ПМТФ, № 3, 1964

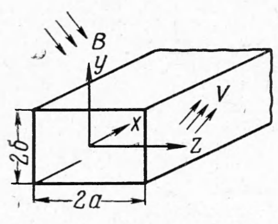
# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С НЕПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

*С. А. Регирер*

*(Москва)*

Плоская задача об отыскании электрического поля в канале с параллельными непроводящими стенками при постоянной и переменной проводимости жидкости рассматривалась ранее в работах [1-3]. Полученные распределения электрического потенциала и тока могли быть истолкованы как результат усреднения соответствующих распределений в канале прямоугольного сечения [4]. Для некоторых других величин, например для джоулевой диссипации, такой связи со средними характеристиками прямоугольного канала, вообще говоря, не существует, если скорость жидкости изменяется в направлении магнитного поля. Вместе с тем, учет этих изменений представляет интерес, в частности, при оценке влияния «поперечного краевого эффекта», т. е. замкнутых токов, циркулирующих в плоскости поперечного сечения канала. Ниже изложено полное решение трехмерной задачи о распределении токов в канале прямоугольного сечения с непроводящими стенками, справедливое при любой заданной зависимости векторов скорости и магнитного поля от координат. Исследовано также решение, соответствующее частному случаю прямолинейного течения в неоднородном поперечном поле. В заключение обсуждаются условия, которым должно удовлетворять в общем случае задаваемое при решении магнитное поле.

1. Рассмотрим прямоугольный канал $|x| < \infty$, $|y| < \delta$, $|z| < a$ с непроводящими стенками, в котором происходит стационарное движение изотропно проводящей жидкости (фиг. 1). Если внешнее магнитное поле $\mathbf{B}(x, y, z)$ и распределение скоростей $\mathbf{V}(x, y, z)$ известны, а индуцированным полем можно пренебречь, то распределение электрического потенциала $\varphi$ и плотности тока $\mathbf{j}$ может быть найдено из системы [4]




Фиг. 1

$$\triangle \varphi = \frac{1}{c} \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{V} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right) \qquad (\sigma = \mathrm{const}) \tag{1.2}$$

с граничными условиями (1.3)

$$j_y = \sigma\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f_\pm\right) = 0 \qquad \text{при } y = \pm\delta$$

$$j_z = \sigma\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + g_\pm\right) = 0 \qquad \text{при } z = \pm a$$

Здесь

$$f_\pm(x, z) = \frac{1}{c}(\mathbf{V}\times\mathbf{B})_y \qquad \text{при } y = \pm\delta$$

$$g_\pm(x, y) = \frac{1}{c}(\mathbf{V}\times\mathbf{B})_z \qquad \text{при } z = \pm a$$

Будем предполагать далее, что **V** и **B** — ограниченные функции координат, причем

$$\mathbf{B} \to 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \to 0 \quad \text{при } x \to -\infty$$
$$\mathbf{B} \to \mathbf{B}_\infty(y, z), \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty \tag{1.4}$$

и искать решение системы (1.1) — (1.3), удовлетворяющее асимптотическим условиям

$$\varphi \to 0 \quad \text{при } x \to -\infty$$
$$j_x = \sigma\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_x\right] \to 0 \quad \text{при } x \to \infty \tag{1.5}$$

Легко проверить, что функция (1.6)

$$\psi^\circ = \frac{(z^2 - a^2)^2 [(y+\delta)^2 f_+ - (\delta - y)^2 f_-]}{4\delta [(z^2 - a^2)^2 + (y^2 - \delta^2)^2]} + \frac{(y^2 - \delta^2)^2 [(z+a)^2 g_+ - (a - z)^2 g_-]}{4a [(z^2 - a^2)^2 + (y^2 - \delta^2)^2]}$$

удовлетворяет граничным условиям (1.3). Вводя вспомогательный потенциал $\Phi = \varphi - \varphi^\circ$ и полагая

$$A(x, y, z) = \frac{1}{c} \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{V} - \triangle \varphi^\circ \tag{1.7}$$

получим для $\Phi$ краевую задачу

$$\triangle \Phi = A(x, y, z) \tag{1.8}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm\delta, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \pm a$$

с асимптотическими условиями

$$\Phi \to 0 \quad \text{при } x \to -\infty, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \to \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_x \quad \text{при } z \to \infty \tag{1.9}$$

Известно, что поставленная задача имеет решение, если правые части в (1.8), (1.9) удовлетворяют некоторым интегральным условиям. Эти условия и налагаемые ими на **V** и **B** ограничения, вместе с ограничениями, вытекающими из других соображений, рассматриваются в конце статьи. Здесь же предполагается, что решение существует и может быть представлено в виде ряда

$$\Phi = \frac{N_{00}}{4} + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(M_{n0} \sin\frac{r_n y}{\delta} + N_{n0} \cos\frac{\pi n y}{\delta}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\left(N_{0m} \cos\frac{\pi m z}{a} + T_{0m} \sin\frac{r_m z}{a}\right)\right] + \tag{1.10}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(M_{nm} \sin\frac{r_n y}{\delta} \cos\frac{\pi m z}{a} + N_{nm} \cos\frac{\pi n y}{\delta} \cos\frac{\pi m z}{a} + \right.$$
$$\left. + S_{nm} \sin\frac{r_n y}{\delta} \sin\frac{r_m z}{a} + T_{nm} \cos\frac{\pi n y}{\delta} \sin\frac{r_m z}{a}\right)$$

Тогда $M_{nm}(x)$, $N_{nm}(x)$, $S_{nm}(x)$, $T_{nm}(x)$ — ограниченные при $|x| \to \infty$

решения обыкновенных уравнений

$$M_{nm}'' - \mu_{nm}^2 M_{nm} = m_{nm}, \qquad N_{nm}'' - \nu_{nm}^2 N_{nm} = n_{nm}$$
$$S_{nm}'' - \sigma_{nm}^2 S_{nm} = s_{nm}, \qquad T_{nm}'' - \tau_{nm}^2 T_{nm} = t_{nm} \tag{1.11}$$

Здесь $r_n = \pi (n - 1/2)$ и

$$\mu_{nm}^2 = \frac{r_n^2}{\delta^2} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2}, \qquad m_{nm} = \frac{1}{a\delta} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} A \sin \frac{r_n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a} \, dy\, dz$$

$$\nu_{nm}^2 = \frac{\pi^2 n^2}{\delta^2} + \frac{\pi^2 m^2}{a^2}, \qquad n_{nm} = \frac{1}{a\delta} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} A \cos \frac{\pi n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a} \, dy\, dz$$

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{r_n^2}{\delta^2} + \frac{r_m^2}{a^2}, \qquad s_{nm} = \frac{1}{a\delta} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} A \sin \frac{r_n y}{\delta} \sin \frac{r_m z}{a} \, dy\, dz$$

$$\tau_{nm}^2 = \frac{\pi^2 n^2}{\delta^2} + \frac{r_m^2}{a^2}, \qquad t_{nm} = \frac{1}{a\delta} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} A \cos \frac{\pi n y}{\delta} \sin \frac{r_m z}{a} \, dy\, dz$$

При $n$, $m$ не равных одновременно нулю

$$M_{nm} = -\frac{1}{2\mu_{nm}} \int_{-\infty}^{\infty} m_{nm}(\xi) \exp(-\mu_{nm} |x - \xi|)\, d\xi \tag{1.12}$$

Аналогичным образом $N_{nm}$ выражается через $\nu_{nm}$ и $n_{nm}(x)$, $S_{nm}$ — через $\sigma_{nm}$ и $s_{nm}(x)$, $T_{nm}$ — через $\tau_{nm}$ и $t_{nm}(x)$. При $n = m = 0$

$$N_{00} = \int_{-\infty}^{x} n_{00}(\xi)(x - \xi)\, d\xi \tag{1.13}$$

После того как распределение потенциала найдено, из закона Ома (1.2) определяется плотность тока

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\Phi - \nabla\varphi^\circ + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right) \tag{1.14}$$

Джоулева диссипация $Q$ вычисляется после этого по формулам

$$Q = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} j^2\, dy\, dz\, dx = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{jVB}\, dy\, dz\, dx \tag{1.15}$$

Второе равенство (1.15) справедливо только для каналов с непроводящими стенками.

2. Представляет интерес рассмотрение прямолинейного течения с симметричным профилем скорости при наличии плоского магнитного поля, неизменного вдоль одной из поперечных осей координат. Пусть, например,

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_x v(y, z), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{e}_x B_x(x, z) + \mathbf{e}_z B_z(x, z) \tag{2.1}$$

причем

$$v(y, z) = v(y, -z) = v(-y, z), \qquad B_z(x, z) = B_z(x, -z)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{B} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_\infty, \qquad B_\infty = \mathrm{const}$$

В этом случае

$$g_{\pm} = 0, \qquad f_{+} = f_{-} = f(x, z)$$

$$\varphi^\circ = \frac{y(z^2 - a^2) f}{(z^2 - a^2)^2 + (y^2 - \delta^2)^2}, \qquad A = -\frac{1}{c} B_z \frac{\partial v}{\partial y} - \triangle \varphi^\circ \tag{2.2}$$

Функция $A(x, y, z)$ оказывается четной по $z$ и нечетной по $y$, и в ее тригонометрическом разложении отличны от нуля только коэффициенты $m_{nm}$. Поэтому решение краевой задачи (1.8) представляется рядом

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} M_{n0} \sin \frac{r_n y}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_{nm} \sin \frac{r_n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a}$$

коэффициенты которого $M_{nm}$ выражаются согласно (1.12) через $m_{nm}$, причем в этом случае

$$m_{nm} = \frac{r_n}{ca\delta} \int_{-a}^{a} v_n B_z \cos \frac{\pi m z}{a} dz + \mu_{nm}{}^2 \varphi_{nm}{}^\circ \tag{2.3}$$

$$v_n = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} v \cos \frac{r_n y}{\delta} dy, \qquad \varphi_{nm}{}^\circ = \frac{1}{a\delta} \int_{-a}^{a} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^\circ \sin \frac{r_n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a} dy\, dz$$

Положив $\varphi_{nm} = M_{nm} + \varphi_{nm}{}^\circ$, получим формальные разложения потенциала и компонент плотности тока

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n0} \sin \frac{r_n y}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \sin \frac{r_n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a} \tag{2.4}$$

$$j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n0}' \sin \frac{r_n y}{\delta} - \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm}' \sin \frac{r_n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a}$$

$$j_y = -\sigma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{v B_z}{c} \right) = -\frac{\sigma}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{r_n} \left( \frac{r_n{}^2}{\delta^2} \varphi_{n0} + m_{n0} - \mu_{n0}{}^2 \varphi_{n0}{}^\circ \right) \cos \frac{r_n y}{\delta} -$$

$$- \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{r_n} \left( \frac{r_n{}^2}{\delta^2} \varphi_{nm} + m_{nm} - \mu_{nm}{}^2 \varphi_{nm}{}^\circ \right) \cos \frac{r_n y}{\delta} \cos \frac{\pi m z}{a} \tag{2.5}$$

$$j_z = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sigma \sum \sum \varphi_{nm} \frac{\pi m}{a} \sin \frac{r_n y}{\delta} \sin \frac{\pi m z}{a}$$

Заметим, что функции $A(x, y, z)$ и $\varphi^\circ(x, y, z)$ не зависят от продольной компоненты магнитного поля $B_x$. Поэтому от нее не зависит и решение (2.4), (2.5).

Джоулева диссипация в канале вычисляется по одной из формул

$$Q = \sigma a \delta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_{n0}'^2 + \frac{\delta^2}{r_n{}^2} \left( \frac{r_n{}^2}{\delta^2} \varphi_{n0} + m_{n0} - \mu_{n0}{}^2 \varphi_{n0}{}^\circ \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \varphi_{nm}'^2 + \frac{\delta^2}{r_n{}^2} \left( \frac{r_n{}^2}{\delta^2} \varphi_{nm} + m_{nm} - \mu_{nm}{}^2 \varphi_{nm}{}^\circ \right)^2 + \varphi_{nm}{}^2 \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \right] \right\} dx \tag{2.6}$$

$$Q = \sigma a \delta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\delta^2}{r_n{}^2} \left( \frac{r_n{}^2}{\delta^2} \varphi_{n0} + m_{n0} - \mu_{n0}{}^2 \varphi_{n0}{}^\circ \right) (m_{n0} - \mu_{n0}{}^2 \varphi_{n0}{}^\circ) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\delta^2}{r_n{}^2} \left( \frac{r_n{}^2}{\delta^2} \varphi_{nm} + m_{nm} - \mu_{nm}{}^2 \varphi_{nm}{}^\circ \right) (m_{nm} - \mu_{nm}{}^2 \varphi_{nm}{}^\circ) \right] \right\} dx \tag{2.7}$$

Эти выражения имеют смысл в том случае, когда $B_\infty = 0$, причем поле убывает вдоль $x$ при $|x| \to \infty$ настолько быстро, что его энергия ограничена, т. е. когда $B_z$ — функция, интегрируемая с квадратом по всей оси $x$. Если это условие не соблюдено, то интегралы в (2.6) и (2.7) расходятся, и можно исследовать только «линейную плотность» диссипации, определяемую подынтегральной функцией в (2.6). Подынтегральная функция в (2.7) для этой цели непригодна, так как не равна интегралу от $j^2/a\delta\sigma^2$ по сечению канала.

Полученное решение тесно связано с некоторыми известными ранее. Так, при $x \to \infty$, $B_z \to B_\infty \neq 0$ оно асимптотически стремится к решению Лонге — Хиггинса [5]. В другом случае, когда **V** и **B** не зависит от $z$, двойные суммы в (2.4) — (2.7) исчезают и получается решение соответствующей плоской задачи о распределении потенциала, которая для специальных видов зависимости **V**, **B** от координат $x$, $y$ рассмотрена в работах [1-3].

3. Предположим, что распределение скорости удовлетворяет условиям прилипания на стенках и выражается рядом

$$v = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) \cos \frac{r_n y}{\delta} \qquad \left( \chi_n = \frac{v_n}{U_0}, \quad \chi_n(\pm a) = 0 \right) \tag{3.1}$$

Допустим также, что изменением поперечного магнитного поля по оси $z$, по крайней мере на отрезке $|z| < a$, можно пренебречь и положить $B_z = B_0 b(x)$. Функцию $b(x)$ будем считать четной и достаточно быстро убывающей при $|x| \to \infty$. Постоянные $U_0$ и $B_0$ имеют смысл характерных значений скорости и поля соответственно. При указанных предположениях

$$\varphi^\circ \equiv 0, \qquad m_{nm} = \frac{r_n \chi_{nm}}{c\delta} U_0 B_0 b(x), \qquad \chi_{nm} = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} \chi_n(z) \cos \frac{\pi m z}{a} dz$$

$$M_{nm} = \frac{r_n}{c\delta} B_0 U_0 \psi_{nm}(x) \chi_{nm} \tag{3.2}$$

$$\psi_{nm}(x) = -\frac{1}{2\mu_{nm}} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \exp(-\mu_{nm} |x - \xi|) d\xi$$

Из формулы (2.6) для $Q$ получаем

$$Q = \frac{\sigma a U_0^2 B_0^2}{c^2 \delta} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n0}^2 q_{n0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{nm}^2 q_{nm} \right) \tag{3.3}$$

$$Q = Q^* \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{nm}^2 q_{nm} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n0}^2 q_{n0} \right) \right] \tag{3.4}$$

Здесь

$$Q^* = \frac{\sigma a U_0^2 B_0^2}{2c^2\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n0}^2 q_{n0}, \qquad q_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta^2 b^2 + r_n^2 b \psi_{nm}) dx \geqslant 0$$

Если скорость изменяется по оси $z$ практически только в узких пограничных слоях на стенках $z = \pm a$, то, вообще говоря, коэффициенты $\chi_{nm}$ малы (для $m \geqslant 1$). В предельном случае, когда $v = v(y)$ при $|y| \leqslant \delta$, $|z| < a$, из (3.3) получаем формулу плоской теории $Q = Q^*$. Очевидно, что плоская теория дает удовлетворительное приближение к более точному результату (3.4), если

$$\omega = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{nm}^2 q_{nm} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{no}^2 q_{no} \right) \ll 1 \tag{3.5}$$

Входящие в эту формулу функционалы $q_{no}$ $\{b(x)\}$ ограничены сверху некоторым числом, не зависящим от $n$ и вида функции $b(x)$, если только $b(x)$ ограничена ($b \leqslant 1$). Функционалы $q_{nm}\{b(x)\}$ при $m \geqslant 1$ не обладают этим свойством. Поэтому, если протяженность области, где поле существенно, т. е. $b \sim 1$, велика в сравнении с $\delta$, то $q_{nm}$ могут стать настолько большими, что неравенство (3.5) заведомо не будет выполнено даже при малых $\chi_{nm}$. *Исследуя* величину $\omega$ при заданных $v(y, z)$ и $b(x)$, можно для каждой задачи указать предельную протяженность зоны магнитного поля, при которой вклад в диссипацию от замкнутых поперечных токов еще остается пренебрежимо малым.

Величина $\omega$ в общем случае может быть оценена следующим образом. Пусть

$$q_{nm} < \beta_1, \quad q_{1m} > \beta_2, \quad q_{no} < \beta_3 \quad \text{при } n \geqslant 1, \ m \geqslant 1 \tag{3.6}$$

Тогда

$$2\left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{1m}^2 \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{n0}^2\right) < \omega < \frac{2\beta_1}{\chi_{10}^2 q_{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{nm}^2 \tag{3.7}$$

Суммы, входящие в эти неравенства, вычисляются в конечном виде при помощи формулы Парсеваля. Очевидно, что оценки (3.7) могут быть видоизменены и улучшены, например, путем уточнения неравенств (3.6).

4. В качестве примера рассмотрим течение в экспоненциально затухающем магнитном поле [1]

$$b(x) = \begin{cases} e^{p(x+\lambda)/\delta} & \text{при } x < -\lambda \\ 1 & \text{при } |x| < \lambda \\ e^{-p(x-\lambda)/\delta} & \text{при } x > \lambda \end{cases} \tag{4.1}$$

когда функции $\psi_{nm}(x)$ и постоянные $q_{nm}$ выражаются формулами

$$\psi_{nm} = -\frac{1}{2\mu_{nm}^2} \begin{cases} Me^{p(x+\lambda)/\delta} - M_- e^{\mu_{nm}(x+\lambda)} - M_+ e^{\mu_{nm}(x-\lambda)} & (x < -\lambda) \\ 2(1 - M_+ e^{-\mu_{nm}\lambda} \operatorname{ch} \mu_{nm} x) & (|x| < \lambda) \\ Me^{-p(x-\lambda)/\delta} - M_- e^{-\mu_{nm}(x-\lambda)} - M_+ e^{-\mu_{nm}(x+\lambda)} & (x > \lambda) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$q_{nm}(p, \lambda) = \frac{r_n^2}{\mu_{nm}^3} M_+ (1 - M_+ e^{-2\mu_{nm}\lambda}) + \left(\delta^2 - \frac{r_n^2}{\mu_{nm}^2}\right)\left(2\lambda + \frac{\delta}{p}\right) \tag{4.3}$$

$$M = \frac{2\mu_{nm}^2}{\mu_{nm}^2 - p^2/\delta^2}, \quad M_\mp = \frac{p/\delta}{\mu_{nm} \mp p/\delta}$$

Распределение скорости, следуя работам [2,5], примем в виде произведения

$$v = U_0 \chi^{(1)}(N_1, y)\, \chi^{(2)}(N_2, z)$$

$$\chi^{(1)} = \frac{N_1}{f(N_1)}(\operatorname{ch} N_1 - \operatorname{ch} N_1 y/\delta), \quad \chi^{(2)} = \frac{N_2}{f(N_2)}(\operatorname{ch} N_2 - \operatorname{ch} N_2 z/a) \tag{4.4}$$

$$f(N_k) = N_k \operatorname{ch} N_k - \operatorname{sh} N_k \qquad (k = 1, 2)$$

Здесь $U_0$ — средняя скорость, $N_k$ — геометрические параметры, характеризующие наполненность профиля. При вещественном $N_k$, изменяющемся от 0 до $\infty$, профиль скорости в плоскости $z = \text{const}$ (для $k = 1$) или $y = \text{const}$ (для $k = 2$) деформируется, переходя из параболического в однородный. При $N_k = \pi i / 2$ в соответствующих плоскостях получается косинусоидальный профиль [1] и ряд (3.1) тогда обрывается на первом члене. При больших $N_k$ относительная толщина пограничного слоя на стенках $y = \pm \delta$ и $z = \pm a$ по порядку величины равна $N_1^{-1}$ и $N_2^{-1}$ соответственно.

Коэффициенты тригонометрического разложения $\chi(y, z)$ имеют вид

$$\chi_n(z) = \frac{2N_1^3 N_2 (-1)^{n+1}}{r_n f(N_1) f(N_2)} \frac{\operatorname{ch} N_1}{r_n^2 + N_1^2} (\operatorname{ch} N_2 - \operatorname{ch} N_2 z / a) \tag{4.5}$$

$$\chi_{n0} = \frac{4N_1^3}{r_n f(N_1)} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{ch} N_1}{r_n^2 + N_1^2}, \qquad \chi_{nm} = \frac{(-1)^{n+m} N_2^2 \operatorname{sh} N_2}{(\pi^2 m^2 + N_2^2) f(N_2)} \chi_{n0}$$

Джоулева диссипация в этом случае зависит от параметров $N_k$, $p$, $\lambda/\delta$, $\delta/a$. Чтобы исследовать их влияние, рассмотрим величину $\omega$, для которой с учетом (4.5) получим

$$\omega = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \omega_m$$

$$\varepsilon_m = \frac{\chi_{nm}}{\chi_{n0}}, \quad \omega_m = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{nm}}{r_n^2 (r_n^2 + N_1^2)^2} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{n0}}{r_n^2 (r_n^2 + N_1^2)^2} \right)^{-1} \tag{4.6}$$

Для $q_{nm}$ здесь можно установить оценки более точные, чем (3.6)

$$\delta^3 \left( \frac{\alpha_1}{r_n^4} + \frac{\alpha_2}{r_n^2} \right) < q_{n0} < \delta^3 \alpha_3, \qquad \delta^3 \frac{\alpha_4}{r_n^2} < q_{nm} < \delta^3 \alpha_5 \tag{4.7}$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi^3 p^2 (1 - e^{-\pi\lambda/\delta})}{8 (p + \pi / 2)^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi^2 p}{4 (p + \pi / 2)^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{16\alpha_1}{\pi^4} + \frac{4\alpha_2}{\pi^2}, \qquad \alpha_4 = \frac{\delta^2 \pi^2 / a^2}{1 + 4\delta^2 / a^2} \left( 2 \frac{\lambda}{\delta} + \frac{1}{p} \right) \tag{4.8}$$

$$\alpha_5 = \frac{p^2 (1 - e^{-2\mu_{11}\lambda}) + p\delta\mu_{11}}{\delta\mu_{11} (p + \delta\mu_{11})^2} + 2 \frac{\lambda}{\delta} + \frac{1}{p}$$

Принимая во внимание тождества

$$\psi_1(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^2 (r_n^2 + N^2)^2} = \frac{2N \operatorname{ch} 2N - 3 \operatorname{sh} 2N + 4N}{8N^5 \operatorname{ch}^2 N}$$

$$\psi_2(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^4 (r_n^2 + N^2)^2} = \frac{2N (N^2 - 6) \operatorname{ch} 2N + 15 \operatorname{sh} 2N + 2N (N^2 - 9)}{24 N^7 \operatorname{ch}^2 N}$$

$$\psi_3(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^6 (r_n^2 + N^2)^2} = \frac{(4N^5 - 20N^3 + 90N) \operatorname{ch} 2N - 105 \operatorname{sh} 2N + 4N^5 - 20N^3 + 120N}{120N^9 \operatorname{ch}^2 N}$$

доказываемые при помощи формулы Парсеваля, получим для $\omega_m$

$$\frac{\alpha_4 \psi_2(N_1)}{\alpha_3 \psi_1(N_1)} < \omega_m < \frac{\alpha_5 \psi_1(N_1)}{\alpha_1 \psi_3(N_1) + \alpha_2 \psi_2(N_1)} \tag{4.9}$$

Отсюда, обращаясь к (4.6), найдем оценку для $\omega$

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\Psi_1(N_1)\Psi_3(N_2)<\omega<\frac{\alpha_5\Psi_3(N_2)}{\alpha_1\Psi_2(N_1)+\alpha_2\Psi_1(N_1)} \tag{4.10}$$

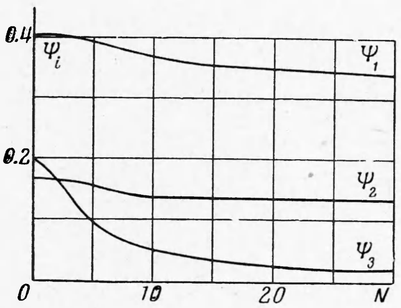
Здесь

$$\Psi_1=\frac{\psi_2}{\psi_1}, \qquad \Psi_2=\frac{\psi_3}{\psi_1}, \qquad \Psi_3(N)=\frac{N^2+N\operatorname{sh}N\operatorname{ch}N-2\operatorname{sh}^2 N}{2f^2(N)}$$

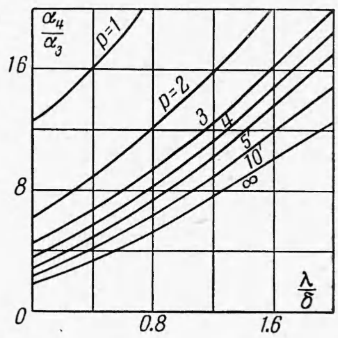
Графики функций $\Psi_1(N)$, $\Psi_2(N)$ и $\Psi_3(N)$ представлены на фиг. 2. При больших значениях $N$

$$\Psi_1\approx\frac{1}{3}, \qquad \Psi_2\approx\frac{2}{15}, \qquad \Psi_3\approx\frac{1}{2N}$$

Зависимость $\alpha_4/\alpha_3$ от $\lambda/\delta$ при различных $p$ и $\delta/a=1$ изображена на фиг. 3 для $\lambda/\delta\leqslant 2$ и $p\geqslant 1$. Заметим, что при дальнейшем увеличении $\lambda/\delta$ отношение $\alpha_4/\alpha_3$ возрастает почти линейно. Уменьшение $p$ приводит к более быстрому росту $\alpha_4/\alpha_3$, так как из (4.8) следует, что




Фиг. 2




Фиг. 3

$\alpha_4/\alpha_3\sim p^{-2}$ при $p\ll 1$. С ростом $\delta/a$ значения $\alpha_4/\alpha_3$ также увеличиваются, но сохраняют тот же порядок величины, что и при $\delta/a=1$.

Из рассмотрения полученных результатов следует, что при $\delta/a\gg 1$ параметр $\omega$ имеет порядок величины, по крайней мере не меньший, чем $N_2^{-1}$, а при $\lambda/\delta\gg 4$ или $p<1$ — превышает $N_2^{-1}$ на порядок. Поэтому даже при малой относительной толщине пограничного слоя на стенках, перпендикулярных магнитному полю, вклад поперечных токов в диссипацию может быть заметен. Например, для $N_2^{-1}=0.05$, $\lambda/\delta\geqslant 4$, $p=3$, $\delta/a=2$ получаем $\omega>0.2$, т. е. действительная диссипация более чем на 20% превышает рассчитанную по плоской теории. При большей относительной толщине пограничного слоя на стенках $z=\pm a$ (при меньших $N_2$) влияние поперечных токов становится существенным соответственно при меньших $\lambda/\delta$ и больших $p$.

Толщина пограничных слоев на стенках $y=\pm\delta$, параллельных магнитному полю, характеризуется параметром $N_1$. Как видно из приведенных оценок, его влияние на величину $\omega$ мало, и выводы, сделанные выше, справедливы для любых $N_1$. Вместе с тем, в выражение для суммарной джоулевой диссипации (3.4) этот параметр входит не только в $\omega$, но и в $Q^*$, причем $Q^*$ сильно зависит от $N_1$. Так, при изменении $N_1$ от 0 до $\infty$ величина $Q^*$ и, следовательно, $Q$ уменьшаются в полтора раза [2].

**5.** Исследованное выше решение было получено в предположении, что $\mathbf{V}(x, y, z)$, $\mathbf{B}(x, y, z)$ — заданные функции. Очевидно, что для разрешимости системы (1.1)—(1.3) необходимо только выполнение равенства

$$\lim_{l\to\infty} \iiint_D \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{V} dD = \lim_{l\to\infty} \iint_\Sigma (\mathbf{V} \times \mathbf{B})_n d\Sigma \tag{5.1}$$

где $D$, $\Sigma$ — объем и поверхность параллелепипеда $|x| \leqslant l$, $|y| < \delta$, $|z| < a$. Это условие выполняется точно, если $\mathbf{B}$ — произвольный потенциальный вектор. Оно также имеет место для различных частных случаев совместного задания $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$ в специальном виде, например в таком, как в $n^\circ$ 2—4, когда $\mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$.

При решении задач часто возникает необходимость ввести в систему (1.1) — (1.3) простое приближенное выражение для внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$ вместо точного выражения, удовлетворяющего уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ и имеющего, как правило, весьма сложную форму. При этом может оказаться (как в $n^\circ$ 3—4), что введенный вектор не удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$. Если течение жидкости непрямолинейное, то тогда может нарушиться и условие (5.1). Поэтому в подобных случаях классы аппроксимирующих функций $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$ ограничены условием (5.1) или равносильным ему требованием

$$\lim_{l\to\infty} \iiint_D \mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{B}\, dD = 0 \tag{5.2}$$

Последнее можно рассматривать как условие обращения в нуль среднего с весом $\mathbf{V}$ значения $\operatorname{rot} \mathbf{B}$. Заметим, что найденная из решения плотность тока $\mathbf{j}$ точно удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, если выполнено более сильное, чем (5.2), требование $\mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{B} \equiv 0$. В противном случае уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ в среднем по объему удовлетворяется точно, а в каждой точке — приближенно.

Выбор функции $\mathbf{B}$, вводимой в расчет, определяется также и другими соображениями, сущность которых можно пояснить на примере задачи, рассмотренной в $n^\circ$ 2—4. В этой задаче имеет значение выбор только поперечной к потоку компоненты магнитного поля $B_z(x, z)$. Если в направлении $z$ канал имеет относительно малую ширину $(\delta / a > 1)$, то в пределах отрезка $|z| < a$ можно ожидать малого изменения $B_z$ по сравнению с величиной $B_z(x, 0)$. Полагая поэтому $B_z(x, z) \approx B_z(x, 0) = B_0 b(x)$, приходим к постановке задачи $n^\circ$ 3. Если же соотношение поперечных размеров канала обратное $(\delta / a < 1)$, то, хотя вся схема задачи близка к плоской, приближение $B_z(x, z) \approx B(x)$ может оказаться непригодным при не слишком большой протяженности зоны магнитного поля вдоль канала.

Решение задачи, учитывающее изменение магнитного поля поперек канала, легко получается из общих формул $n^\circ$. 1. Неоднородность поля, так же как и неоднородность скорости, приводит к появлению поперечного краевого эффекта.

Заметим, что существуют такие поля, для которых $B_z(x, 0) < B_z(x, a)$ при малых $x$ и $B_z(x,0) > B_z(x,a)$ при больших $x$. В этом случае поперечный краевой эффект, обусловленный неоднородностью скорости, будет ослабляться вблизи центрального сечения канала и усиливаться вдали от него.

Поступила 12 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогидродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5.
2. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
3. Регирер С. А. О влиянии пограничного слоя на распределение тока при течении проводящей жидкости по каналу. Сб. Вопросы магнитной гидродинамики, т. 3. Рига, Изд. АН Латв. ССР, 1963.
4. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
5. Longuet-Higgins M. S. The electrical and magnetic effects of tidal streams. Month. Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. suppl., 1949, vol. 5, No 8.