

УДК 536.24

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ НА СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНОЕ МГД-ТЕЧЕНИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО КОНУСА ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕМЕННОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Дж. Палани, А. Р. Рагаван, Е. Тандапани*

Государственный колледж искусств им. Амбедкара, 600039 Ченнай, Тамилнад, Индия

* Институт современных исследований в математике им. Рамануджана
университета Мадраса, 600005 Ченнай, Тамилнад, Индия
E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

Изучено влияние вязкой диссипации на свободно-конвективное течение на поверхности вертикального конуса с переменным тепловым потоком при воздействии поперечного магнитного поля. Численно исследованы особенности теплообмена в свободно-конвективном течении. Получены численные решения преобразованных управляющих уравнений для переменного теплового потока на поверхности. Для различных значений параметров задачи вычислены скорость, температура, коэффициенты локального касательного напряжения и теплообмена. Результаты вычислений представлены в виде графиков. Обсуждается влияние на течение магнитного параметра, числа диссипации, показателя степени в степенном законе, угла между образующей поверхности конуса и вертикалью и числа Прандтля на течение. Проведено сравнение полученных результатов с известными данными и показано, что они хорошо согласуются.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, вязкая диссипация, число Нуссельта, свободная конвекция, вертикальный конус.

Введение. В последние годы задача о двумерном свободно-конвективном течении на полубесконечном вертикальном конусе с различными граничными условиями вызывает интерес многих исследователей, что обусловлено широким применением ее на практике. При контакте горячей поверхности с жидкостью вследствие перепада температур возникает сила плавучести, которая стимулирует естественную конвекцию. В настоящее время такие тепловые потоки широко применяются в промышленности, науке и технике. Датчики теплового потока могут использоваться при проведении промышленных измерений и в системах управления, например для обнаружения загрязнения (датчик загрязнения котла), управления работой печей (контроль работы доменной печи или общий мониторинг работы печи), мониторинга горения. Использование датчиков теплового потока способствует повышению эффективности работы, безопасности систем и моделирования.

Теоретические исследования ламинарного свободно-конвективного течения на осесимметричном теле имеют большое значение в случаях равномерного и неравномерного распределений теплового потока на поверхности. В работе [1] описаны автомодельные реше-

Работа выполнена при финансовой поддержке Университетской комиссии по грантам (Нью-Дели, Индия) в рамках Главного научно-исследовательского проекта (F.N 38-224/2009 (SR)).

ния задач о ламинарной свободной конвекции на прямом круговом конусе с заданным равномерным тепловым потоком при значениях числа Прандтля $Pr = 0,72, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100$ и представлены выражения для поверхностного трения и распределения температуры на стенке при $Pr \rightarrow \infty$. Авторы работы [2] изучали неавтономные решения задачи, учитывающие влияние поперечной кривизны естественного конвективного течения на тонком усеченном конусе. В [3] с использованием интегрального метода исследован общий теплообмен при ламинарной естественной конвекции на вертикальных конусах, в [4] изучено влияние сжимаемости на течение при ламинарной свободной конвекции на вертикальном конусе. Авторы работы [5] теоретически исследовали влияние вдува и отсоса на стационарную свободную конвекцию на вертикальном конусе с однородным тепловым потоком на поверхности. В [6] с использованием степенного закона получено численное решение задачи о свободной ламинарной конвекции жидкости на вертикальном усеченном конусе без учета поперечной кривизны (т. е. при больших углах конусности, когда толщина пограничного слоя мала по сравнению с локальным радиусом конуса). В [7] исследована свободная конвекция на вертикальном вращающемся конусе с равномерным тепловым потоком на стенке. Авторы [8, 9] изучали неавтономные решения в случае свободной конвекции на вертикальном пронизываемом конусе с неравномерным тепловым потоком на поверхности и задачу о ламинарном естественном конвективном течении и теплообмене на вертикальном круговом конусе, погруженном в термически стратифицированную среду с однородной температурой или однородным тепловым потоком на поверхности. С использованием метода конечных разностей, метода разложения в ряды и асимптотического метода получены решения для уравнений неавтономного пограничного слоя. В [10] обсуждалось влияние скорости испарения на ламинарное свободно-конвективное течение в пограничном слое на вертикальном неизотермическом конусе и показано, что при увеличении градиента температуры скорость, как и температура поверхности, уменьшается. В [11] проанализированы стационарное ламинарное смешанное конвективное течение в пограничном слое на вертикальном изотермическом конусе для жидкостей с любым числом Прандтля для случаев, когда сила плавучести направлена вдоль потока и против него. Полученные уравнения неавтономного пограничного слоя решались численно с использованием схемы “Keller-box” для жидкостей с числом Прандтля $10^{-3} \leq Pr \leq 10^4$. В [12] рассмотрены граничные условия как для случая переменной температуры стенки, так и для случая переменного теплового потока, изучены автономные решения задачи о стационарной свободной конвекции на горячем вертикальном конусе, погруженном в пористую среду, насыщенную неньютоновской жидкостью со степенным законом, движение которой вызывает внутреннее тепловыделение. В [13] исследовано свободно-конвективное течение на полубесконечном вертикальном конусе с неравномерным тепловым потоком на поверхности, при этом управляющие уравнения решались численно с использованием неявного конечно-разностного метода.

Интерес к исследованию задач о магнитогидродинамическом (МГД) свободно-конвективном течении обусловлен их приложениями в физике Солнца, аэроавиатике, химическом машиностроении и электронике.

Свободно-конвективный теплоперенос, вызванный одновременным действием плавучести и индуцированных магнитных сил, исследован в работе [14]. В [15] получено численное решение для нестационарных гидромагнитных свободно-конвективных потоков вязкой несжимаемой и электропроводящей жидкости, обусловленных движением бесконечной вертикальной пластины с постоянным тепловым потоком на ней. Авторы [16] рассмотрели задачу о нестационарном гидромагнитном свободно-конвективном течении вязкой несжимаемой и электропроводящей жидкости, вызванном мгновенно приведенной в движение вертикальной пластиной с постоянным тепловым потоком на ней. В [17] исследованы

тепло- и массообмен на вертикальной пластине под воздействием комбинированной плавучести, обусловленной тепловой и концентрационной диффузией при наличии магнитного поля. В работе [18] исследовано течение асимметричного потока вязкой электропроводящей жидкости в области торцевой точки двумерного тела и на растягивающейся поверхности с приложенным магнитным полем, когда внешний поток или растягивающая поверхность мгновенно приводится в движение из состояния покоя. В [19] исследованы нестационарные комбинированные вынужденные свободно-конвективные течения (смешанные конвективные потоки) вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в окрестности осесимметричной точки останова потока на горячей вертикальной поверхности. Нестационарная задача связанного теплообмена микрополярной жидкости при наличии МГД-конвекции на бесконечной вертикальной пористой пластине с экспоненциально затухающим тепловыделением с учетом влияния нагрева вследствие вязкой диссипации и омического сопротивления изучена в [20].

Вязкая диссипация происходит при естественной конвекции в природных условиях. Такая диссипация может наблюдаться при наличии сильных гравитационных полей и в масштабных процессах, например на больших планетах, в больших массах газа в космосе и геологических процессах, в жидкостях внутри различных тел. Как правило, тепловыделение вследствие вязкой диссипации очень мало и в уравнении энергии им пренебрегается. Однако, если сила тяжести и число Прандтля жидкости велики, вязкими диссипативными эффектами нельзя пренебречь. В [21] исследовалось вязкое тепловыделение в свободно-конвективных потоках на вертикальной поверхности при условиях ее изотермичности и однородности теплового потока на поверхности. В [22] также исследованы свободно-конвективные потоки вязкой диссипативной жидкости на полубесконечной вертикальной пластине с использованием неявной конечно-разностной схемы. В [23] проанализирована задача о влиянии массопереноса на переходное свободно-конвективное течение диссипативной жидкости вдоль полубесконечной вертикальной пластины при наличии постоянного теплового потока. В [24] исследовано ламинарное течение в пограничном слое на вертикальной покоящейся изотермической пластине с учетом вязкой диссипации и сил давления в жидкости. Авторы работы [25] исследовали свободно-конвективное течение вязкой диссипативной жидкости на полубесконечной наклонной пластине с использованием неявной конечно-разностной схемы расчета. В [26] проанализировано влияние вязкой диссипации на двумерный поток вязкой несжимаемой жидкости на полубесконечной вертикальной пластине с переменной температурой поверхности, при этом для решения управляющих уравнений использована неявная конечно-разностная схема Крэнка — Николсона.

Влияние поперечного магнитного поля и вязкой диффузии на свободно-конвективное течение электропроводящей несжимаемой жидкости на равномерно ускоренной вертикальной пластине обсуждалось в [27]. В [28] исследовано течение, вызванное силами плавучести вследствие вязкой диссипации, на плоской (горизонтальной или вертикальной) пластине, погруженной в пористую среду, заполненную неньютоновской жидкостью, при воздействии поперечного магнитного поля. В [29] рассматривалось совместное влияние диссипативного тепловыделения и приложенного внешнего однородного магнитного поля на свободноконвективное течение в пористой среде при наличии поглощения (выделения) тепла на пористой пластине. В работе [30] представлена новая методика решения задачи о переходном свободно-конвективном МГД-течении диссипативной жидкости вдоль полубесконечной вертикальной пластины при наличии массообмена и заданного постоянного теплового потока на поверхности.

Однако влияние вязкой диссипации на естественную МГД-конвекцию на вертикальном конусе при наличии переменного теплового потока на его поверхности исследовано недостаточно. Необходимо изучить совместное влияние магнитного поля и вязкой диссипации

на свободно-конвективное течение несжимаемой вязкой электропроводящей жидкости на поверхности полубесконечного вертикального конуса с заданным переменным тепловым потоком. При этом система безразмерных управляющих уравнений решается с использованием метода конечных разностей.

1. Основные уравнения и математический анализ. Сформулируем математическую задачу о двумерном нестационарном ламинарном свободно-конвективном течении вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости на поверхности вертикального конуса с переменным тепловым потоком под влиянием вязкой диссипации и приложенного поперечного магнитного поля. Для этого сделаем следующие предположения.

1. Рассматривается вертикальный конус с локальным радиусом r и углом φ между образующей конуса и вертикалью, на поверхности которого задан переменный тепловой поток и который находится в покоящейся жидкости при температуре T'_∞ .

2. Координата x направлена вдоль образующей поверхности конуса, y — перпендикулярно ей, начало координат расположено в вершине конуса ($x = 0$).

3. Ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз.

4. Сначала (при $t' \leq 0$) коническая поверхность и окружающая жидкость находятся в состоянии покоя. Затем (при $t' > 0$) от конической поверхности в жидкость подводится тепло со скоростью $q_w(x) = x^n$, где $n = \text{const}$.

5. Однородное поперечное магнитное поле приложено по нормали к конической поверхности.

6. Взаимодействие индуцированного магнитного поля с потоком незначительно по сравнению со взаимодействием приложенного магнитного поля с потоком.

7. В уравнении энергии учитывается влияние вязкой диссипации.

8. Все свойства жидкости являются постоянными, кроме плотности, которая зависит от температуры, что учитывается только в члене массовой силы.

Управляющие уравнения пограничного слоя в приближении Буссинеска имеют вид

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T' - T'_\infty) \cos \varphi + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3)$$

При этом ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t' \leq 0: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \forall x, y, \\ t' > 0: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial y} = -\frac{q_w(x)}{k} \quad \text{при } y = 0, \\ & u = 0, \quad T' = T'_\infty \quad \text{при } x = 0, \\ & u \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости в направлениях x, y соответственно; T' — температура жидкости в пограничном слое; T'_∞ — температура на бесконечности; t' — время; g — ускорение свободного падения; k — теплопроводность жидкости; β — коэффициент объемного теплового расширения; ρ — плотность; C_p — удельная теплоемкость; ν — кинематическая вязкость; B_0^2 — индукция магнитного поля; σ — электропроводность; α, μ — температуропроводность и динамическая вязкость.

Локальное поверхностное трение τ_x и локальное число Нуссельта Nu_x задаются формулами

$$\tau_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad Nu_x = \frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left(- \frac{\partial T'}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}.$$

Введем безразмерные величины

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L} Gr_L^{1/5}, \quad U = \frac{uL}{\nu} Gr_L^{-2/5}, \quad V = \frac{vL}{\nu} Gr_L^{-1/5}, \quad t = \frac{\nu t'}{L^2} Gr_L^{2/5},$$

$$R = \frac{r}{L}, \quad T = \frac{T' - T'_\infty}{q_w(L)L/k} Gr_L^{1/5}, \quad Gr_L = \frac{g\beta q_w(L)L^4}{k\nu^2},$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad M = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\rho\nu} Gr_L^{-2/5},$$

где Pr — число Прандтля жидкости; M — параметр магнитного поля; Gr_L — число Грасгофа; L — характерная длина; $r = x \sin \varphi$. Тогда уравнения (1)–(3) принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{U}{X} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = T \cos \varphi + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - MU; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2, \quad (6)$$

где $\varepsilon = \beta L / C_P$ — диссипативное число, равное отношению кинетической энергии потока к количеству тепла, переданного жидкости. Соответствующие начальные и граничные условия также запишем в безразмерном виде

$$t \leq 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0 \quad \forall X, Y,$$

$$t > 0: \quad U = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial Y} = -X^n \quad \text{при} \quad Y = 0,$$

$$U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при} \quad X = 0,$$

$$U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Y \rightarrow \infty.$$

Локальное безразмерное поверхностное трение и локальное число Нуссельта задаются выражениями

$$\tau_X = Gr_L^{3/5} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}, \quad Nu_X = \frac{X^{n+1} Gr_L^{1/5}}{T|_{Y=0}}. \quad (8)$$

2. Численные методы. Для решения управляющих безразмерных уравнений (4)–(6) с начальными и граничными условиями (7) используется неявная конечно-разностная схема типа схемы Крэнка — Николсона. Метод решения конечно-разностных уравнений типа уравнений Крэнка — Николсона обсуждался в [13]. Область интегрирования представляет собой прямоугольник со сторонами $X_{\max} = 1$ и $Y_{\max} = 26$, где Y_{\max} соответствует максимуму $Y = \infty$. Значение $Y_{\max} = 26$ выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись два последних граничных условия в (7). Для того чтобы получить экономичную и надежную сетку для вычислений, были выбраны ячейки с размерами $\Delta X = 0,05$, $\Delta Y = 0,05$ и временным шагом $\Delta t = 0,01$. При этом при уменьшении размеров ячеек на 50 % в X - и Y -направлениях результаты различались в четвертом десятичном знаке. Поэтому данные размеры

Таблица 1

Значения температуры и локального поверхностного трения в стационарном состоянии для однородного теплового потока на поверхности при $X = 1,0$, $n = 0$, $M = 0$, $\varepsilon = 0$

Pr	T		τ_X	
	Работа [1]	Настоящая работа	Работа [1]	Настоящая работа
0,72	1,7864	1,794 50	1,2240	1,235 55
1,00	1,6327	1,639 84	1,0797	1,089 92
2,00	1,3633	1,369 09	0,8293	0,837 26
4,00	1,1508	1,155 81	0,6373	0,643 43
6,00	1,0464	1,050 82	0,5462	0,551 38
8,00	0,9796	0,983 52	0,4895	0,493 99
10,00	0,9314	0,934 94	0,4494	0,453 51
100,00	0,5675	0,565 12	0,1840	0,184 37

Таблица 2

Значения стационарного локального поверхностного трения и локального числа Нуссельта при $X = 1,0$, $n = 0,5$, $M = 0$, $\varepsilon = 0$ и различных значениях числа Прандтля

Pr	τ_X		Nu $_X$	
	Работа [8]	Настоящая работа	Работа [8]	Настоящая работа
0,72	1,7864	1,794 50	1,2240	1,235 55
1,00	1,6327	1,639 84	1,0797	1,089 92
2,00	1,3633	1,369 09	0,8293	0,837 26

были рассмотрены как подходящие малые размеры для расчетов. Вычисления выполнялись до тех пор, пока не достигалась сходимость. Решение считалось установившимся, когда абсолютная разность значений скорости U и температуры T на двух последовательных временных шагах была меньше 10^{-5} во всех узлах решетки. При этом производная в уравнении (8) оценивалась с использованием пятиточечной аппроксимационной формулы.

3. Результаты расчетов и их обсуждение. Для того чтобы показать точность расчетов, численные результаты, полученные для стационарного состояния при $X = 1,0$, $Gr_L^* = Gr_L \cos \varphi$ (т. е. когда численные решения, полученные из уравнений (4)–(6), не зависят от угла конуса φ), сравнивались с известными автомодельными решениями. В табл. 1 приведены значения локального поверхностного трения τ_X и температуры T , полученные при различных значениях числа Прандтля в работе [1] и настоящей работе.

В табл. 2 представлены значения стационарного локального поверхностного трения τ_X и локального числа Nu $_X$ при $X = 1,0$, $n = 0,5$ и различных значениях числа Прандтля. Сравнение результатов, полученных в настоящей работе, с неавтомодельными результатами [8] показывает, что они хорошо согласуются.

Затем вычислялось время, необходимое для достижения установившегося состояния, при различных значениях параметра диссипации ε , числа Прандтля Pr, полуугла раствора конуса φ , параметра магнитного поля M и показателя степени n для меняющегося вдоль поверхности теплового потока. На рис. 1–6 показаны зависимости скорости и температуры от времени при различных значениях параметров ε , Pr, φ , M , n . Видно, что скорость и температура с течением времени увеличиваются, достигая максимума и впоследствии установившегося значения. Из табл. 3 следует, что при Pr = 0,2 скорость достигает максимума по времени $U = 0,686 74$ при $t = 2,39$, затем постепенно уменьшается со временем и при $t = 3,94$ достигает значения $U = 0,682 07$, соответствующего установившемуся состоянию. Разность между максимумом скорости по времени и значением в установившемся

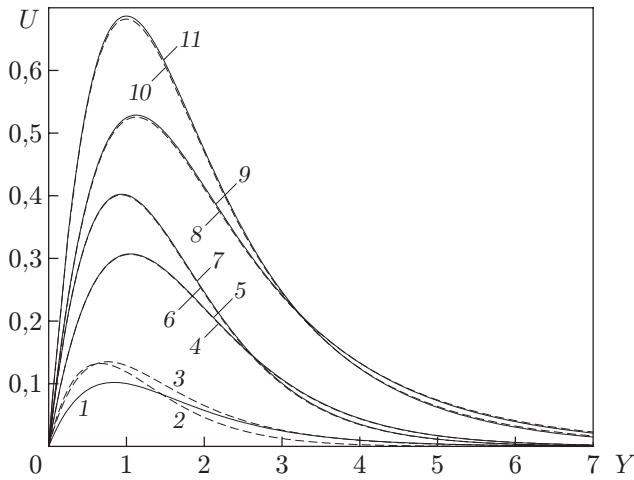


Рис. 1

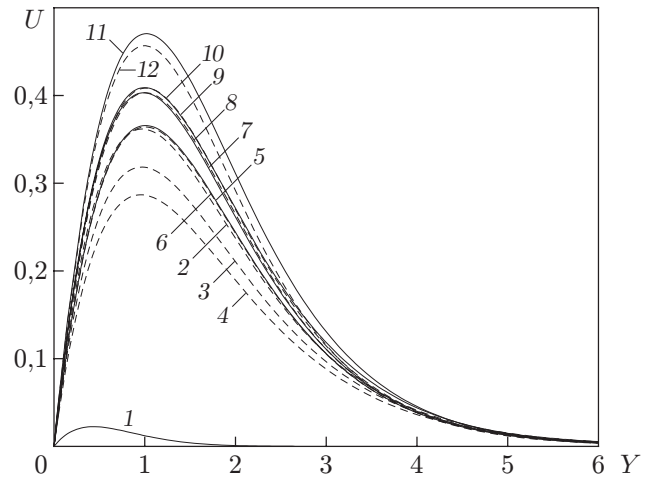


Рис. 2

Рис. 1. Распределения скорости по координате Y при $X = 1,0$, $M = 0,5$, $n = 0,5$, $\varepsilon = 1,0$ и различных значениях параметров Pr , φ , t :

1 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 0,40$; 2 — $Pr = 7,0$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 17,07$; 3 — $Pr = 7,0$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 14,04$; 4 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 4,97$; 5 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 6,29$; 6 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 3,90$; 7 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 5,14$; 8 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 3,03$; 9 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 4,77$; 10 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 2,39$; 11 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 3,94$; сплошные кривые — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Рис. 2. Распределения скорости по координате Y при $X = 1,0$, $Pr = 0,71$, $\varphi = 45^\circ$, $\varepsilon = 0,5$ и различных значениях параметров M , n , t :

1 — $M = 1,0$, $n = 1,0$, $t = 0,30$; 2 — $M = 1,0$, $n = 0$, $t = 4,71$; 3 — $M = 1,0$, $n = 0,5$, $t = 5,21$; 4 — $M = 1,0$, $n = 1,0$, $t = 6,38$; 5 — $M = 0$, $n = 1,0$, $t = 4,32$; 6 — $M = 0$, $n = 1,0$, $t = 6,34$; 7 — $M = 0$, $n = 0,5$, $t = 3,58$; 8 — $M = 0$, $n = 0,5$, $t = 5,41$; 9 — $M = 0,5$, $n = 0$, $t = 3,26$; 10 — $M = 0,5$, $n = 0$, $t = 4,70$; 11 — $M = 0$, $n = 0$, $t = 2,88$; 12 — $M = 0$, $n = 0$, $t = 4,70$; сплошные кривые — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

состоянии уменьшается при увеличении числа Прандтля жидкости и при больших значениях числа Прандтля стремится к нулю. Уменьшение скорости с увеличением числа Прандтля обусловлено тем, что жидкости с большим числом Прандтля имеют бóльшую вязкость и, следовательно, медленнее движутся. Однако при больших значениях числа Прандтля времени для достижения установившегося состояния требуется больше, чем при малых.

Из рис. 4–6 следует, что температура уменьшается при увеличении Pr .

При увеличении угла φ импульс силы вдоль конической поверхности уменьшается. Следовательно, разность максимального по времени значения скорости и значения в установившемся состоянии уменьшается с увеличением угла φ . При увеличении угла φ касательная компонента силы плавучести уменьшается, вследствие чего уменьшается и скорость. Также с увеличением угла φ увеличиваются толщина пограничного слоя и время, необходимое для установления стационарного состояния. Установлено, что толщина теплового и гидродинамического пограничного слоев увеличивается с увеличением φ . Скорость вблизи поверхности конуса увеличивается с уменьшением φ , однако на большом расстоянии от поверхности наблюдается обратная тенденция.

При увеличении параметра n градиент теплового потока вдоль конуса уменьшается вблизи его вершины. Таким образом, с увеличением значения n импульс силы вдоль поверхности конуса уменьшается вблизи вершины. Следовательно, разность максимального

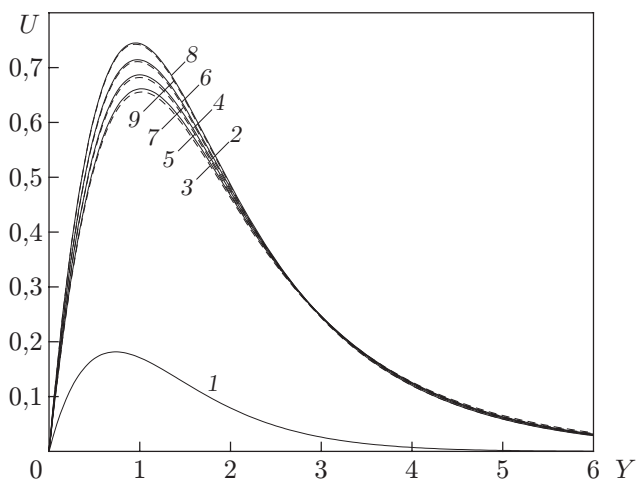


Рис. 3

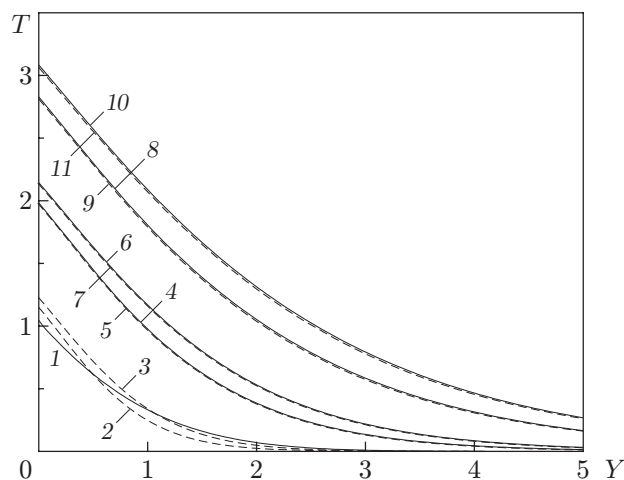


Рис. 4

Рис. 3. Распределения скорости по координате Y при $X = 1,0$, $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $M = 0,5$, $n = 0,5$ и различных значениях ε и t :

1 — $\varepsilon = 3,0$, $t = 0,50$; 2 — $\varepsilon = 0$, $t = 2,33$; 3 — $\varepsilon = 0$, $t = 3,78$; 4 — $\varepsilon = 1,0$, $t = 2,40$; 5 — $\varepsilon = 1,0$, $t = 3,94$; 6 — $\varepsilon = 2,0$, $t = 2,49$; 7 — $\varepsilon = 2,0$, $t = 4,09$; 8 — $\varepsilon = 3,0$, $t = 2,59$; 9 — $\varepsilon = 3,0$, $t = 4,18$; сплошные кривые — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Рис. 4. Распределения температуры по координате Y при $X = 1,0$, $M = 0,5$, $n = 0,5$, $\varepsilon = 1,0$ и различных значениях Pr , φ , t :

1 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 0,17$; 2 — $Pr = 7,0$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 14,04$; 3 — $Pr = 7,0$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 17,07$; 4 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 4,15$; 5 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 5,14$; 6 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 5,15$; 7 — $Pr = 0,71$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 6,29$; 8 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 2,23$; 9 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $t = 3,94$; 10 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 2,75$; 11 — $Pr = 0,2$, $\varphi = 60^\circ$, $t = 4,77$; сплошные кривые — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

по времени значения и значения в установившемся состоянии уменьшается при увеличении значения n (табл. 4). И скорость, и температура уменьшаются при увеличении n .

В установившемся состоянии скорость увеличивается с увеличением вязкого диссипативного нагрева. Вязкое диссипативное тепло влияет на время установления стационарного состояния только при очень больших числах Прандтля. Температура увеличивается с увеличением вязкого диссипативного нагрева независимо от значения Pr жидкости. С увеличением значения параметра вязкой диссипации времени для достижения стационарного состояния требуется больше (табл. 5).

Разность значения в стационарном состоянии и максимума по времени уменьшается при увеличении M . Однако при больших значениях M временного максимума не наблюдается. Влияние поперечного магнитного поля на электропроводящую жидкость приводит к увеличению силы сопротивления, называемой силой Лоренца. Эта сила замедляет движение жидкости и увеличивает ее температуру.

Локальное напряжение сдвига на стенке уменьшается при увеличении Pr , поскольку скорость при этом уменьшается. С увеличением φ локальное поверхностное трение уменьшается (рис. 7, 8), вследствие того что уменьшается скорость. Установлено, что при увеличении интенсивности магнитного поля локальное напряжение сдвига на стенке уменьшается. Локальное поверхностное трение уменьшается с увеличением параметра n , влияние которого на локальное поверхностное трение больше вблизи вершины конуса и постепенно уменьшается при увеличении X . Увеличение вязкого диссипативного тепло-

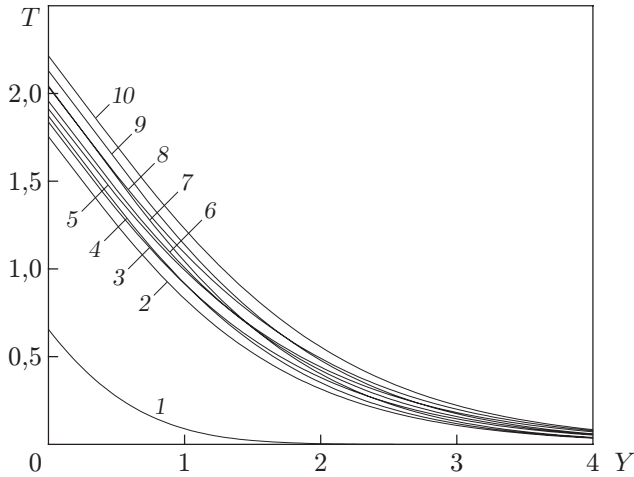


Рис. 5

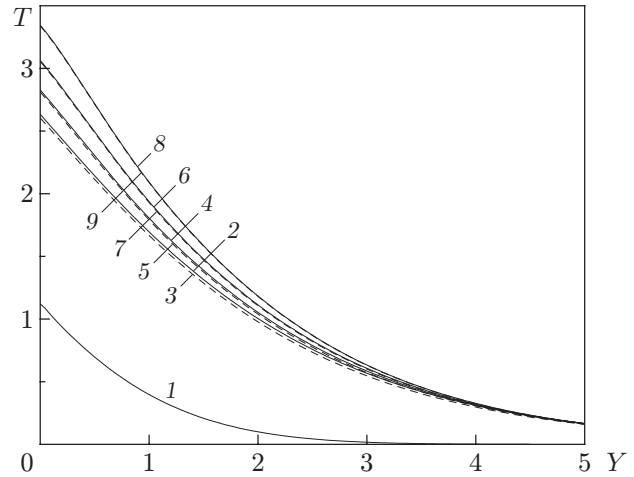


Рис. 6

Рис. 5. Распределения температуры по координате Y при $X = 1,0$, $Pr = 0,71$, $\varphi = 45^\circ$, $\varepsilon = 0,5$ и различных значениях M , n , t :
 1 — $M = 0$, $n = 1,0$, $t = 0,24$; 2 — $M = 0$, $n = 1,0$, $t = 6,34$; 3 — $M = 0,5$, $n = 1,0$, $t = 4,84$;
 4 — $M = 0$, $n = 0,5$, $t = 5,41$; 5 — $M = 1,0$, $n = 1,0$, $t = 6,38$; 6 — $M = 0,5$, $n = 0,5$, $t = 5,55$;
 7 — $M = 1,0$, $n = 0,5$, $t = 5,21$; 8 — $M = 0$, $n = 0$, $t = 4,70$; 9 — $M = 0,5$, $n = 0$, $t = 4,70$; 10 —
 $M = 1,0$, $n = 0$, $t = 4,71$; 1 — неустановившийся режим, 2–10 — установившийся режим

Рис. 6. Распределения температуры по координате Y при $X = 1,0$, $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$, $M = 0,5$, $n = 0,5$ и различных значениях ε и t :
 1 — $\varepsilon = 0$, $t = 0,20$; 2 — $\varepsilon = 0$, $t = 1,97$; 3 — $\varepsilon = 0$, $t = 3,78$; 4 — $\varepsilon = 1,0$, $t = 2,23$; 5 — $\varepsilon = 1,0$,
 $t = 3,94$; 6 — $\varepsilon = 2,0$, $t = 2,48$; 7 — $\varepsilon = 2,0$, $t = 4,09$; 8 — $\varepsilon = 3,0$, $t = 2,73$; 9 — $\varepsilon = 3,0$, $t = 4,18$;
 сплошные кривые — неустановившийся режим, штриховые — установившийся режим

Таблица 3

Максимальные по времени (МВ) значения и значения в установившемся состоянии (УС) скорости и температуры при $\varepsilon = 1,0$, $M = 0,5$, $n = 0,5$ и различных значениях Pr и φ

Pr	φ	U		t		T		t	
		МВ	УС	МВ	УС	МВ	УС	МВ	УС
0,20	30	0,686 74	0,682 07	2,390	3,940	2,828 31	2,811 91	2,230	3,940
	60	0,528 51	0,525 25	3,030	4,770	3,082 43	3,063 92	2,750	4,770
0,71	30	0,402 42	0,401 24	3,900	5,140	1,983 40	1,982 00	4,150	5,140
	60	0,307 18	0,306 51	4,970	6,290	2,144 58	2,143 30	5,150	6,290
7,00	30	—	0,135 06	—	14,040	—	1,147 76	—	14,040
	60	—	0,102 07	—	17,070	—	1,225 92	—	17,070

Таблица 4

Максимальные по времени значения и значения в установившемся состоянии скорости и температуры при $\varepsilon = 0,5$, $\varphi = 45^\circ$, $Pr = 0,71$ и различных значениях M , n

M	n	U		t		T		t	
		МВ	УС	МВ	УС	МВ	УС	МВ	УС
0	0	0,468 58	0,456 69	2,880	4,700	2,063 15	2,042 99	3,020	4,700
	0,5	0,408 48	0,403 22	3,580	5,410	1,883 59	1,871 09	3,440	5,410
	1,0	0,365 75	0,364 06	4,320	6,340	1,762 57	1,753 54	3,640	6,340
0,5	0	0,408 99	0,403 05	3,260	4,700	2,136 53	2,129 32	3,440	4,700
	0,5	0,356 10	0,354 86	4,180	5,550	1,958 98	1,956 62	4,240	5,550
	1,0	—	0,319 44	—	4,840	—	1,836 97	—	4,840
1,0	0	0,363 38	0,361 65	3,690	4,710	2,215 21	2,214 00	4,010	4,710
	0,5	—	0,318 32	—	5,210	—	2,036 98	—	5,210
	1,0	—	0,286 85	—	6,380	—	1,912 75	—	6,380

Таблица 5

Максимальные по времени значения и значения в установившемся состоянии скорости и температуры при $n = 0,5$, $M = 0,5$, $Pr = 0,2$, $\varphi = 30^\circ$ и различных значениях ε

ε	U		t		T		t	
	МВ	УС	МВ	УС	МВ	УС	МВ	УС
0	0,661 32	0,655 39	2,330	3,780	2,633 34	2,604 85	1,970	3,780
1,0	0,686 74	0,682 07	2,400	3,940	2,828 31	2,811 91	2,230	3,940
2,0	0,714 21	0,710 76	2,490	4,090	3,063 65	3,054 19	2,480	4,090
3,0	0,744 92	0,742 69	2,590	4,180	3,344 37	3,339 04	2,730	4,180

выделения является причиной роста локального поверхностного трения. Влияние вязкой диссипации вблизи вершины конуса отсутствует, но увеличивается с увеличением расстояния от вершины вдоль поверхности конуса.

Локальное число Нуссельта увеличивается при увеличении Pr , этот эффект усиливается по мере удаления от вершины вдоль поверхности конуса (рис. 9, 10). Таким образом, влияние числа Прандтля Pr на локальное число Нуссельта больше, чем на другие параметры. На рис. 9, 10 видно, что при увеличении M локальное число Нуссельта уменьшается. Также уменьшение локального числа Нуссельта наблюдается при увеличении угла φ , поскольку при этом увеличивается температура. На рис. 9, 10 видно, что вблизи вершины конуса влияние вязкой диссипации на локальное число Нуссельта не существенно, однако при увеличении расстояния от вершины конуса оно увеличивается. Вблизи вершины конуса локальное число Нуссельта увеличивается при уменьшении n , на большом расстоянии от вершины конуса наблюдается обратная тенденция.

Заключение. Проведено численное исследование ламинарного свободно-конвективного теплообмена для течения на поверхности полубесконечного вертикального конуса с переменным тепловым потоком. В уравнении энергии учтены эффекты вязкой диссипации. При этом в направлении по нормали к потоку было приложено однородное поперечное магнитное поле. Безразмерные управляющие уравнения решены с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка — Николсона. Проведено сравнение полученных и ранее опубликованных результатов и показано, что они хорошо согласуются.

Разность между максимальным по времени значением и значением в установившемся состоянии уменьшается при увеличении параметров n и φ .

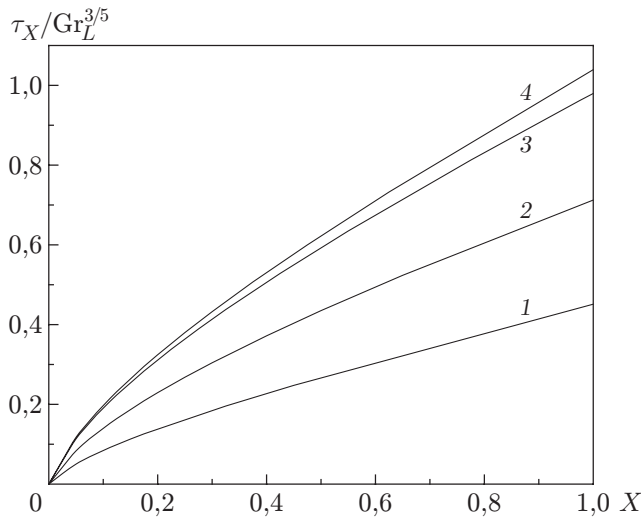


Рис. 7

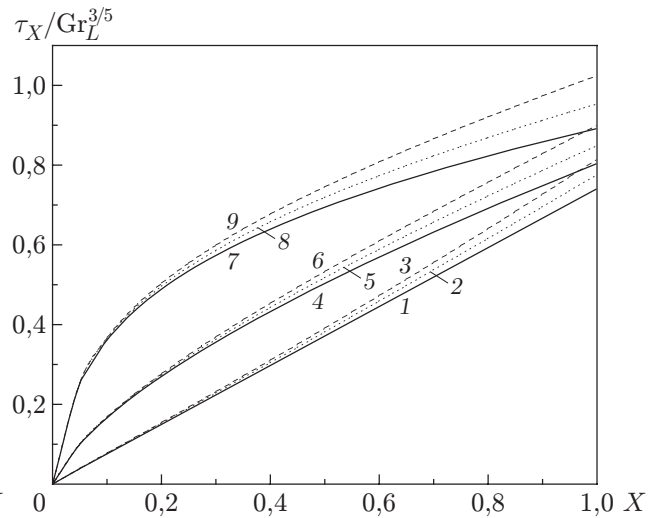


Рис. 8

Рис. 7. Распределения локального поверхностного трения по координате X в установившемся режиме при $\varepsilon = 1,0$, $n = 0,5$ и различных значениях Pr , M , φ :

1 — $Pr = 7,0$, $M = 0,5$, $\varphi = 30^\circ$; 2 — $Pr = 0,71$, $M = 0,5$, $\varphi = 60^\circ$; 3 — $Pr = 0,71$, $M = 1,0$, $\varphi = 30^\circ$; 4 — $Pr = 0,71$, $M = 0,5$, $\varphi = 30^\circ$

Рис. 8. Распределения локального поверхностного трения по координате X в установившемся режиме при $Pr = 0,71$, $M = 1,0$, $\varphi = 45^\circ$ и различных значениях ε и n :

1-3 — $n = 1,0$, 4-6 — $n = 0,5$, 7-9 — $n = 0$; 1, 4, 7 — $\varepsilon = 0$, 2, 5, 8 — $\varepsilon = 1,0$, 3, 6, 9 — $\varepsilon = 2,0$

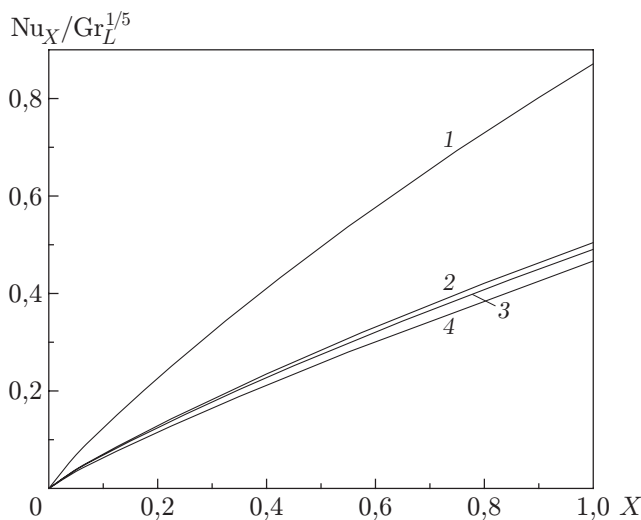


Рис. 9

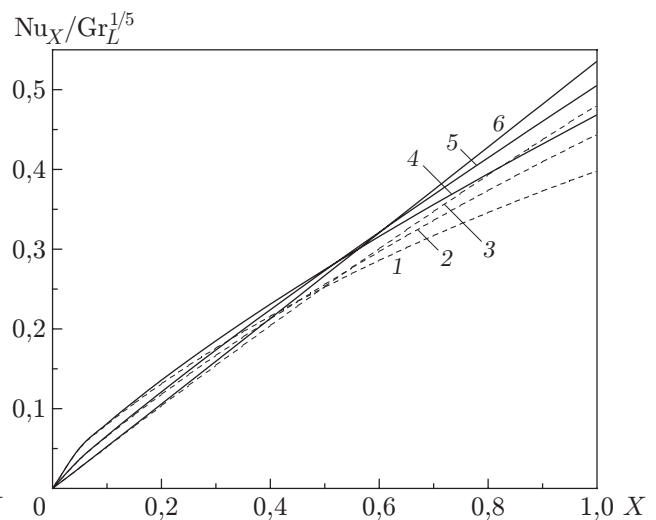


Рис. 10

Рис. 9. Распределения локального числа Нуссельта по координате X в установившемся режиме при $n = 0,5$, $\varepsilon = 1,0$ и различных значениях Pr , M , φ :

1 — $Pr = 7,0$, $M = 0,5$, $\varphi = 30^\circ$; 2 — $Pr = 0,71$, $M = 0,5$, $\varphi = 30^\circ$; 3 — $Pr = 0,71$, $M = 1,0$, $\varphi = 30^\circ$; 4 — $Pr = 0,71$, $M = 0,5$, $\varphi = 60^\circ$

Рис. 10. Распределения локального числа Нуссельта по координате X в установившемся режиме при $Pr = 0,71$, $M = 1,0$, $\varphi = 45^\circ$ и различных значениях ε и n :

1-3 — $\varepsilon = 2,0$ (1 — $n = 0$, 2 — $n = 0,5$, 3 — $n = 1,0$); 4-6 — $\varepsilon = 0$ (4 — $n = 0$, 5 — $n = 0,5$, 6 — $n = 1,0$)

Вязкое диссипативное тепловыделение влияет на время установления стационарного состояния только при очень больших числах Прандтля. При увеличении вязкого диссипативного нагрева стационарная скорость увеличивается.

Увеличение вязкого диссипативного тепловыделения вызывает увеличение локального поверхностного трения. Вблизи вершины конуса влияние вязкой диссипации не существенно, однако при увеличении расстояния от вершины вдоль поверхности конуса постепенно увеличивается.

Локальное число Нуссельта уменьшается с увеличением угла φ , поскольку при этом увеличивается температура.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lin F. N.** Laminar convection from a vertical cone with uniform surface heat flux // *Lett. Heat Mass Transfer*. 1976. V. 3. P. 49–58.
2. **Na T. Y., Chiou J. P.** Laminar natural convection over a slender vertical frustum of a cone with constant wall heat flux // *Wärme- und Stoffübertrag.* 1980. Bd 13. S. 73–78.
3. **Alamgir M.** Overall heat transfer from vertical cones in laminar free convection: an approximate method // *Trans. ASME J. Heat Transfer*. 1989. V. 101. P. 174–176.
4. **Pop I., Takhar H. S.** Compressibility effects in laminar free convection from a vertical cone // *Appl. Sci. Res.* 1991. V. 48. P. 71–82.
5. **Pop I., Watanabe T.** Free convection with uniform suction or injection from a vertical cone for constant wall heat flux // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 1992. V. 19. P. 275–283.
6. **Gorla R. S. R., Krishnan V., Pop I.** Natural convection flow of a power-law fluid over a vertical frustum of a cone under uniform heat flux conditions // *Mech. Res. Comm.* 1994. V. 21. P. 139–146.
7. **Kumari M., Pop I.** Free convection over a vertical rotating cone with constant wall heat flux // *J. Appl. Mech. Engng.* 1998. V. 3. P. 451–464.
8. **Hossain M. A., Paul S. C.** Free convection from a vertical permeable circular cone with non-uniform surface heat flux // *Heat Mass Transfer*. 2001. V. 37. P. 167–173.
9. **Hossain M. A., Paul S. C., Mandal A. C.** Natural convection flow along a vertical circular cone with uniform surface temperature and surface heat flux in a thermally stratified medium // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*. 2002. V. 12. P. 290–305.
10. **Hossain M. A., Paul S. C.** Free convection from a vertical permeable circular cone with non-uniform surface temperature // *Acta Mech.* 2001. V. 151. P. 103–114.
11. **Pop I., Grosan T., Kumari M.** Mixed convection along a vertical cone for fluids of any Prandtl number case of constant wall temperature // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*. 2003. V. 13. P. 815–829.
12. **Grosan T., Postelnicu A., Pop I.** Free convection boundary layer over a vertical cone in a non newtonian fluid saturated porous medium with internal heat generation // *Techn. Mech.* 2004. Bd 24, N 4. S. 91–104.
13. **Vapuji Pullepul, Ekambavannan K., Pop I.** Transient laminar free convection from a vertical cone with non-uniform surface heat flux // *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* 2008. V. 8, N 1. P. 75–99.
14. **Sparrow E. M., Cess R. D.** The effect of a magnetic field on free convection heat transfer // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 1961. V. 3, N 4. P. 267–274.
15. **Singh A. K., Nirmal C. Sacheti.** Finite difference analysis of unsteady hydromagnetic free convection flow with constant heat flux // *Astrophys. Space Sci.* 1988. V. 150. P. 303–308.

16. **Nirmal C. Sacheti, Pallath Chandran, Singh A. K.** An exact solution for unsteady magnetohydrodynamic free convection flow with constant heat flux // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 1994. V. 12. P. 131–142.
17. **Elbashbeshy E. M. A.** Heat and mass transfer along a vertical plate with variable surface tension and concentration in the presence of the magnetic field // Intern. J. Engng Sci. 1997. V. 34, N 5. P. 515–522.
18. **Kumari M., Nath G.** Development of two dimensional boundary layer with an applied magnetic field due to an impulsive motion // Indian J. Pure Appl. Math. 1999. V. 30. P. 695–708.
19. **Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G.** Unsteady mixed convection on the stagnation point flow adjacent to a vertical plate with a magnetic field // Heat Mass Transfer. 2005. V. 41. P. 387–398.
20. **Joaquin Zueco.** Transient free convection with mass transfer MHD micropolar fluid in a porous plate by the network method // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2008. V. 57. P. 861–876.
21. **Gebhart B.** Effects of viscous dissipation in natural convection // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. P. 225–232.
22. **Soundalgekar V. M., Jaiswal B. S., Uplekar A. G., Takhar H. S.** Transient free convection flow of viscous dissipative fluid past a semi-infinite inclined plate // Appl. Mech. Engng. 1999. V. 4, N 2. P. 203–218.
23. **Gokhale M. Y., Fathia Moh. Al Samman.** Effects of mass transfer on the transient free convective flow of a dissipative fluid along a semi-infinite vertical plate with constant heat flux // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 999–1011.
24. **Pantokratoras A.** Effect of viscous dissipation and pressure stress work in natural convection along a vertical isothermal plate // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 4979–4983.
25. **Ganesan P., Palani G.** Transient free convection flow of a viscous dissipative fluid past a semi-infinite inclined plate // Intern. J. Appl. Mech. Engng. 2003. V. 8, N 3. P. 395–402.
26. **Palani G.** Viscous dissipative fluid past a semi-infinite vertical plate with variable surface temperature // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2007. V. 55. P. 1157–1169.
27. **Lekas Th. I., Georgantopoulos.** Influence of viscous dissipation on a hydromagnetic field // Astrophys. Space Sci. 1992. V. 191. P. 299–305.
28. **Amin M. F. El.** Combined effect of magnetic field and viscous dissipation on a power-law fluid over plate with variable surface heat flux embedded in a porous medium // J. Magnetism Magnetic Mater. 2003. V. 261. P. 228–237.
29. **Amakiri A. R. C., Ogulu A.** The effect of viscous dissipative heat and uniform magnetic field on the free convective flow through a porous medium with heat generation/absorption // Europ. J. Sci. Res. 2006. V. 15, N 4. P. 436–445.
30. **Joaquin Zueco Jordan.** Numerical study of an unsteady free convective magnetohydrodynamic flow of a dissipative fluid along a vertical plate subject to a constant heat flux // Intern. J. Engng Sci. 2006. V. 44. P. 1380–1393.
31. **Carnahan B.** Applied numerical methods / B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes. N. Y.: John Wiley and Sons, 1969.

Поступила в редакцию 13/VI 2012 г.