

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ КОНТУРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

С. И. Горлов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск

Разработан метод решения плоской линейной задачи о стационарном бесциркуляционном обтекании тела под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Краевая задача формулируется для возмущенной комплексной скорости и сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно интенсивности вихревого слоя, моделирующего контур. Ядро уравнения — точное решение соответствующей краевой задачи для вихря единичной интенсивности. Уравнение решено методом дискретных вихрей. Проведен численный эксперимент по оценке влияния параметров задачи на гидродинамические характеристики эллиптического контура, а также форму свободной поверхности.

Задачи о движении тела под свободной поверхностью ограниченной снизу жидкости имеют обширные практические приложения, связанные прежде всего с проектированием судов, движущихся на мелководье, поэтому данная проблема долгое время находится в центре внимания многих исследователей. Первые фундаментальные результаты в этой области получены в [1, 2]. Дальнейшие успехи в решении этих задач связаны с развитием численных методов [3]. При помощи метода конечных элементов в [4] решена задача о движении эллиптического цилиндра и профиля Жуковского под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Для решения этой задачи в [5] применен метод панелей. Проведено сравнение формы свободной поверхности для жидкости конечной глубины и не ограниченной снизу, а также изучено влияние волн на распределенные гидродинамические нагрузки. При помощи конечных суперэлементов в [6] рассмотрена задача расчета волнового сопротивления и подъемной силы кругового цилиндра, движущегося в весомай жидкости при наличии дна. Обнаружено, что вблизи критического числа Фруда гидродинамические нагрузки терпят разрыв. Для решения этой же задачи в [7] использован метод гибридных конечных элементов. Обтекание эллиптического цилиндра и профиля под углом атаки потоком весомай жидкости со свободной поверхностью при наличии дна рассмотрено в [8], где описано решение задачи, основанное на методе гибридных граничных интегральных уравнений, приведены результаты по расчету формы свободной поверхности, распределенных и суммарных гидродинамических характеристик профиля.

Несмотря на большое число работ по данной тематике, ряд вопросов остается недостаточно исследованным. В частности, мало расчетных данных, позволяющих оценить влияние генерируемых волн на гидродинамические реакции тела. Настоящая работа посвящена разработке численного метода для расчетов параметров задачи в широком диапазоне изменения и оценки влияния дна на распределенные и суммарные гидродинамические характеристики контура.

Рассмотрим линейную задачу о равномерном движении эллиптического контура L под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Предположим, что жидкость идеальна и несжимаема. Система координат вводится таким образом, чтобы ось x

совпадала с невозмущенным уровнем свободной поверхности. Задачу будем решать в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Обозначим через g ускорение силы тяжести, ρ — плотность, H — глубину, V_∞ — скорость жидкости в бесконечном удалении перед контуром, a и b — большую и малую полуоси эллипса, h — отстояние центра эллипса от свободной поверхности.

Введем комплексную скорость $\bar{V}(z)$ возмущенного движения жидкости. Функция $\bar{V}(z)$ должна быть аналитична в области $D: |x| < +\infty, -H < y < 0$, за исключением контура L , и удовлетворять следующим граничным условиям [9]:

1) следствию постоянства давления и равенства нулю нормальной составляющей скорости на свободной поверхности

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{dV(z)}{dz}i\nu\bar{V}(z)\right\} = 0, \quad \nu = \frac{g}{V_\infty^2} \quad \text{при } z = x + i0; \quad (1)$$

2) равенства нулю нормальной составляющей скорости на дне жидкости

$$\operatorname{Im}\{\bar{V}(z)\} = 0 \quad \text{при } z = x - iH; \quad (2)$$

3) непротекания в точках контура

$$\operatorname{Im}\{(V_\infty + V(z))e^{i\theta(z)}\} = 0 \quad \text{при } z \in L \quad (3)$$

($\theta(z)$ — угол между касательной к L в точке z и осью x);

4) затухания возмущенных скоростей в бесконечном удалении перед контуром

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(z) = 0. \quad (4)$$

Возмущенную комплексную скорость $V(z)$ ищем в виде

$$\bar{V}(z) = \int_L K(z, \zeta)\gamma(\zeta)e^{-i\theta(\zeta)}d\zeta, \quad (5)$$

где $\gamma(\zeta)$ — интенсивность присоединенного вихревого слоя, моделирующего контур L ($\zeta = \xi + i\eta$). Выражение $K(z, \zeta)$, полученное в [9], представляет собой точное решение соответствующей краевой задачи (1), (2) и (4) для вихря единичной интенсивности и имеет вид

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \zeta + 2Hi} + \int_0^\infty \frac{\lambda + \nu \operatorname{sh}(\lambda(H + \eta)) \cos(\lambda(z - \xi + iH))}{\pi \lambda \operatorname{ch} \lambda H - \nu \operatorname{sh} \lambda H} e^{-\lambda H} d\lambda + \frac{\nu \operatorname{sh}(\lambda_1(H + \eta)) \sin(\lambda_1(z - \xi + iH))}{\nu H - \operatorname{ch}^2 \lambda_1 H}. \quad (6)$$

Здесь λ_1 — положительный корень уравнения $\nu \operatorname{th} \lambda H = \lambda$, который существует при $\nu H > 1$.

Таким образом, функция $V(z)$ удовлетворяет условиям (1), (2), (4), и краевая задача (1)–(4) сводится к определению $\gamma(\zeta)$ из решения сингулярного интегрального уравнения, получаемого подстановкой (5), (6) в (3). Интегральное уравнение будем решать методом дискретных вихрей. Разделим контур L на элементы $[z_j, z_{j+1}]$ длиной Δ_j ($j = 1, \dots, N$). В начале и конце каждого элемента поместим два вихря интенсивности Γ_j и $-\Gamma_j$. Суммарная интенсивность вихрей равна нулю, что обеспечивает бесциркуляционное обтекание эллипса. Выберем точки z_{0k} ($k = 1, \dots, N$), расположенные в середине элементов $[z_k, z_{k+1}]$ ($k = 1, \dots, N$), и потребуем выполнения в них условия непротекания (3). Согласно формуле (5), функция $\bar{V}(z)$ в этих точках будет принимать значения

$$V(z_{0k}) = \int_L K(z_{0k}, \zeta)\gamma(\zeta)e^{-i\theta(\zeta)}d\zeta. \quad (7)$$

Интегральное выражение в (7) аппроксимируем квадратурной формулой, содержащей дискретные вихри [10]:

$$\int_L K(z_{0k}, \zeta) \gamma(\zeta) e^{-i\theta(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^N \Gamma_j (K(z_{0k}, z_j) - K(z_{0k}, z_{j+1})). \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в (3) при $z = z_{0k}$ ($k = 1, \dots, N$), получим систему из N линейных алгебраических уравнений относительно интенсивностей дискретных вихрей Γ_j ($j = 1, \dots, N$).

Для вычисления несобственного интеграла, входящего в выражение (6), разработан эффективный численный метод, основанный на выделении особенности из-под знака интеграла и использовании квадратур Гаусса и Лагерра [11].

После определения интенсивностей дискретных вихрей с учетом (7), (8) в точках контура z_{0k} ($k = 1, \dots, N$) находим значения $\bar{V}(z)$ и давление p при помощи интеграла Бернулли:

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2} \rho (|V_\infty + \bar{V}(z)|^2 - V_\infty^2)$$

(p_∞ — давление в бесконечно удаленной точке).

Для расчета суммарных гидродинамических характеристик предполагаем кусочно-постоянное распределение давления вдоль контура L . Формулы для волнового сопротивления R_x , подъемной силы R_y и момента M относительно точки $z_M = x_M + iy_M$ имеют вид

$$R_x - iR_y = i \int_L (p - p_\infty) e^{-i\theta} ds = i \sum_{k=1}^N (p_k - p_\infty) e^{-i\theta_k} \Delta_k,$$

$$\begin{aligned} M &= - \int_L (p - p_\infty) [(\xi - x_M) \cos \theta + (\eta - y_M) \sin \theta] ds = \\ &= - \sum_{k=1}^N (p_k - p_\infty) [(x_{0k} - x_M) \cos \theta_k + (y_{0k} - y_M) \sin \theta_k] \Delta_k, \end{aligned}$$

где p_k — давление в точке z_{0k} ; $\theta_k = \theta(z_{0k})$ ($k = 1, \dots, N$).

Форма свободной поверхности задается функцией $y = f(x)$, где $f(x) = -\text{Re}\{\bar{V}(z)\}/\nu$ при $z = x + i0$. Здесь $\bar{V}(z)$ определяется из (5) с учетом квадратурной формулы (8).

Основными параметрами задачи являются: b/a — отношение полуосей эллипса, h/a — погружение эллипса, H/a — глубина жидкости, число Фруда $\text{Fr} = V_\infty/\sqrt{ga}$. На основании разработанного алгоритма проведен обширный численный эксперимент по оценке влияния этих параметров на коэффициенты волнового сопротивления $C_x = 2R_x/\rho a V_\infty^2$, подъемной силы $C_y = 2R_y/\rho a V_\infty^2$, момента относительно центра эллипса $C_m = 2M/\rho a^2 V_\infty^2$, распределения давления по контуру и дну канала $C_p = (p - p_\infty)/\rho V_\infty^2$.

Алгоритм расчета тестировался известным точным решением задачи обтекания эллипса безграничным потоком жидкости. Число разбиений выбиралось равным 60, что дало при тестировании относительную погрешность расчета менее 1% для $b/a > 0,1$.

Полученные результаты сравнивались с известными решениями задачи обтекания кругового цилиндра под свободной поверхностью весомой жидкости конечной и бесконечной глубины. В табл. 1 приведены результаты расчета гидродинамических характеристик кругового цилиндра для жидкости без дна (в расчетах полагалось $h/a = 2$, глубина $H/a = 20$, что соответствует бесконечности) и результаты, полученные в [12]. Для жидкости, ограниченной дном, на рис. 1 представлены зависимости волнового сопротивления и

Таблица 1

V_∞/\sqrt{gh}	$R_x/\rho a V_\infty^2$		$R_y/\rho a V_\infty^2$	
	Автор	[12]	Автор	[12]
0	0,000 00	0,000 00	0,229 20	0,229 77
0,2	0,000 00	0,000 00	0,363 59	0,364 26
0,4	0,006 92	0,006 74	0,409 49	0,403 74
0,6	0,657 96	0,659 71	0,876 18	0,878 69
0,8	1,028 93	1,031 59	0,143 27	0,143 88
1,0	0,644 16	0,648 08	-0,294 79	-0,295 39
1,2	0,348 30	0,349 18	-0,371 74	-0,372 57
1,4	0,189 10	0,189 57	-0,351 20	-0,352 02
1,6	0,106 07	0,106 33	-0,315 63	-0,316 37
1,8	0,061 71	0,061 86	-0,284 21	-0,284 88
2,0	0,037 18	0,037 26	-0,259 78	-0,260 41
∞	0,000 00	0,000 00	-0,169 15	-0,169 56

Таблица 2

x/h	$f(x)/h$	
	Автор	[8]
-2,0	0,0634	0,0633
-1,0	0,1948	0,1945
-0,5	0,3244	0,3244
0	0,3932	0,3912
0,5	0,2415	0,2411
1,0	-0,0015	-0,0017
2,0	-0,3812	-0,3812
3,0	-0,6429	-0,6419
4,0	-0,8263	-0,8255

подъемной силы от числа Фруда $Fh = V_\infty/\sqrt{gH}$ и результаты работы [6]. Данные расчета формы свободной поверхности и работы [8] для $b/a = 1$, $H/a = 10$, $h/a = 2$, $Fh = 0,8$ приведены в табл. 2. На основании тестовых расчетов можно сделать вывод о полном соответствии полученных результатов известным.

Результаты систематических расчетов, проведенных с целью оценки влияния волн, генерируемых контуром, на его гидродинамические характеристики приведены на рис. 2–4.

На рис. 2 показана зависимость суммарных гидродинамических характеристик эллиптического контура от числа Фруда для различных отстояний от свободной поверхности и значений глубины жидкости. Видно, что все гидродинамические характеристики терпят разрыв при переходе через критическое число Фруда F_{r*} (определяется из уравнения $\nu H = 1$), значения которого для трех глубин 4, 8, 20 соответственно равны 2; 2,828; 4,472. С ростом глубины жидкости влияние дна ослабевает и исчезает при $H/a = 20$.

Зависимость формы свободной поверхности от числа Фруда приведена на рис. 3. При подходе к критическому числу Фруда наблюдается безграничный рост амплитуды и длины волны. Расчет коэффициента C_p на дне канала показал, что при $H/a = 4$ в распределение

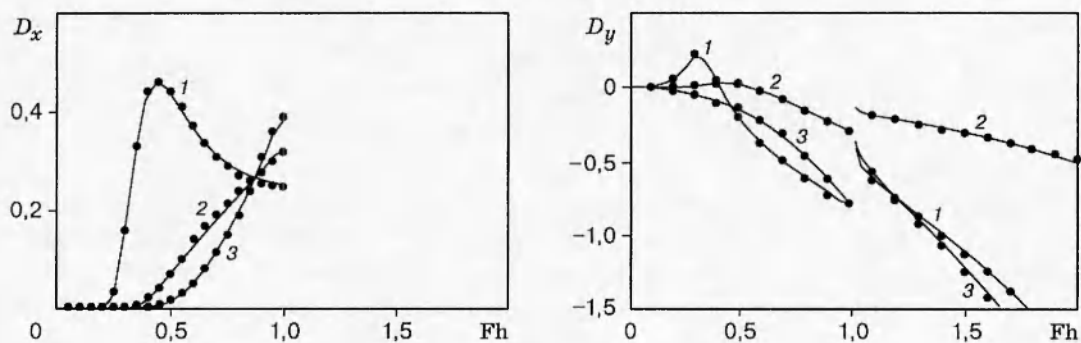


Рис. 1. Зависимости волнового сопротивления $D_x = R_x/\rho g \pi a^2$ и подъемной силы $D_y = R_y/\rho g \pi a^2$ от Fh для $b/a = 1$, $H/a = 8$, $h/a = 2, 4, 8$ (линии 1–3):

сплошными линиями обозначены результаты, полученные автором, точками — [6]

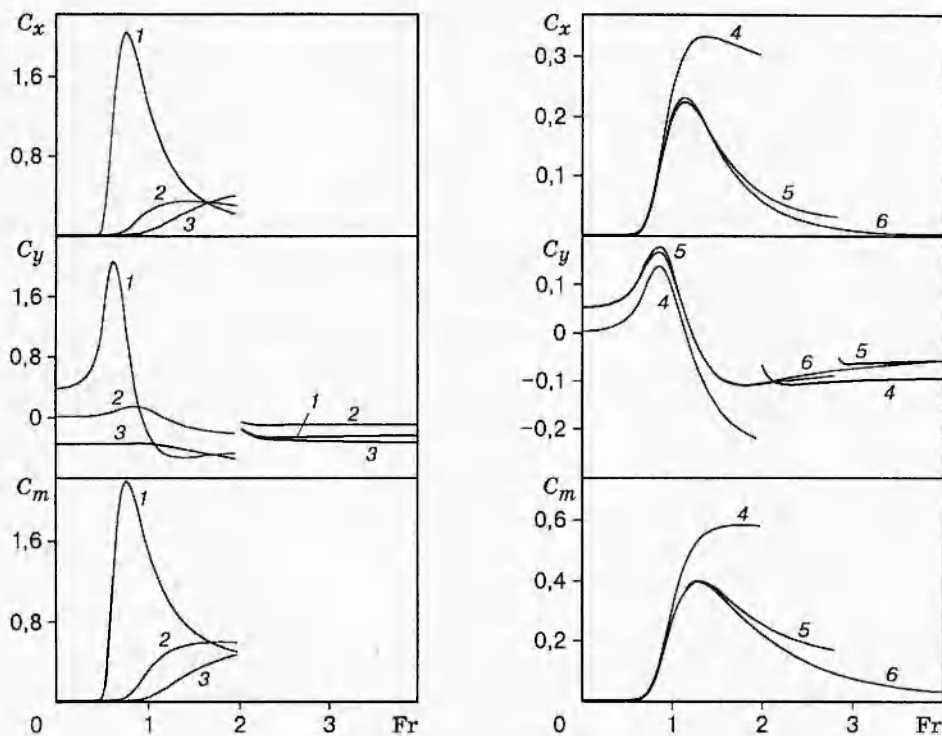


Рис. 2. Зависимость гидродинамических характеристик от числа Фруда для эллиптического контура ($b/a = 0,5$) при $H/a = 4$, $h/a = 1, 2, 3$ (линии 1-3) и $h/a = 2$, $H/a = 4, 8, 20$ (линии 4-6)

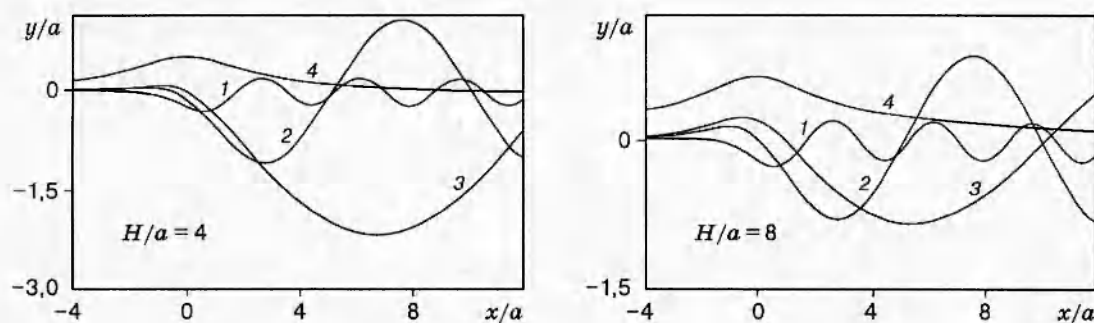


Рис. 3. Форма свободной поверхности при $b/a = 0,5$, $h/a = 2$, $Fr = 0,75; 1,25; 1,75; 3,25$ (линии 1-4)

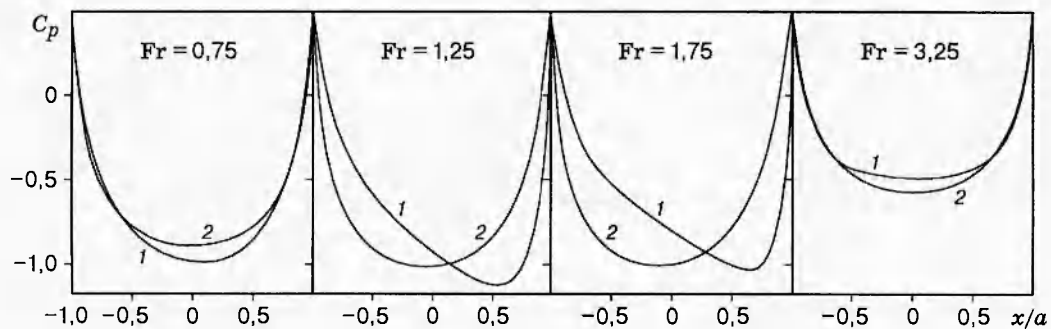


Рис. 4. Распределение давления по контуру при $b/a = 0,5$, $h/a = 2$, $H/a = 4$, $Fr = 0,75; 1,25; 1,75; 3,25$ (линия 1 — по верхней стороне контура, 2 — по нижней)

давления вносят вклад как контур, так и волны, возникающие на свободной поверхности, причем с приближением к критическому числу Фруда вклад волн становится более существенным. При $H/a = 8$ это влияние заметно ослабевает. Волны, возникающие на свободной поверхности, оказывают сильное влияние на распределение давления по верхней стороне контура (рис. 4).

На основании проведенного численного эксперимента можно сделать следующие выводы. Волны, генерируемые контуром, движущимся под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины, оказывают существенное влияние на его распределенные и суммарные гидродинамические характеристики. Оно проявляется особенно сильно вблизи критических чисел Фруда, где решение задачи в рамках линейной теории неприемлемо и требует рассмотрения в нелинейной постановке. Влияние дна оказывается весьма существенным и исчезает только при достаточно больших значениях относительной глубины жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00093).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. И. Плоская задача о движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Отд.-ние техн. наук. 1940. № 4. С. 57–78.
2. Хаскинд М. Д. О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // Прикл. математика и механика. 1945. Т. 9. С. 67–78.
3. Yeung R. W. Numerical methods in free-surface flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 395–442.
4. Bai K. J. A localized finite-element method for two-dimensional steady potential flows with a free surface // J. Ship. Res. 1978. V. 22, N 4. P. 216–230.
5. Giesing J. P., Smith A. M. O. Potential flow about two-dimensional hydrofoils // J. Fluid Mech. 1967. V. 28, N 1. P. 113–129.
6. Mei C. C., Chen H. S. A hybrid element method for steady linearized free-surface flows // Intern. J. Num. Meth. Engng. 1976. V. 10, N 5. P. 1153–1175.
7. Eatock Taylor R., Wu G. X. Wave resistance and lift on cylinders by a coupled element technique // Intern. Shipbuild. Progr. 1986. V. 33, N 377. P. 2–9.
8. Yeung R. W., Bouger Y. C. A hybrid integral-equation method for steady two-dimensional ship waves // Intern. J. Num. Meth. Engng. 1979. V. 14, N 3. P. 317–336.
9. Горлов С. И. Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 3. С. 127–132.
10. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
11. Горлов С. И. Плоская задача о движении тела в многослойной тяжелой жидкости: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1995.
12. Хабахпашева Т. И. Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 1. С. 91–97.

Поступила в редакцию 16/ХІІ 1996 г.,
в окончательном варианте — 31/ІІІ 1997 г.