

УДК 629.7.023:539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ ИЗГИБАЮЩИМ И КРУТЯЩИМ МОМЕНТАМИ

В. К. Белов, Л. П. Железнов, Т. С. Огнянова

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630000 Новосибирск, Россия

E-mails: sibnia@sibnia.ru, Lev.Zheleznov@ocrv.ru, to19@list.ru

На основе разработанной ранее методики получены решения задач прочности и устойчивости дискретно подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек, выполненных из композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Исследована устойчивость подкрепленного отсека фюзеляжа самолета, выполненного из композиционного материала, при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами. Изучено влияние нелинейности деформирования, жесткости продольных ребер, толщины оболочки на критические нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости оболочки.

Ключевые слова: некруговые цилиндрические композитные оболочки, дискретное подкрепление, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов.

DOI: 10.15372/PMTF20180219

Некруговые оболочки, в отличие от круговых, недостаточно исследованы на устойчивость. Большинство известных решений задач устойчивости некруговых оболочек получено с помощью аналитических методов и, как правило, в линейном приближении, без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т. е. в классической постановке [1]. В данной работе с использованием алгоритма на основе метода конечных элементов [2] исследованы прочность и устойчивость композитных цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением с учетом как нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния, так и дискретности расположения подкреплений [3, 4]. Изучена устойчивость подкрепленного отсека фюзеляжа самолета, выполненного из композиционного материала, при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами. Исследовано влияние нелинейности деформирования, жесткости продольных ребер, толщины оболочки на критические нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости оболочки.

Конечный элемент подкрепленной оболочки. Рассмотрим конечный элемент оболочки, подкрепленный стрингерами, выполненными из композитного многослойного материала. В этом случае для стрингера, как и для оболочки, можно применить гипотезу Тимошенко, учитывая, что размеры стрингера малы по сравнению с радиусом оболоч-

ки. Полагаем, что угол сдвига поперечного сечения стрингера совпадает с углом сдвига оболочки.

Используя гипотезу плоских сечений, запишем выражения для перемещений произвольной точки в поперечном сечении стрингера:

$$U = u_p + z\varphi_y, \quad V = v_p + z\varphi_x + x\varphi_z, \quad W = w_p - x\varphi_y.$$

Здесь u_p, v_p, w_p — перемещения центра тяжести поперечного сечения элемента подкрепления в направлениях осей x, y, z соответственно; $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ — углы поворотов поперечного сечения вокруг осей x, y, z соответственно.

Согласно [5] выражение для деформаций в произвольной точке поперечного сечения элемента подкрепления имеет вид

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + x\chi_{px} + z\chi_{pz},$$

где

$$\varepsilon_p = (v_p)_x + (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)/2, \quad \chi_{px} = (\varphi_z)_x, \quad \chi_{pz} = (\varphi_x)_x, \quad \chi_p = (\varphi_y)_x, \\ \varphi_x = -\theta_x, \quad \varphi_z = -(u_p)_x,$$

индекс x означает дифференцирование.

Перемещения центра тяжести поперечного сечения элемента подкрепления определяются через перемещения точек срединной поверхности оболочки.

Согласно [5] соотношения теории упругости для элемента подкрепления имеют вид

$$T_p = C\varepsilon_p, \quad M_{px} = C_x\chi_{px} + C_{xz}\chi_{pz}, \quad M_{pz} = C_z\chi_{pz} + C_{xz}\chi_{px}, \quad Q_x = GF_p\theta_x, \quad H_p = C_k\chi_p, \\ C = EF, \quad C_x = EJ_x, \quad C_z = EJ_z, \quad C_{xz} = EJ_{xz}, \quad C_k = GJ_k, \\ F = \iint_s ds, \quad J_x = \iint_s x^2 ds, \quad J_z = \iint_s z^2 ds, \quad J_{xz} = \iint_s xz ds, \quad J_k = \iint_s \rho_1\rho ds.$$

Эти соотношения можно представить в матричной форме

$$\mathbf{T}_p = D_p \mathbf{e}_p,$$

где $\mathbf{T}_p = \{T_p, M_{px}, M_{py}, M_{pz}, Q_{px}\}^T$; $\mathbf{e}_p = \{\varepsilon_p, \chi_{px}, \chi_{pz}, \chi_p, \theta_x\}^T$.

Энергия деформации конечного элемента стрингера определяется по формуле

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{l_p} \mathbf{T}_p^T \mathbf{e}_p dl_p.$$

Алгоритм решения задачи. Запишем вариационное уравнение Лагранжа для элемента подкрепленной оболочки

$$\delta\Pi = \delta W + \delta W_p - \delta V = 0,$$

где δ — знак вариации.

Используя вариации по узловым перемещениям конечного элемента, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно этих перемещений. С учетом условия совместности узловых перемещений элементов и граничных условий находим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений всех конечных элементов оболочки

$$K\mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (1)$$

где K — матрица жесткости оболочки, получаемая суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов с использованием матрицы индексов [6]; \mathbf{Q} — вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Таблица 1

Таблица 2

Сходимость решения
при пошаговом нагружении оболочки
с отношением длин полуосей $b/a = 1,0$

q	N	$(w/h)_{\max}$	H
10,2579	2	2,44	>0
11,3094	2	2,59	>0
12,4686	2	2,77	>0
13,7466	3	2,97	>0
15,1556	3	3,22	>0
16,7091	3	3,53	>0
18,4218	3	3,94	>0
20,3100	4	4,47	<0

Сходимость решения
при пошаговом нагружении оболочки
с отношением длин полуосей $b/a = 2,5$

q	N	$(w/h)_{\max} \cdot 10^{-2}$	H
9,0511	4	0,134	>0
9,9788	4	0,138	>0
11,0017	5	0,142	>0
12,1294	4	0,147	>0
13,3726	5	0,154	>0
14,7433	5	0,161	>0
16,2545	8	0,171	>0
17,0672	13	0,176	>0

Примечание. q — параметр нагрузки, N — число итераций, $(w/h)_{\max}$ — максимальный прогиб.

Для решения системы (1) используем метод Ньютона — Канторовича [7]:

$$H(\mathbf{u}'_n)\Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}, \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta.$$

Здесь H — гессиан системы, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации подкрепленной оболочки; \mathbf{G} — градиент потенциальной энергии деформации.

Критическая нагрузка определяется либо как предельная по расходимости итерационного процесса при резком увеличении перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, либо как бифуркационная с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2\Pi > 0$. Форма потери устойчивости оболочки определяется из решения системы $H\delta = 0$, где δ — вектор бифуркационных узловых перемещений.

В качестве примера рассмотрим задачу о нелинейном деформировании и устойчивости подкрепленной продольными ребрами некруговой цилиндрической оболочки, имеющей длину $L = 1000$ мм, толщину $h = 3,6$ мм, радиус $R_0 = 1900$ мм, при действии внешнего давления q . Оболочки выполнены из композиционного материала с укладкой углепластиковых монослоев $[0^\circ||0^\circ \pm 45^\circ|90^\circ||0^\circ \pm 45^\circ|90^\circ||0^\circ \pm 45^\circ|90^\circ||0^\circ \pm 45^\circ|90^\circ||0^\circ]$ (18 монослоев). Площадь поперечного сечения стрингеров $F_c = 180$ мм², собственный момент инерции $J_c = 5500$ мм⁴, стрингеры расположены с шагом $d_c = 150$ мм и эксцентриситетом $e_c = 10$ мм. Стрингеры также выполнены из композиционного материала с квазиизотропной укладкой углепластиковых монослоев $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]$. В табл. 1, 2 приведены результаты решения для оболочки с отношением длин полуосей $b/a = 1,0; 2,5$ (b, a — длины вертикальной и горизонтальной полуосей оболочки). Анализ табл. 1, 2 показывает, что для оболочки с отношением $b/a = 1,0$ критическая нагрузка является бифуркационной, а для оболочки с $b/a = 2,5$ — предельной.

Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочки. Рассмотрим консольно защемленную ($v = w = w_x = 0$) дискретно подкрепленную продольными и поперечными ребрами некруговую цилиндрическую оболочку в виде отсека фюзеляжа пассажирского самолета (рис. 1), форма поперечного сечения которого близка к форме поперечного сечения самолета Ан-2. Оболочка находится под действием краевого изгибающего и крутящего моментов.

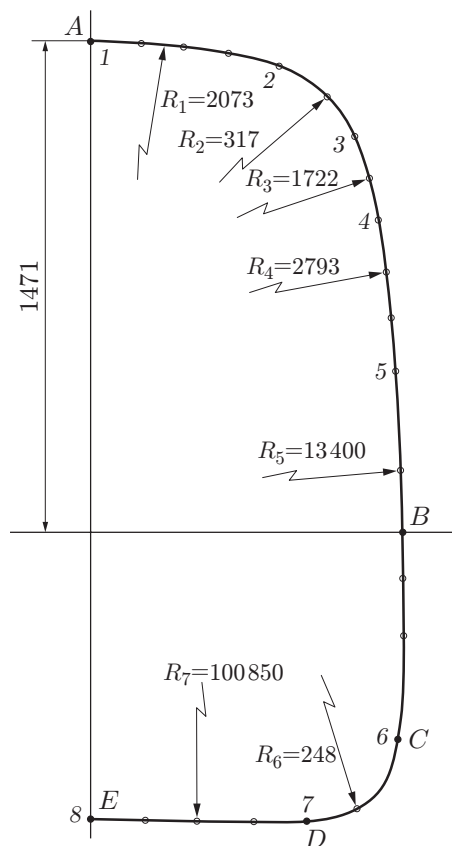


Рис. 1. Половина поперечного сечения некруговой цилиндрической оболочки: 1–8 — участки оболочки с различными радиусами кривизны образующей, точки — зоны расположения стрингеров

Оболочка имеет длину $L = 1960$ мм, разбита на четыре отсека, подкреплена равноотстоящими шпангоутами и стрингерами различной жесткости. Толщина оболочки переменная в окружном направлении (больше в нижней части оболочки, в области сжимающих продольных усилий). Оболочка выполнена из композиционного материала с квазиизотропной укладкой монослоев относительно срединной поверхности оболочки. Механические характеристики монослоя имели следующие значения: модули упругости в продольном направлении монослоя $E_1^+ = 125\,510$ МПа, $E_1^- = 114\,380$ МПа, модули упругости в поперечном направлении монослоя $E_2^+ = 8780$ МПа, $E_2^- = 8670$ МПа, модуль сдвига $G_{12} = 4740$ МПа, разрушающие продольные напряжения монослоя $\sigma_{1B}^+ = 2340$ МПа, $\sigma_{1B}^- = 1240$ МПа, разрушающие поперечные напряжения монослоя $\sigma_{2B}^+ = 51,7$ МПа, $\sigma_{2B}^- = 211,2$ МПа (знак “–” соответствует сжатию, знак “+” — растяжению), касательные напряжения $\tau_{12B} = 71,4$ МПа, коэффициент Пуассона монослоя $\mu_{12} = 0,34$, толщина монослоя $\delta = 0,192$ мм.

В численных расчетах использовались жесткости оболочки, приведенные к срединной поверхности. Расчеты приведенных прочностных характеристик слоистого композита выполнены в предположении, что в нем реализуется плоское напряженное состояние [8]. Подкрепления выполнены из того же композиционного материала с квазиизотропной укладкой монослоев.

Для оболочки рассматривается несколько вариантов укладки монослоев. Значения приведенных характеристик оболочки для различных вариантов укладки монослоев приведены в табл. 3.

Расчеты выполнены для нескольких вариантов жесткостных характеристик стрингеров (табл. 4).

Таблица 3

Приведенные характеристики оболочки для различных вариантов укладки монослоев

Вариант укладки монослоев	Растяжение					Сжатие					h, мм	
	E ₁ , МПа		E ₂ , МПа		G, МПа	E ₁ , МПа		E ₂ , МПа		G, МПа		ν ₁
	E ₁ , МПа	E ₂ , МПа	E ₂ , МПа	G, МПа	G, МПа	E ₁ , МПа	E ₂ , МПа	G, МПа	ν ₁			
[0°, ±45°, 90°, 0°, ±45°, 90°]	5718,909	4512,076	4512,076	1753,397	0,312 491	5262,430	4167,840	1629,220	0,310 280	1,728		
[0°, 0°, 0°, ±45°, 90°, ±45°, 90°, 0°, 0°, 0°]	7427,090	3696,957	3696,957	1433,548	0,314 057	6806,501	3425,954	1340,417	0,312 084	2,304		
[0°, ±45°, 90°, 0°, ±45°, 90°, 0°, ±45°, 90°]	5456,111	4625,722	4625,722	1802,605	0,312 306	5024,875	4271,577	1673,654	0,310 065	2,496		
[0°, ±45°, 90°, 0°, ±45°, 90°, 0°, ±45°, 90°, ±45°, 90°]	5711,027	3634,768	3634,768	2009,277	0,430 311	5262,393	3376,073	1860,267	0,424 494	2,880		

Таблица 4

Жесткостные характеристики стрингеров различного типа

Тип подкрепления	Тип стрингера	Размеры, мм	F _c , мм	J _x , мм ⁴	J _y , мм ⁴	J _k , мм ⁴	ε _c , мм
Стрингер	C1	12/12/1	33,6	627,000	622,000	8	3,83
	C2	15/15/2	60,0	1656,250	1656,250	80	5,25
	C3	20/20/2	80,0	3766,667	3766,667	106	6,50
	C4	25/25/2	100,0	7177,083	7177,083	133	7,75
	C5	30/30/3	180,0	19 068,750	19 068,750	539	9,75
Шпангоут	—	30/2-80/2-30/2*	280,0	210 773,300	112 441,900	372	42,00

* Высота/ширина верхней, средней и нижней полок поперечного сечения шпангоута.

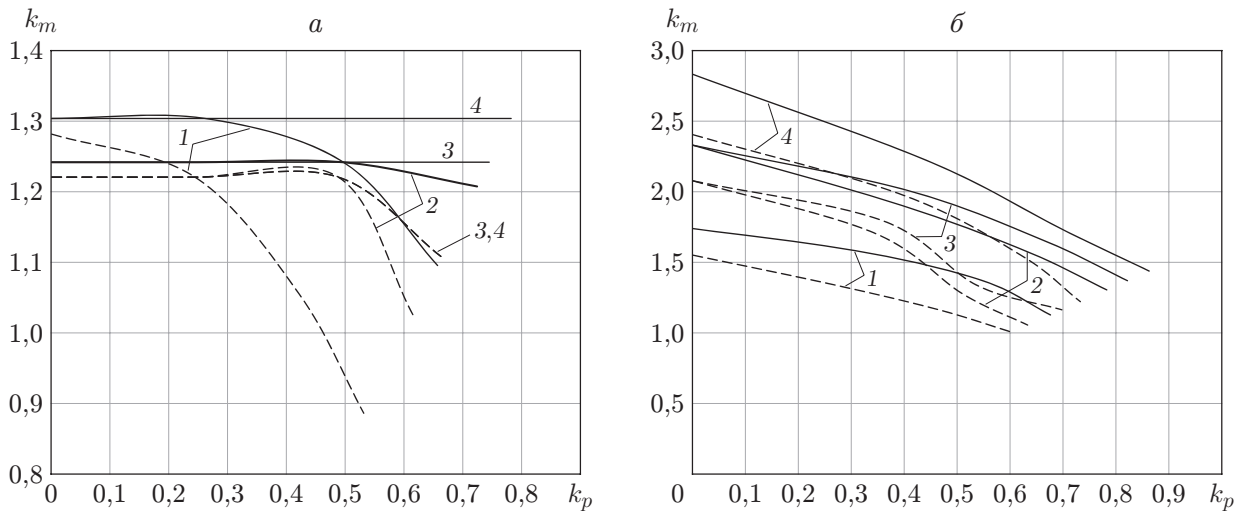


Рис. 2. Зависимости $k_m(k_p)$ для оболочек различной толщины h при различных значениях жесткости стрингеров С2 (а), С4 (б) для варианта 1 расположения стрингеров:

1 — $h = 1,728$ мм, 2 — $h = 2,304$ мм, 3 — $h = 2,496$ мм, 4 — $h = 2,88$ мм; сплошные линии — линейное решение, штриховые — нелинейное решение

Исследование проводилось для трех вариантов расположения стрингеров: 1) стандартный вариант (50 стрингеров, равномерно распределенных на участках AB , BC , CD , DE (точки на рис. 1)); 2) на участке DE число стрингеров увеличено в два раза (шесть стрингеров); 3) на участках DE и BC число стрингеров увеличено в два раза (по шесть стрингеров). На участках, где менялось число стрингеров, толщина оболочки h больше. На участке AB толщина оболочки во всех вариантах расчета оставалась неизменной и равной 1,728 мм. Оболочка разбивалась конечно-элементной сеткой с числом конечных элементов $m \times n = 20 \times 50$ для первого варианта, $m \times n = 20 \times 54$ для второго и $m \times n = 20 \times 58$ для третьего варианта, что обеспечивало сходимость решения по числу конечных элементов. Результаты расчетов представлены на рис. 2–5 ($k_m = M^*/M_0$; $k_p = M_k^*/M_{k0}$; M^* , M_k^* — критические значения изгибающего и крутящего моментов; $M_0 = \pi ER_0 h^2 / \sqrt{3(1 - \nu^2)} = 4,548 \cdot 10^5$ Н·м; $M_{k0} = (0,2 \div 0,6)M_0$; R_0 — радиус эквипериметрической круговой цилиндрической оболочки, т. е. оболочки, периметр которой равен периметру некруговой оболочки).

На рис. 2 показаны зависимости k_m от k_p в случае расчета оболочек различной толщины h (здесь и далее h — толщина оболочки на участке DE поперечного сечения оболочки) для различных жесткостей стрингеров С2, С4 (см. табл. 4). Видно, что учет нелинейности приводит к уменьшению критических значений нагрузок. При учете нелинейности значения параметра k_m отличаются от соответствующих значений в случае линейного решения на 10–30 %. С увеличением толщины h критические значения параметра k_m существенно увеличиваются (на 70–80 %). При малой жесткости подкреплений практически для всех толщин h оболочки критические значения изгибающего момента не зависят от параметра крутящего момента. В этом случае оболочка теряет устойчивость в результате действия продольных сжимающих усилий в ее нижней части. При большой жесткости подкреплений (вариант С5) оболочка теряет устойчивость в окрестности точки C вблизи нагруженного края. Влияние нелинейности изменяется в зависимости от жесткости стрингеров и толщины оболочки h . С увеличением жесткости стрингеров угол наклона кривых зависимости $k_m(k_p)$ увеличивается.

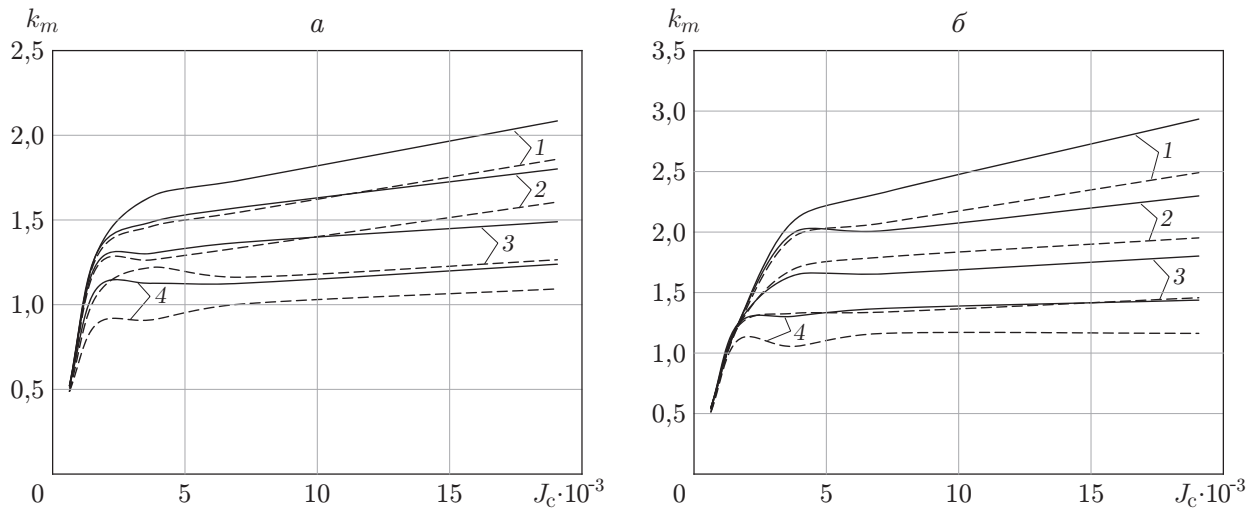


Рис. 3. Зависимости k_m от жесткости стрингеров J_c при различных значениях отношения моментов M_k/M и толщины оболочки h :

a — $h = 1,728$ мм, b — $h = 2,496$ мм; 1 — $M_k/M = 0$, 2 — $M_k/M = 0,2$, 3 — $M_k/M = 0,4$, 4 — $M_k/M = 0,6$; сплошные линии — линейное решение, штриховые — нелинейное решение

На рис. 3 показаны зависимости k_m от жесткости продольных ребер J_c при различных значениях отношения величин крутящего и изгибающего моментов M_k/M и толщины оболочки h . Анализ рис. 3 показывает, что при учете нелинейности критические значения нагрузок уменьшаются. Влияние нелинейности является незначительным (10–15 %). Наличие крутящего момента также вызывает уменьшение критических значений параметра k_m . С увеличением жесткости стрингеров критические значения параметра k_m увеличиваются наиболее существенно при малой жесткости подкреплений ($J_c < 5000$ мм⁴), при дальнейшем увеличении жесткости стрингеров скорость увеличения параметра k_m уменьшается. Это свидетельствует о том, что потеря устойчивости оболочки малой жесткости происходит в ее нижней части в зоне усиления вблизи нагруженного края. При дальнейшем увеличении жесткости оболочка теряет устойчивость не в области наибольшей жесткости, а на боковой поверхности вблизи точки C в области наименьшей жесткости стрингера и наименьшей толщины оболочки.

На рис. 4 показаны зависимости k_m от жесткости продольных ребер J_c для композитной оболочки для вариантов 1–3 расположения стрингеров в случае нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния. Видно, что с уменьшением расстояния между стрингерами критические значения параметра k_m увеличиваются, причем наиболее существенно — для варианта 3, так как в этом случае толщина оболочки увеличивается и на участке CD (см. рис. 1). Для варианта 3 расположения стрингеров критические значения параметра k_m практически не зависят от толщины h (см. рис. 4).

На рис. 5 показаны зависимости критического значения параметра нагрузки \hat{k}_m , вычисленного по формуле $\hat{k}_m = k_m/(G/G_э)$ (G — вес отсека, для которого проводился расчет; $G_э$ — вес эталонного отсека), от величины $\hat{k}_p = k_p/(G/G_э)$ для оболочек различной толщины h при различных значениях жесткости стрингеров ($C1, C4$) и первого варианта расположения стрингеров. Выбор такой переменной позволяет определить, насколько эффективна в весовом отношении та или иная оболочка. Анализ рис. 5 показывает, что для большинства исследованных вариантов оболочек учет нелинейности приводит к уменьше-

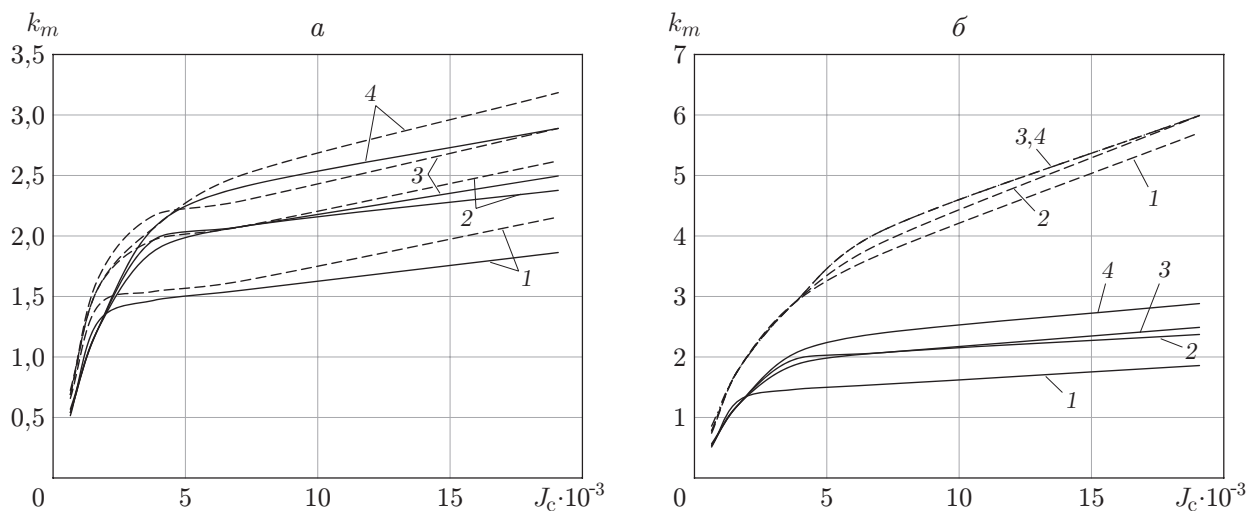


Рис. 4. Зависимости k_m от жесткости стрингеров J_c для композитной оболочки для вариантов 1, 2 (а) и 1, 3 (б) расположения стрингеров с учетом нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния:

1 — $h = 1,728$ мм, 2 — $h = 2,304$ мм, 3 — $h = 2,496$ мм, 4 — $h = 2,88$ мм; сплошные линии — линейное решение, штриховые — нелинейное решение

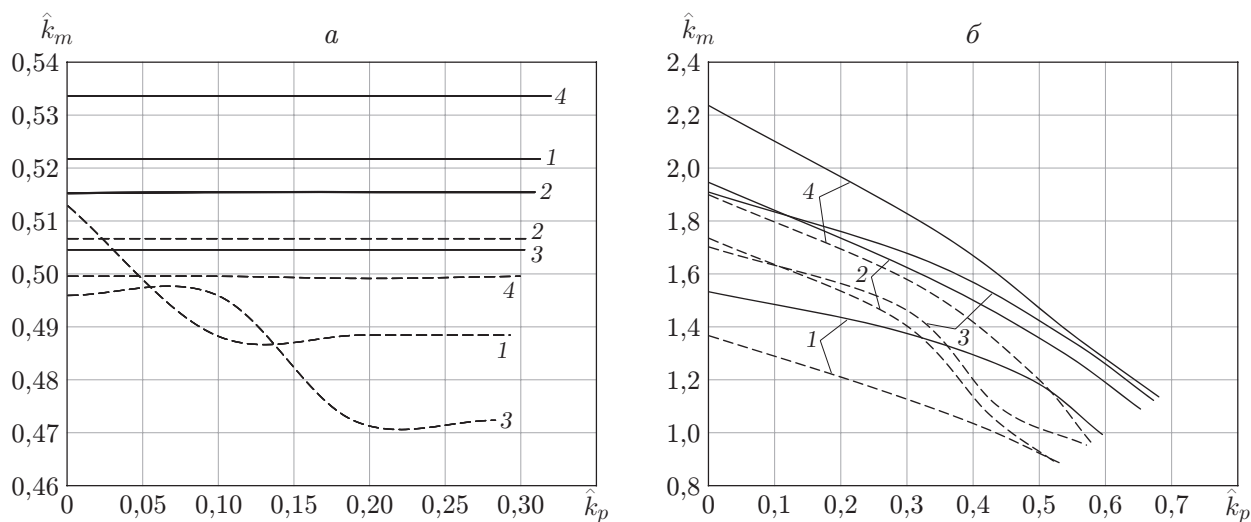


Рис. 5. Зависимости $\hat{k}_m(\hat{k}_p)$ для оболочек различной толщины h при различных значениях жесткости стрингеров С1 (а), С4 (б) для варианта 1 расположения стрингеров:

1 — $h = 1,728$ мм, 2 — $h = 2,304$ мм, 3 — $h = 2,496$ мм, 4 — $h = 2,88$ мм; сплошные линии — линейное решение, штриховые — нелинейное решение

нию критических значений нагрузок. При учете нелинейности расчетные значения \hat{k}_m , \hat{k}_p отличаются от соответствующих значений в случае линейного решения на 10–30 %. С увеличением критического значения крутящего момента \hat{k}_p влияние нелинейности увеличивается. При малой жесткости подкреплений практически для всех вариантов толщины h оболочки критические значения изгибающего момента не зависят от параметра крутящего момента. Из рис. 2–5 следует, что при малой жесткости подкреплений эталонная оболочка ($h = 1,728$ мм) более эффективна в весовом отношении по сравнению с другими оболочками. При дальнейшем увеличении толщины h практически при всех значениях параметра \hat{k}_p более эффективными становятся варианты оболочки толщиной $h > 1,728$ мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. М.: Наука, 1978.
2. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
3. Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 155–160.
4. Бойко Д. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2014. № 6. С. 23–30.
5. Кармишин А. В. Статика и динамика оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. М.: Машиностроение, 1975.
6. Постнов В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. Л.: Судостроение, 1974.
7. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Физматгиз, 1959.
8. Олегин И. П. Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов / И. П. Олегин, В. Н. Максименко. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2006.

*Поступила в редакцию 10/I 2017 г.,
в окончательном варианте — 4/IV 2017 г.*