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi g \Delta \rho}{9\mu_{\text{ж}}} \left(\frac{3}{4\pi \rho_{\text{т}}} \right)^{4/3}, \quad \beta(m', m'') = (m'^{1/3} + m''^{1/3})^3 | m'^{1/3} - m''^{1/3} |.$$

Вследствие того что ядро $\beta(m', m'')$ для задачи о гравитационной коагуляции представляет собой возрастающую функцию своих аргументов, для данной проблемы сходимость разложения (6) с помощью мажоранты обосновать не удается.

Если в качестве характерных величин массы, длины и времени принять

$$M = \mu_{\text{ж}}^2 / (g\Delta\rho), \quad L = (\mu_{\text{ж}} / \Delta\rho)^{2/3} / g^{1/3}, \quad T = [\mu_{\text{ж}} / (g^2 \Delta\rho)]^{1/3},$$

то (в безразмерных переменных)

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{9} \left(\frac{3}{4\pi} \frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{т}}} \right)^{4/3} < 1, \quad \nu_0 = N_0 \left(\frac{\mu_{\text{ж}}}{\Delta\rho} \right)^2 \frac{1}{g},$$

$$\beta(m', m'') = (m'^{1/3} + m''^{1/3})^3 | m'^{1/3} - m''^{1/3} |.$$

Вводя полное значение числа частиц в единице объема

$$N(t) = \int_0^{\infty} n(m, t) dm, \quad N_0 = \int_0^{\infty} n^0(m) dm = \nu_0,$$

получим СПР частиц по массам, нормированную на N ,

$$\Phi(m, t) = n(m, t) / N(t),$$

а также функцию распределения

$$F(m, t) = \int_0^m \Phi(\mu, t) d\mu = \frac{1}{N(t)} \int_0^m n(\mu, t) d\mu.$$

Если сохранить три члена в разложении (12), то приближенно будем иметь

$$F(m, t) = \int_0^m [n^0(\mu) + \varepsilon t \varphi_1(\mu) + 0,5(\varepsilon t)^2 \varphi_2(\mu)] d\mu.$$

Тогда на основе (26) может быть получено изменение относительного количества частиц данного размера за время t в результате их коагуляции. Например, относительное изменение числа частиц массой $m < m_2$ составит

$$(27) \quad \Delta F = F(m_2) / F(\infty),$$

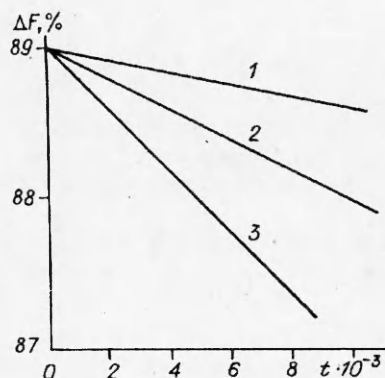
где

$$F(m_2) = \nu_0 \alpha_1 (1 - \kappa \alpha_2 \beta(m_1, m_2) \{1 - 0,5\kappa [(\alpha_1 + \alpha_2) \beta(m_1, m_2) - \alpha_1 \beta(m_1 + m_2, m_1)]\});$$

$$F(\infty) = \nu_0 (1 - \kappa \alpha_1 \alpha_2 \beta(m_1, m_2) \{1 + 0,5\kappa [\alpha_1 \beta(m_1 + m_2, m_1) - (\alpha_1 + \alpha_2) \beta(m_1, m_2) + \alpha_2 \beta(m_1 + m_2, m_2)]\}), \quad \kappa = \varepsilon t \nu_0.$$

Рассмотрим суспензию с параметрами $\mu_{\text{ж}} = 10^{-3}$ Па · с, $\rho_{\text{т}} = 10^3$ кг/м³, $\Delta\rho = 10^2$ кг/м³, $g = 9,8$ м/с², объемные концентрации в исходной смеси каждой из фракций твердого вещества $c_1 = 5 \cdot 10^{-4}$, $c_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_1 = 0,89$, $\alpha_2 = 0,11$ при зависимости между радиусами частиц $R_2 = 2R_1$. Тогда если $\bar{\varepsilon} = 0,32$ — коэффициент, учитывающий неплотность упаковки сфер [4], то количество частиц в единице объема исходной смеси $N_0 = 3\bar{\varepsilon}(c_1/R_1^3 + c_2/R_2^3)/(4\pi)$. В качестве расчетного времени протекания процесса принимаем $\tau = 60$ с (или в безразмерной форме $\bar{\tau} \approx 10^4$).

Из анализа полученных согласно (27) результатов расчета вытекает (см. рисунок), что относительное содержание в смеси вследствие актов коагуляции частиц мелкой фракции, как и следовало ожидать, убывает со



временем и тем быстрее, чем больше размер частиц, хотя это изменение по исследуемому интервалу времени относительно невелико (порядка 2 %). На рисунке линии 1—3 отвечают $R_1 = 5 \cdot 10^{-6}, 10^{-5}, 25 \times 10^{-6}$ м и $R_2 = 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}$ м.

Проведенный количественный анализ проблемы коагуляции основан на использовании при выводе уравнения (1) формулы расчета геометрической вероятности столкновения частиц, что приводит к завышенным, по сравнению с реальными, результатам по числу слипающихся частиц. Это обусловлено пренебрежением в идеализи-

рованной модели кинетики коагуляции обычно имеющего место на практике явления обтекания мелкими частицами крупных частиц [8, 9]. В связи с этим в целях уточнения расчетов ядро уравнения Смолуховского корректируют коэффициентом захвата [1].

В таком случае, хотя и приходят к уравнению, имеющему по сравнению с (1) более сложную структуру, количественный анализ этого уравнения в принципе может быть проведен по той же методике, что и по соотношению (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Волощук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. — Л.: Гидрометеиздат, 1975.
2. Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. — Л.: Гидрометеиздат, 1984.
3. Маделунг Э. Математический аппарат физики. — М.: Наука, 1968.
4. Хаппель Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976.
5. Гришин С.Д., Тишин А.П., Хайрутдинов Р.И. Неравновесное двухфазное течение в сопле Лаваля с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — № 2.
6. Крайко А.Н., Шрайбер А.А. К построению модели, описывающей в одномерном приближении двухфазное течение с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата // ПМТФ. — 1974. — № 2.
7. Бабуха Г.Л., Шрайбер А.А. Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. — Киев: Наук. думка, 1972.
8. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
9. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А. и др. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. — М.: Машиностроение, 1980.

г. Москва

Поступила 16/Х 1992 г.,
в окончательном варианте —
25/IV 1993 г.

УДК 532.516

Б.А. Луговцов

ВОЗМОЖНА ЛИ СПОНТАННАЯ ЗАКРУТКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ?

В ряде работ [1—4] высказана гипотеза о возможности возникновения спонтанной закрутки осесимметричного течения при отсутствии явных источников вращения, когда осесимметричное течение без вращения завихрится возможно. Смена типа симметрии (осевая симметрия — вращательно-

© Б.А. Луговцов, 1994