

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ДВУМЯ ФАЗАМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Р. Кармакар, А. Шур, М. Канорья

Университет Калькутты, 700009 Калькутта, Индия

E-mails: karmakar.resmi21@gmail.com, abhiks4@gmail.com, k_mri@yahoo.com

С использованием обобщенной двухтемпературной теории термоупругости определяются температуры, напряжения, смещения и деформации в бесконечном изотропном упругом теле со сферической полостью. Двухтемпературная модель Лорда — Шульмана и двухтемпературная модель с двумя фазами запаздывания объединяются в одну с параметрами, идентифицирующими конкретную модель. В предположении, что среда в начальный момент покоится, в пространстве образов преобразования Лапласа уравнения задачи записываются в форме векторно-матричного дифференциального уравнения, решение которого находится в пространстве состояний. Получены выражения для температуры проводимости и для расширения на малом временном интервале. Выполнено численное обращение преобразования Лапласа с помощью разложения в ряды Фурье. С использованием модели Лорда — Шульмана и модели с двумя фазами запаздывания получены распределения по радиальной координате температуры проводимости, термодинамической температуры, смещения и расширения и проведено сравнение результатов, полученных с использованием этих двух моделей.

Ключевые слова: обобщенная двухтемпературная теория термоупругости, модель с двумя фазами запаздывания, пространство состояний, векторно-матричное дифференциальное уравнение.

DOI: 10.15372/PMTF20160409

Введение. Согласно работам [1, 2] априори не существует термодинамических оснований для того, чтобы считать, что во второй закон термодинамики для сплошных сред входит только одна температура. Также в [1, 2] полагается, что изменение энтропии вследствие теплопроводности определяется одной температурой, а вследствие притока тепла — другой. В работах [3–5] предложена теория теплопроводности деформируемых тел, содержащая две различные температуры: температуру проводимости и термодинамическую температуру. Для стационарных процессов разность этих температур пропорциональна притоку тепла, при отсутствии притока тепла эти температуры одинаковы [4]. Однако для процессов, зависящих от времени (быстропротекающих процессов), и для процессов, сопровождающихся распространением волн, эти температуры различаются независимо от наличия притока тепла. В отличие от классической теории термоупругости теория термоупругости с двумя температурами содержит параметр $a \geq 0$, называемый рассогласованием температур [4]. В частности, если $a = 0$, то $\phi = \theta$ и уравнения термоупругости с двумя температурами сводятся к уравнениям классической теории термоупругости.

Исследованию линеаризованного варианта теории термоупругости с двумя температурами посвящено большое количество работ. В [6] исследовалось распространение волн с использованием двухтемпературной теории термоупругости. В [7] доказаны теоремы единственности и двойственности для этой теории. В [8] с использованием двухтемпературной теории термоупругости изучалось распространение плоских волн. В [9] исследовались устойчивость и свойства решений трехмерных задач двухтемпературной теории термоупругости. Следует отметить, что и классическая, и двухтемпературная теория термоупругости приводят к так называемому парадоксу теплопередачи: тепловое возмущение в некоторой точке тела мгновенно проявляется не только во всем теле, но и в разной степени в различных его точках.

В последние 50 лет сформулированы неклассические теории термоупругости с гиперболическими уравнениями теплопроводности, допускающими конечную скорость распространения тепловых сигналов. Согласно этим теориям распространение тепла следует рассматривать как волновой, а не диффузионный процесс. В различных работах предлагались разные подходы к построению уравнений теплопроводности волнового типа.

В [10] построена обобщенная теория термоупругости, содержащая одно значение времени релаксации в законе теплопроводности Фурье, в результате чего уравнение теплопроводности становится гиперболическим. Единственность решений задач, сформулированных на основе уравнений этой теории, исследовалась в работах [11–14].

В работе [15] предложена так называемая теория Грина — Линдсея, в которой используются скорость температуры и два времени релаксации, классический закон Фурье теплопроводности принимается неизменным, а классическое уравнение энергии и связь между напряжениями и деформациями с учетом температуры модифицируются.

В работе [16] предложены три модели обобщенной термоупругости для однородного изотропного материала. Линеаризованный вариант модели 1 сводится к классическому уравнению теплопроводности, построенному на основе закона Фурье. Линеаризованные варианты моделей 2, 3 допускают распространение тепловых волн с конечной скоростью. Модель 2 имеет особенность: в ней отсутствует рассеяние тепловой энергии [17]. В этой модели определяющие соотношения выводятся на основе модифицированного уравнения энергии, содержащего помимо других основных переменных градиент температуры. В модели 3 присутствует диссипация энергии. Задачи, сформулированные на основе обобщенной теории термоупругости, предложенной в работах [17, 18], решались в [19, 20]. Еще один вариант обобщенной теории термоупругости, называемой теорией термоупругости с двухфазным запаздыванием, предложен в [21]. Согласно [21] введение времени запаздывания в теорию теплопроводности на макроуровне объясняется учетом процессов релаксации, происходящих на микроуровне, а именно учитывается, что увеличение температуры кристаллической решетки происходит с задержкой вследствие взаимодействия фонон-электронов. В этой теории вводятся два времени запаздывания: одно — в выражение для вектора потока тепла, второе — в выражение для градиента температуры.

Классический закон Фурье $\mathbf{q} = -k\nabla T$ заменяется модифицированным законом $\mathbf{q}(P, t + \tau_q) = -k\nabla T(P, t + \tau_T)$ (градиент температуры ∇T в материальной точке P в момент времени $t + \tau_T$ соответствует вектору потока тепла \mathbf{q} в той же точке в момент времени $t + \tau_q$). Здесь k — теплопроводность материала. Время запаздывания τ_T , обусловленное процессами релаксации, происходящими в микроструктуре материала, называется фазой запаздывания градиента температуры. Время запаздывания τ_q , обусловленное быстропротекающими инерционными тепловыми процессами, называется фазой запаздывания потока тепла. Случай $\tau_q = \tau_T = 0$ соответствует классическому закону Фурье. В случае $\tau_q = \tau$, $\tau_T = 0$ эта модель термоупругости переходит в модель с одной фазой запаздывания. В работе [22] с использованием модели термоупругости с двумя фазами за-

паздывания рассмотрено распространение в полупространстве одномерной термоупругой волны. В работах [23–25] решен ряд задач с использованием этой модели. Влияние параметров релаксации на экспоненциальную устойчивость исследовалось в работах [26, 27]. В [28] с использованием модели термоупругости с двумя фазами запаздывания изучалось распространение температурных волн.

В работе [29] предложена обобщенная модель термоупругости с двумя температурами в рамках модели Лорда — Шульмана. В двухтемпературной теории термоупругости с двумя фазами запаздывания закон теплопроводности записывается в виде $\mathbf{q}(P, t + \tau_q) = -k\nabla\phi(P, t + \tau_T)$, где ϕ — температура проводимости. С использованием данной модели в [30] решена задача о распространении термоупругих волн в бесконечной среде с цилиндрической полостью, в [31] исследовались вариационные принципы и теоремы взаимности. Единственность решений, полученных на основе этой модели, изучалась в [32]. В [33] с использованием двухтемпературной теории термоупругости решена задача о распространении термоупругих волн в бесконечном теле со сферической полостью. В [34] задача о распространении термоупругих волн решалась с помощью обобщенной модели термоупругости с двумя температурами и дробного дифференциального уравнения теплопроводности. В [35] с использованием двухтемпературной теории термоупругости изучалось распространение термоупругих волн в среде с переменной теплопроводностью.

В настоящей работе с использованием двухтемпературной теории термоупругости Лорда — Шульмана и двухтемпературной теории термоупругости с двумя временами релаксации исследуется распределение термоупругих напряжений, температуры проводимости и термодинамической температуры в бесконечном изотропном упругом теле со сферической полостью. Для обеих моделей дается единая формулировка. Каждой модели соответствует определенный набор параметров. Определяющая система уравнений формулируется в пространстве образов преобразования Лапласа и решается с использованием пространства состояний [36]. Обратное преобразование Лапласа находится численно с использованием техники разложения в ряды Фурье [37]. Проводится сравнение результатов, полученных с помощью указанных моделей, а также с решением, полученным с использованием модели Лорда — Шульмана с одной температурой [38].

1. Математическая формулировка задачи. Рассматривается бесконечное изотропное твердое тело со сферической полостью радиусом R . В сферической системе координат (r, ϑ, φ) с началом в центре полости решается задача со сферической симметрией. Поэтому все функции зависят только от радиальной координаты r и времени t . Следовательно, вектор смещения \mathbf{u} , термодинамическую температуру θ и температуру проводимости ϕ можно представить в виде

$$\mathbf{u} = (u(r, t), 0, 0), \quad \theta = \theta(r, t), \quad \phi = \phi(r, t).$$

Выражения для компонент тензора деформаций имеют вид

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\vartheta\vartheta} = e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r},$$

для объемной деформации —

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u), \quad (1.1)$$

для зависимостей напряжений от деформации и температуры —

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda e - \gamma\theta; \quad (1.2)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{u}{r} + \lambda e - \gamma\theta. \quad (1.3)$$

В соответствии с двухтемпературной моделью Лорда — Шульмана и двухтемпературной моделью с двумя фазами запаздывания уравнение движения в случае отсутствия массовых сил и уравнение теплопроводности для линейного изотропного тела при отсутствии внутренних источников тепла имеют вид

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1.4)$$

$$k \left(t_1 + t_2 \frac{\partial}{\partial t} + t_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla^2 \phi = \left(1 + t_4 \frac{\partial}{\partial t} + t_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\rho c_E \dot{\theta} + \gamma T_0 \dot{e}), \quad (1.5)$$

где ρ — плотность; λ, μ — параметры Ламе; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$; α_t — линейный коэффициент температурного расширения; T_0 — отсчетная температура; c_E — удельная теплоемкость при постоянной деформации; ∇^2 — лапласиан:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

t_i — параметры, соответствующие конкретной модели (для двухтемпературной модели Лорда — Шульмана $t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = 0, t_4 = \tau_0, t_5 = 0$, для двухтемпературной модели с двумя фазами запаздывания $t_1 = 1, t_2 = \tau_T, t_3 = \tau_T^2/2, t_4 = \tau_q, t_5 = \tau_q^2/2$); τ_0 — время релаксации.

Зависимость температуры проводимости ϕ от термодинамической температуры θ задается соотношением

$$\phi - \theta = a \nabla^2 \phi, \quad (1.6)$$

где $a > 0$ — параметр в теории термоупругости с двумя температурами. Введя безразмерные переменные

$$r' = \frac{r}{\varkappa} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad u' = \frac{u}{\varkappa} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad t' = \frac{t}{\varkappa} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$

$$\tau_0 = \frac{\tau_0}{\varkappa} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \theta' = \frac{\theta}{T_0}, \quad \phi' = \frac{\phi}{T_0}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{2\mu + \lambda},$$

уравнения (1.2)–(1.6) запишем в виде

$$\sigma_{rr} = \beta^2 e + (1 - \beta^2) \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha \theta; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = (1 - \beta^2) \frac{u}{r} + \beta^2 e - \alpha \theta; \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial e}{\partial r} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1.9)$$

$$\left(t_1 + t_2 G \frac{\partial}{\partial t} + t_3 G^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla^2 \phi = \left(1 + t_4 G \frac{\partial}{\partial t} + t_5 G^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\dot{\theta} + \varepsilon \dot{e}); \quad (1.10)$$

$$\phi - \theta = \omega \nabla^2 \phi, \quad (1.11)$$

где $t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = 0, t_4 = \tau_0/G, t_5 = 0$ в случае двухтемпературной модели Лорда — Шульмана, $t_1 = 1, t_2 = \tau_T/G, t_3 = \tau_T^2/(2G^2), t_4 = \tau_q/G, t_5 = \tau_q^2/(2G^2)$ в случае двухтемпературной модели с двумя фазами запаздывания; $G = (\lambda + 2\mu)/(\rho\varkappa)$; $\varepsilon = \gamma\varkappa/k$; $\alpha = \gamma T_0/(\lambda + 2\mu)$; $\omega = a(\lambda + 2\mu)/(\rho\varkappa^2)$; $\beta^2 = \lambda/(\lambda + 2\mu)$; штрихи у безразмерных величин опущены.

Уравнение (1.9) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \nabla^2 e - \alpha \nabla^2 \theta, \quad (1.12)$$

начальные условия и условия регулярности — в виде

$$\begin{aligned} t = 0, r \geq R: \quad u = \theta = \phi = 0, \quad t = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \\ t = 0, r \rightarrow \infty: \quad u = \theta = \phi = 0. \end{aligned}$$

Для уравнений (1.10)–(1.12) зададим следующие условия:

— граничные условия для температуры (поверхность полости $r = R$ подвергается тепловому удару)

$$\phi(R, t) = \phi_R = F(t), \quad (1.13)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} \phi_0, & t > 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

— механические краевые условия (на поверхности полости $r = R$ отсутствует объемное расширение):

$$e(R, t) = e_R = 0. \quad (1.14)$$

2. Метод решения. Применяя преобразование Лапласа

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

к уравнениям (1.7)–(1.11), получаем

$$\bar{\sigma}_{rr} = \beta^2 \bar{e} + (1 - \beta^2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \alpha \bar{\theta}; \quad (2.1)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \bar{\sigma}_{\psi\psi} = (1 - \beta^2) \frac{\bar{u}}{r} + \beta^2 \bar{e} - \alpha \bar{\theta};$$

$$\nabla^2 \bar{e} = s^2 \bar{e} + \alpha \nabla^2 \bar{\theta}; \quad (2.2)$$

$$(t_1 + t_2 Gs + t_3 G^2 s^2) \nabla^2 \bar{\phi} = (1 + t_4 Gs + t_5 G^2 s^2) s (\bar{\theta} + \varepsilon \bar{e}); \quad (2.3)$$

$$\bar{\phi} - \bar{\theta} = \omega \nabla^2 \bar{\phi}. \quad (2.4)$$

Краевые условия (1.13), (1.14) для образов преобразования Лапласа запишем в виде

$$\bar{\phi}(R, s) = \bar{F}(s) = \frac{\phi_0}{s}; \quad (2.5)$$

$$\bar{e}(R, s) = \bar{e} = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.3), (2.4) следует

$$\bar{\theta} = \frac{1}{1 + a_3 \omega} \bar{\phi} - \frac{a_3 \varepsilon \omega}{1 + a_3 \omega} \bar{e}, \quad (2.7)$$

где

$$a_3 = \frac{s(1 + t_4 Gs + t_5 G^2 s^2)}{t_1 + t_2 Gs + t_3 G^2 s^2}.$$

Подставляя $\bar{\theta}$ из уравнения (2.7) в уравнение (2.3), получаем

$$\nabla^2 \bar{\phi} = L_1 \bar{\phi} + L_2 \bar{e}, \quad (2.8)$$

используя (2.8), (2.2), находим

$$\nabla^2 \bar{e} = M_1 \bar{\phi} + M_2 \bar{e}, \quad (2.9)$$

где

$$L_1 = \frac{a_3}{1 + a_3\omega}, \quad L_2 = \frac{a_3\varepsilon}{1 + a_3\omega},$$

$$M_1 = \frac{\alpha a_3}{(1 + a_3\omega)[1 + a_3\omega(1 + \alpha\varepsilon)]}, \quad M_2 = \frac{s^2(1 + a_3\omega)^2 + \alpha a_3\varepsilon}{(1 + a_3\omega)[1 + a_3\omega(1 + \alpha\varepsilon)]}.$$

Дифференциальные уравнения (2.8), (2.9) можно записать в векторно-матричной форме

$$\nabla^2 \bar{V}(r, s) = A(s) \bar{V}(r, s), \quad (2.10)$$

где

$$\bar{V}(r, s) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}(r, s) \\ \bar{e}(r, s) \end{pmatrix}, \quad A(s) = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix}.$$

3. Пространство состояний. Формальное решение уравнения (2.10) запишем в виде

$$\bar{V}(r, s) = \frac{R}{r} e^{-\sqrt{A(s)}(r-R)} \bar{V}(R, s), \quad (3.1)$$

где

$$\bar{V}(R, s) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}(R, s) \\ \bar{e}(R, s) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы $A(s)$ имеет вид

$$k^2 - k(L_1 + M_2) + (L_1M_2 - L_2M_1) = 0. \quad (3.2)$$

Корни уравнения (3.2) удовлетворяют соотношению

$$k_1 + k_2 = L_1 + M_2, \quad k_1k_2 = L_1M_2 - L_2M_1.$$

Спектральное разложение матрицы $A(s)$ имеет вид

$$A(s) = k_1E_1 + k_2E_2,$$

где E_1, E_2 — проекторы матрицы $A(s)$, удовлетворяющие соотношениям

$$E_1 + E_2 = I, \quad E_1E_2 = Z, \quad E_i^2 = E_i, \quad i = 1, 2$$

(I — единичная матрица; Z — нулевая матрица). Далее получаем

$$\sqrt{A(s)} = \sqrt{k_1} E_1 + \sqrt{k_2} E_2,$$

где

$$E_1 = \frac{1}{k_1 - k_2} \begin{pmatrix} L_1 - k_2 & L_2 \\ M_1 & M_2 - k_2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{k_1 - k_2} \begin{pmatrix} k_1 - L_1 & -L_2 \\ -M_1 & k_1 - M_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$B(s) = \sqrt{A(s)} = \frac{1}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} \begin{pmatrix} L_1 + \sqrt{k_1k_2} & L_2 \\ M_1 & M_2 + \sqrt{k_1k_2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение (3.1) можно представить в виде

$$\bar{V}(r, s) = \frac{R}{r} e^{-B(s)(r-R)} \bar{V}(R, s). \quad (3.3)$$

Для того чтобы найти матрицу $\exp[-B(s)(r-R)]$, используем теорему Кэли — Гамильтона. Характеристическое уравнение матрицы $B(s)$

$$m^2 - m(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) + \sqrt{k_1}\sqrt{k_2} = 0$$

имеет следующие корни:

$$m_1 = \sqrt{k_1}, \quad m_2 = \sqrt{k_2}.$$

Разложение Тейлора матричной экспоненты в (3.3) имеет вид [39]

$$e^{-B(s)(r-R)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-B(s)(r-R))^n}{n}. \quad (3.4)$$

Выразив матрицу B^2 и высшие степени матрицы B через матрицу B и единичную матрицу второго порядка I [39], бесконечный ряд в (3.4) представим в виде

$$e^{-B(s)(r-R)} = b_0(r, s)I + b_1(r, s)B(s),$$

где коэффициенты b_0, b_1 зависят от r и s .

Характеристические корни m_1, m_2 матрицы B должны удовлетворять уравнению (3.4). Следовательно,

$$e^{-P_1(r-R)} = b_0 + b_1 P_1; \quad (3.5)$$

$$e^{-P_2(r-R)} = b_0 + b_1 P_2. \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) находим коэффициенты b_0, b_1 :

$$b_0 = \frac{P_1 e^{-P_2(r-R)} - P_2 e^{-P_1(r-R)}}{P_1 - P_2}, \quad b_1 = \frac{e^{-P_1(r-R)} - e^{-P_2(r-R)}}{P_1 - P_2}.$$

Тогда уравнение (3.4) запишем в виде

$$e^{-B(s)(r-R)} = H(r, s) = [h_{ij}(r, s)], \quad i, j = 1, 2, \quad (3.7)$$

где

$$h_{11} = \frac{(P_1^2 - l) e^{-P_2(r-R)} - (P_2^2 - l) e^{-P_1(r-R)}}{P_1^2 - P_2^2}, \quad h_{12} = \frac{\varepsilon l e^{-P_1(r-R)} - e^{-P_2(r-R)}}{P_1^2 - P_2^2},$$

$$h_{21} = \frac{M_2 e^{-P_1(r-R)} - e^{-P_2(r-R)}}{P_1^2 - P_2^2}, \quad h_{22} = \frac{(P_1^2 - M_1) e^{-P_2(r-R)} - (P_2^2 - M_1) e^{-P_1(r-R)}}{P_1^2 - P_2^2}.$$

Таким образом, из (3.3), (3.7) получаем

$$\bar{V}(r, s) = \frac{R}{r} [h_{ij}(r, s)] \bar{V}(R, s). \quad (3.8)$$

Применяя преобразование Лапласа к (1.3), (1.4), находим

$$\bar{\phi}(R, s) = \bar{F}(s) = \frac{\phi_0}{s}; \quad (3.9)$$

$$\bar{e}(R, s) = \bar{e} = 0. \quad (3.10)$$

Используя краевые условия (2.5), (2.6), из уравнения (3.8) находим решения для образов $\bar{\phi}$ и \bar{e} :

$$\bar{\phi} = \frac{R\bar{F}(s)}{r(P_1^2 - P_2^2)} [(P_1^2 - L_1) e^{-P_2(r-R)} - (P_2^2 - L_1) e^{-P_1(r-R)}]; \quad (3.11)$$

$$\bar{e} = \frac{R\bar{F}(s)M_1}{r(P_1^2 - P_2^2)} [e^{-P_1(r-R)} - e^{-P_2(r-R)}]. \quad (3.12)$$

С учетом (3.11), (3.12) из (2.8) получаем

$$\bar{\theta} = \frac{R\bar{F}(s)}{r(1 + a_3\omega)(P_1^2 - P_2^2)} [(P_1^2 - L_1) e^{-P_2(r-R)} - (P_2^2 - L_1) e^{-P_1(r-R)}]. \quad (3.13)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1.1), используя уравнение (3.10) и интегрируя его, находим выражение для образа радиального смещения

$$\bar{u} = \frac{R\bar{F}(s)M_1}{r^2(P_1^2 - P_2^2)} \left(\frac{P_2 r + 1}{P_2^2} e^{-P_2(r-R)} - \frac{P_1 r + 1}{P_1^2} e^{-P_1(r-R)} \right). \quad (3.14)$$

Из уравнений (2.1), (3.12)–(3.14) получаем образ преобразования Лапласа для σ_{rr} :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} = \frac{R\bar{F}(s)}{r^3 P_1^2 P_2^2 (P_1^2 - P_2^2)} & \left[P_2^2 e^{-P_1(r-R)} \left(\beta^2 M_1 r^2 P_1^2 + 2(1 - \beta^2) M_1 (P_1 r + 1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + M_1 r^2 (1 - \beta^2) + \frac{\alpha(P_2^2 - L_1)}{1 + a_3\omega} \right) - \right. \\ & \left. - P_1^2 e^{-P_2(r-R)} \left(\beta^2 M_1 r^2 P_2^2 + 2(1 - \beta^2) M_1 (P_2 r + 1) + M_1 r^2 (1 - \beta^2) + \frac{\alpha(P_1^2 - L_1)}{1 + a_3\omega} \right) \right]. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Формулы (3.11)–(3.15) являются решением задачи в пространстве образов преобразования Лапласа.

4. Решение задачи на малых временах и его анализ. В соответствии с уравнением теплопроводности с двумя фазами запаздывания уравнения (2.2)–(2.4) запишем в виде

$$N\nabla^2 \bar{\phi} = M\bar{\theta} + \varepsilon M\bar{e}, \quad \bar{\phi} - \bar{\theta} = \omega \nabla^2 \phi, \quad \nabla^2 \bar{e} = s^2 \bar{e} + \alpha \nabla^2 \bar{\theta},$$

где $M = s(1 + \tau_q s + \tau_q^2 s^2/2)$; $N = 1 + \tau_T s$.

Получаем следующее уравнение для $\bar{\phi}$ и \bar{e} :

$$[(N + M\omega + \alpha\varepsilon M\omega)\nabla^4 - (s^2 N + M + \alpha\varepsilon M + s^2 M\omega)\nabla^2 + s^2 M](\bar{\phi}, \bar{e}) = 0.$$

Биквадратное уравнение

$$(N + M\omega + \alpha\varepsilon M\omega)P^4 - (s^2 N + M + \alpha\varepsilon M + s^2 M\omega)P^2 + s^2 M = 0$$

имеет корни

$$\begin{aligned} P_{1,2}^2 = \frac{1}{2(N + M\omega + \alpha\varepsilon M\omega)} & \left(s^2(N + M\omega) + M(1 + \alpha\varepsilon) \pm \right. \\ & \left. \sqrt{[s^2(N + M\omega) + M(1 + \alpha\varepsilon)]^2 - 4Ms^2(N + M\omega + \alpha\varepsilon M\omega)} \right). \quad (4.1) \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнениям (3.11)–(3.15), находим ϕ , e , θ , u , σ_{rr} .

Корни $P_{1,2}$ зависят от параметра преобразования Лапласа s , поэтому нахождение обратного преобразования затруднительно. Поскольку распространение тепловых волн с конечной скоростью (второй звуковой эффект) является кратковременным, достаточно проанализировать решение на малых временах t . Для этого нужно положить параметр s большим.

Для больших значений s получаем:

— выбирая знак “+” в уравнении (4.1) —

$$P_1 \simeq \frac{s}{v_1} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{s} + \frac{1}{2v_1} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} - \frac{1}{4} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \frac{1}{s};$$

— выбирая знак “-” в уравнении (4.1) —

$$P_2 \simeq \frac{s}{v_2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{s} + \frac{1}{2v_2} \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} - \frac{1}{4} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \right) \frac{1}{s}.$$

Здесь

$$\lambda_1 = 2A, \quad \lambda_2 = B + \frac{B}{A} - \frac{4A}{\tau_T}, \quad \lambda_3 = C + \frac{C}{A} - \frac{4A[\tau_T + \omega(1 + \alpha\varepsilon)]}{\tau_q^2 \omega(1 + \alpha\varepsilon)} + \frac{8A}{\tau_q^2},$$

$$\mu_1 = \tau_q, \quad \mu_2 = -2, \quad \mu_3 = \left(C - \frac{C}{A} - AF \right) \tau_q - \frac{2}{\tau_q \omega} \frac{\tau_T + \omega(1 + \alpha\varepsilon)}{1 + \alpha\varepsilon},$$

$$v_1 = \left(\frac{\omega(1 + \alpha\varepsilon)\tau_q^2}{\lambda_1} \right)^{1/2}, \quad v_2 = \left(\frac{2\omega(1 + \alpha\varepsilon)\tau_q^2}{\lambda_1} \right)^{1/2},$$

$$A = \frac{\omega\tau_q^2}{2}, \quad B = \omega\tau_q, \quad C = \omega + \frac{1}{2} \tau_q^2(1 + \alpha\varepsilon), \quad F = -\omega\tau_q^4(1 + \alpha\varepsilon).$$

Таким образом, для больших значений s имеем

$$P_1 \simeq \frac{s}{v_1} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{1}{v_1}, \quad P_2 \simeq \frac{s}{v_2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{v_2}.$$

После упрощений для больших значений s получаем

$$\frac{M_1}{P_2^2 - P_1^2} \simeq \frac{1}{s^5} \frac{\delta_1}{L_0} + \frac{1}{s^6} \frac{\delta_2 + \delta_1 M_0}{L_0},$$

$$\frac{P_1^2 - L_1}{s(P_2^2 - P_1^2)} \simeq \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right) \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \left[-\frac{1}{L_0} - \frac{M_0}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right) \right],$$

$$\frac{P_2^2 - L_1}{s(P_2^2 - P_1^2)} \simeq \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \left[-\frac{1}{L_0} - \frac{M_0}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right) \right],$$

где

$$L_0 = \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}, \quad M_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1 v_2^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 v_1^2},$$

$$\delta_1 = \frac{2\alpha}{\omega^2 \tau_q^2 (1 + \alpha\varepsilon)}, \quad \delta_2 = \delta_1 \left(\tau_T + \frac{2}{\tau_q} - \frac{2\tau_q}{\omega} - \frac{2\tau_q}{\omega(1 + \alpha\varepsilon)} \right).$$

Окончательно для образов температуры проводимости ϕ и деформации e при больших значениях s имеем

$$\bar{\phi}(\xi, s) \simeq R\phi_0 \left(\left\{ \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{L_0} + \frac{M_0}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right) \right] \frac{1}{s^2} \right\} \exp \left(- \left(\frac{s}{v_1} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 v_1} \right) \xi \right) - \left\{ \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right) \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{L_0} + \frac{M_0}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right) \right] \frac{1}{s^2} \right\} \exp \left(- \left(\frac{s}{v_2} + \frac{\mu_2}{2\mu_1 v_2} \right) \xi \right) \right),$$

$$\bar{e}(\xi, s) \simeq R\phi_0 \left[\left(\frac{\delta_1}{L_0} \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^6} \frac{\delta_2 + \delta_1 M_0}{L_0} \right) \exp \left(- \left(\frac{s}{v_2} + \frac{\mu_2}{2\mu_1 v_2} \right) \xi \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{\delta_1}{L_0} \frac{1}{s^5} + \frac{1}{s^6} \frac{\delta_2 + \delta_1 M_0}{L_0} \right) \exp \left(- \left(\frac{s}{v_1} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 v_1} \right) \xi \right) \right],$$

где $\xi = r - R$. Наконец, применяя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\phi(\xi, t) \simeq R\phi_0 \left(\exp \left(- \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 v_1} \xi \right) \left\{ \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right) - \left(t - \frac{\xi}{v_1} \right) \left[\frac{1}{L_0} + \frac{M_0}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right) \right] \right\} H \left(t - \frac{\xi}{v_1} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(- \frac{\mu_2}{2\mu_1 v_2} \xi \right) \left\{ \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right) - \left(t - \frac{\xi}{v_2} \right) \left[\frac{1}{L_0} + \frac{M_0}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right) \right] \right\} H \left(t - \frac{\xi}{v_2} \right) \right); \quad (4.2)$$

$$e(\xi, t) = \frac{R}{r} \phi_0 \left\{ \exp \left(- \frac{\mu_2}{2\mu_1 v_2} \xi \right) \left[\frac{\delta_1}{L_0} \frac{1}{24} \left(t - \frac{\xi}{v_2} \right)^4 + \frac{1}{120} \left(t - \frac{\xi}{v_2} \right)^5 \frac{\delta_2 + \delta_1 M_0}{L_0} \right] H \left(t - \frac{\xi}{v_2} \right) - \right. \\ \left. - \exp \left(- \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 v_1} \xi \right) \left[\frac{\delta_1}{L_0} \frac{1}{24} \left(t - \frac{\xi}{v_1} \right)^4 + \frac{1}{120} \left(t - \frac{\xi}{v_1} \right)^5 \frac{\delta_2 + \delta_1 M_0}{L_0} \right] H \left(t - \frac{\xi}{v_1} \right) \right\}. \quad (4.3)$$

Из решения (4.2), (4.3) при малых временах для температуры проводимости и деформации следует существование двух волн. Выражения для ϕ и e состоят из двух частей, каждая из которых соответствует волне, распространяющейся с конечной скоростью. Волна, соответствующая первой части выражения, распространяется со скоростью v_1 , волна, соответствующая второй части выражения, распространяется со скоростью v_2 .

Из (4.2), (4.3) следует, что на фронте волны деформация e непрерывна, а температура ϕ разрывна, скачки температуры на фронтах волн находятся из выражений

$$[\phi]_{\xi=tv_1} = R\phi_0 \exp \left(- \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 v_1} \xi \right) \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_2^2} \right), \\ [\phi]_{\xi=tv_2} = -R\phi_0 \exp \left(- \frac{\mu_2}{2\mu_1 v_2} \xi \right) \frac{1}{L_0} \left(\omega + \frac{1}{v_1^2} \right).$$

Значения скачков уменьшаются по экспоненте по мере удаления от границы полости. Скорость v_2 соответствует модифицированной скорости распространения теплового сигнала, скорость v_1 — модифицированной скорости распространения упругой дилатансии. Поскольку $v_1 < v_2$, с большей скоростью распространяется модифицированная волна Тзу (T -волна), с меньшей скоростью — модифицированная упругая волна (E -волна).

5. Численное обращение преобразования Лапласа. Численно найдем обратное преобразование Лапласа. Пусть $\bar{f}(r, s)$ — трансформанта преобразования Лапласа функции $f(r, t)$. Тогда формула обратного преобразования Лапласа принимает вид

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{st} \bar{f}(r, s) ds, \quad (5.1)$$

где d — произвольное вещественное число, большее максимального значения всех вещественных частей сингулярных чисел функции $\bar{f}(r, s)$.

Полагая в (5.1) $s = d + iw$, получаем

$$f(r, t) = \frac{e^{dt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} f(r, d + iw) dw.$$

Разлагая функцию $h(r, t) = e^{-dt} f(r, t)$ в ряд Фурье на интервале $[0, 2T]$, получаем приближенную формулу [37]

$$f(r, t) = f_{\infty}(r, t) + E_D,$$

где

$$f_{\infty}(r, t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad 0 \leq t \leq 2T; \quad (5.2)$$

$$c_k = \frac{e^{dt}}{T} e^{ik\pi t/T} \bar{f}\left(r, d + \frac{ik\pi t}{T}\right).$$

Ошибку дискретизации E_D можно сделать сколь угодно малой путем выбора достаточно большого значения d [37]. Оставляя в ряду (5.2) конечное число членов, получаем приближенное выражение для функции $f(r, t)$

$$f_N(r, t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{k=1}^N c_k, \quad 0 \leq t \leq 2T. \quad (5.3)$$

При использовании формулы (5.3) необходимо учитывать ошибку усечения, которую нужно добавить к ошибке дискретизации при определении общей ошибки аппроксимации.

Для уменьшения общей ошибки используется два метода: метод Korrektur уменьшения ошибки дискретизации и ε -алгоритм для ускорения сходимости [37].

В методе Korrektur для оценки функции $f(r, t)$ используется следующая формула:

$$f(r, t) = f_{\infty}(r, t) - e^{-2dT} f_{\infty}(r, 2T + t) + E'_D,$$

где ошибка дискретизации $|E'_D| \ll |E_D|$. Таким образом, для функции $f(r, t)$ получаем приближенное выражение

$$f_{NK}(r, t) = f_N(r, t) - e^{-2dT} f_{N'}(r, 2T + t), \quad (5.4)$$

где $N' < N$ — целое число.

Опишем ε -алгоритм, который применяется для ускорения сходимости ряда в (5.3).

Пусть $N = 2q + 1$ (q — натуральное число), $s_m = \sum_{k=1}^m c_k$ — последовательность частичных сумм ряда в (5.3). Определим ε -последовательность следующим образом:

$$\varepsilon_{0,m} = 0, \quad \varepsilon_{1,m} = s_m, \quad \varepsilon_{p+1,m} = \varepsilon_{p-1,m+1} + \frac{1}{\varepsilon_{p,m+1} - \varepsilon_{p,m}}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Последовательность $\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{3,1}, \varepsilon_{5,1}, \dots, \varepsilon_{N,1}$ [37] сходится к $f(r, t) + E_D - c_0/2$ быстрее, чем последовательность частичных сумм s_m ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Процедура обращения преобразования Лапласа заключается в использовании уравнения (5.4) совместно с ε -алгоритмом. Значения констант d и T выбираются в соответствии с критерием, приведенным в [37].

6. Результаты численного анализа и их обсуждение. Для определения температурных напряжений, температуры проводимости и термодинамической температуры применяется обратное преобразование Лапласа к уравнениям (3.9)–(3.15), которое выполняется численно с помощью описанной выше процедуры [37]. Программа вычислений написана на языке Fortran-77.

В качестве примера рассматривается упругое пространство, материалом которого является медь со следующими характеристиками: $k = 386 \text{ Н}/(\text{К} \cdot \text{с})$, $\alpha_T = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $c_E = 383,1 \text{ м}^2/\text{К}$, $\eta = 8886,73 \text{ м}/\text{с}^2$, $\mu = 3,86 \cdot 10^{10} \text{ Н}/\text{м}^2$, $\lambda = 7,76 \cdot 10^{10} \text{ Н}/\text{м}^2$, $\rho = 8954 \text{ кг}/\text{м}^3$,

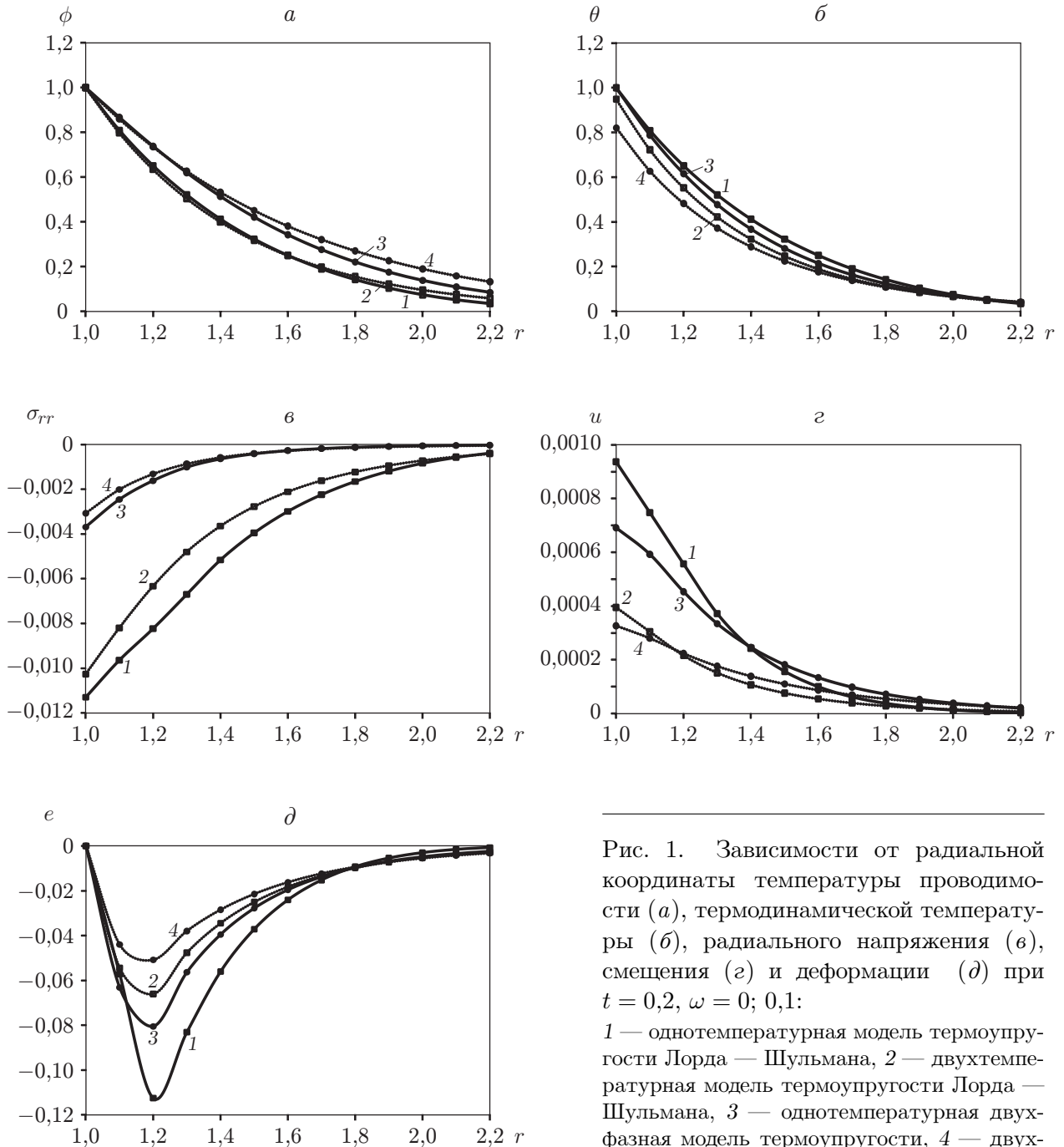


Рис. 1. Зависимости от радиальной координаты температуры проводимости (а), термодинамической температуры (б), радиального напряжения (в), смещения (г) и деформации (д) при $t = 0,2$, $\omega = 0; 0,1$:

1 — однотемпературная модель термоупругости Лорда — Шульмана, 2 — двухтемпературная модель термоупругости Лорда — Шульмана, 3 — однотемпературная двухфазная модель термоупругости, 4 — двухтемпературная двухфазная модель термоупругости

$\tau_T = 0,015$ с, $\tau_0 = \tau_q = 0,02$ с, $T_0 = 293$ К, $\varepsilon = 0,0168$, $\alpha = 0,0104$, $F_0 = 1$, удовлетворяющими условию устойчивости решения для двухтемпературной модели термоупругости с двумя фазами запаздывания: $\tau_T/\tau_q > 1/2$.

На рис. 1 приведены зависимости от радиальной координаты температуры проводимости ϕ , термодинамической температуры θ , радиального напряжения σ_{rr} , смещения u и деформации e при $t = 0,2$ для модели Лорда — Шульмана и двухфазной модели термоупругости, где $\omega = 0$ соответствует однотемпературной теории термоупругости, $\omega = 0,1$ — двухтемпературной теории термоупругости. Видно, что температура проводимости ϕ достигает максимального значения на поверхности $r = R$, удовлетворяет поставленному граничному условию, постепенно уменьшается, асимптотически стремясь к нулю по мере удаления от центра полости. Температура проводимости, вычисленная по модели Лорда — Шульмана, больше соответствующей температуры, вычисленной по двухфазной модели. Температура проводимости, вычисленная с использованием модели термоупругости с одной температурой, уменьшается быстрее, чем температура проводимости, вычисленная с использованием модели термоупругости с двумя температурами.

Температура θ в случае использования как однотемпературной теории, так и двухтемпературной достигает максимального значения при $r = 1$, затем асимптотически стремится к нулю с увеличением координаты r . Температура, вычисленная по модели Лорда — Шульмана, больше температуры, вычисленной по двухфазной модели.

Напряжение σ_{rr} , вычисленное по обеим моделям, является сжимающим вблизи поверхности $r = 1$ и достигает максимального значения на этой поверхности. С увеличением r напряжение постепенно уменьшается и стремится к нулю на бесконечности. Напряжение, вычисленное по модели Лорда — Шульмана, больше вычисленного по двухфазной модели.

Амплитуда смещения u , вычисленная по модели Лорда — Шульмана, также больше, чем вычисленная по двухфазной модели. При увеличении r амплитуда смещения уменьшается и асимптотически стремится к нулю на бесконечности.

Деформация e при $r = 1$ равна нулю (см. рис. 1, d), что соответствует поставленному граничному условию. Максимальное значение деформации достигается при $r \simeq 1,2$. Максимальные значения деформации, вычисленные по модели Лорда — Шульмана, больше вычисленных по двухфазной модели как при $\omega = 0$, так и при $\omega = 0,1$.

На рис. 2 приведена зависимость температуры проводимости ϕ от времени t при $r = 1,2$, $\omega = 0,1$. Видно, что при увеличении t температура проводимости увеличивается и стремится к постоянному значению.

Заключение. С использованием двухтемпературной обобщенной теории термоупругости и уравнения теплопроводности с двумя фазами запаздывания исследовано распределение температуры проводимости, термодинамической температуры, температурных напряжений, смещений и деформаций в бесконечном однородном изотропном упругом теле со сферической полостью. С помощью преобразования Лапласа задача сведена к матричному дифференциальному уравнению в пространстве образов, решение которого построено в пространстве состояний. Обратное преобразование Лапласа найдено численно с помощью разложения в ряд Фурье [37]. На основе анализа построенного решения можно сделать следующие выводы.

Результаты решения задач теплопроводности при наличии быстропротекающих процессов и интенсивных потоков тепла с использованием уравнения теплопроводности гиперболического типа и уравнения параболического типа различаются. При исследовании быстропротекающих процессов (со временем протекания процесса порядка 10^{-7} с) и при наличии интенсивных потоков тепла необходимо учитывать эффект запаздывания в процессе теплопередачи и использовать обобщенную модель термоупругости с двумя фазами запаздывания.

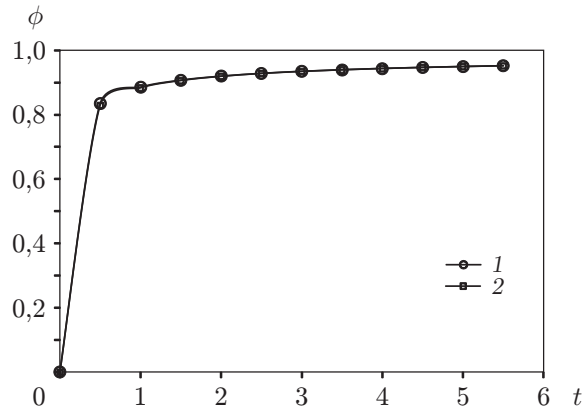


Рис. 2. Зависимость температуры проводимости от времени, полученная с использованием двухтемпературной модели термоупругости Лорда — Шульмана (1) и двухтемпературной двухфазной модели термоупругости (2), при $r = 1,2$, $\omega = 0,1$

В случае если в теле действуют интенсивные тепловые потоки на очень малом интервале времени (порядка 10^{-7} с), теплопроводность зависит от двух температур: температуры проводимости ϕ и термодинамической температуры θ . Поскольку термодинамическая температура θ является функцией температуры проводимости и ее градиентов $\theta = \hat{\theta}(\phi, \nabla\phi, a^2\phi)$ [3], следует использовать теорию термоупругости с двумя температурами. Для процессов, не зависящих от времени стационарных процессов, разность этих двух температур пропорциональна притоку тепла, при отсутствии притока тепла эти температуры совпадают. В этом случае решения, полученные с использованием двухтемпературной обобщенной теории термоупругости, являются непрерывными, что представляется правдоподобным. Таким образом, двухтемпературная модель термоупругости соответствует действительности в большей степени, чем однотемпературная.

Решения на малом промежутке времени для температуры проводимости ϕ и деформации e содержат две волны, распространяющиеся с конечной скоростью.

Выражения для ϕ и e состоят из двух частей, каждая из которых соответствует волне, распространяющейся с конечной скоростью. Для температуры скорость волны, соответствующей первой части выражения, равна v_1 , скорость волны, соответствующей второй части выражения, равна v_2 . Для деформации e скорость волны, соответствующей первой части выражения, равна v_2 , скорость волны, соответствующей второй части выражения, равна v_1 . Обе волны затухают по экспоненциальному закону по мере распространения. Температура ϕ и деформация e тождественно равны нулю при $x > v_2 t$. Это означает, что в момент времени t^e точки тела, находящиеся за фронтом волны, движущимся с большей скоростью ($x = v_2 t^e$), не испытывают возмущений. Как и другие обобщенные теории термоупругости, двухтемпературная теория с двумя фазами запаздывания является волновой теорией. Область $0 < x < v_2 t^e$ является областью влияния возмущения в данный момент времени. В классической теории термоупругости возмущение мгновенно распространяется по всему телу. Полученные в работе результаты согласуются с результатами [38].

Авторы выражают благодарность С. Бозе за ценные предложения и помощь при подготовке работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gurtin M. E., Williams W. O.** On the Clausius — Duhem inequality // *Z. angew. Math. Phys.* 1966. Bd 7. S. 626–633.
2. **Gurtin M. E., Williams W. O.** An axiomatic foundation for continuum thermodynamics // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1967. V. 26. P. 83–117.
3. **Chen P. J., Gurtin M. E.** On a theory of heat conduction involving two temperatures // *Z. angew. Math. Phys.* 1968. Bd 19. S. 614–627.
4. **Chen P. J., Gurtin M. E., Williams W. O.** A note on non simple heat conduction // *Z. angew. Math. Phys.* 1968. Bd 19. S. 969–970.
5. **Chen P. J., Gurtin M. E., Williams W. O.** On the thermodynamics of non-simple elastic materials with two temperatures // *Z. angew. Math. Phys.* 1969. Bd 20. S. 107–112.
6. **Warren W. E., Chen P. J.** Wave propagation in two temperatures theory of thermoelasticity // *Acta Mech.* 1973. V. 16. P. 83–117.
7. **Lesan D.** On the linear coupled thermoelasticity with two temperatures // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 583–591.
8. **Puri P., Jordan P. M.** On the propagation of harmonic plane waves under the two-temperature theory // *Intern. J. Engng Sci.* 2006. V. 44. P. 1113–1126.
9. **Quintanilla R.** On existence, structural stability, convergence and spatial behavior in thermoelasticity with two temperatures // *Acta Mech.* 2004. V. 168. P. 61–73.
10. **Lord H., Shulman Y.** A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 1967. V. 15. P. 299.
11. **Ignaczak J.** Uniqueness in generalized thermoelasticity // *J. Thermal Stresses.* 1979. V. 2. P. 171–175.
12. **Ignaczak J.** A note on uniqueness in thermoelasticity with one relaxation time // *J. Thermal Stresses.* 1982. V. 5. P. 257–263.
13. **Dhaliwal R. S., Sherief H.** Generalized thermoelasticity for anisotropic media // *Quart. Appl. Math.* 1980. V. 33. P. 1–8.
14. **Sherief H. H.** On uniqueness and stability in generalized thermoelasticity // *Quart. Appl. Math.* 1987. V. 45. P. 773–778.
15. **Green A. E., Lindsay K. A.** Thermoelasticity // *J. Elasticity.* 1972. V. 2. P. 1–7.
16. **Green A. E., Naghdi P. M.** A re-examination of the basic results of thermomechanics // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1992. V. 432. P. 171–194.
17. **Green A. E., Naghdi P. M.** Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity.* 1993. V. 31. P. 189–208.
18. **Green A. E., Naghdi P. M.** On undamped heat waves in an elastic solid // *J. Thermal Stresses.* 1992. V. 15. P. 252–264.
19. **Mallik S. H., Kanoria M.** Two dimensional problem in generalized thermoelasticity for a rotating orthotropic infinite medium with heat sources // *Indian J. Math.* 2007. V. 49, N 1. P. 47–70.
20. **Mallik S. H., Kanoria M.** A unified generalized thermoelastic formulation: Application to an penny shaped crack analysis // *J. Thermal Stresses.* 2009. V. 32. P. 945–965.
21. **Tzou D. Y.** A unified approach for heat conduction from macro to micro-scales // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 1995. V. 117. P. 8–16.
22. **Roychoudhury S. K.** One-dimensional thermoelastic waves in elastic half-space with dual-phase-lag effect // *J. Mech. Mater. Struct.* 2007. V. 2. P. 489–502.

23. **Quintanilla R., Horgan C. O.** Spatial behaviour of solutions of the dual-phase-lag heat equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2005. V. 28. P. 43–57.
24. **Quintanilla R., Racke R.** A note on stability in dual-phase-lag heat conduction // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2006. V. 49. P. 1209–1213.
25. **Quintanilla R.** A well-posed problem for the three-dual-phase-lag heat conduction // *J. Thermal Stresses.* 2009. V. 32. P. 1270–1278.
26. **Quintanilla R.** Exponential stability in the dual-phase-lag heat conduction theory // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2002. V. 27. P. 217–227.
27. **Quintanilla R.** A condition on the delay parameters in the one-dimensional dual-phase-lag thermoelastic theory // *J. Thermal Stresses.* 2003. V. 26. P. 713–721.
28. **Prasad R., Kumar R., Mukhopadhyay S.** Propagation of harmonic plane waves under thermoelasticity with dual-phase-lags // *Intern. J. Engng Sci.* 2010. V. 48. P. 2028–2043.
29. **Youssef H. M.** Theory of two-temperature generalized thermoelasticity // *IMA J. Appl. Math.* 2006. V. 71. P. 1–8.
30. **Mukhopadhyay S., Kumar R.** Thermoelastic interactions on two temperature generalized thermoelasticity in an infinite medium with a cylindrical cavity // *J. Thermal Stresses.* 2009. V. 32. P. 341–360.
31. **Kumar R., Prasad R., Mukhopadhyay S.** Variational and reciprocal principles in two-temperature generalized thermoelasticity // *J. Thermal Stresses.* 2010. V. 33. P. 161–171.
32. **Magane A., Quintanilla R.** Uniqueness and growth of solutions in two-temperature generalized thermoelastic theories // *J. Math. Mech. Solids.* 2009. V. 14. P. 622–634.
33. **Banik S., Kanoria M.** Two temperature generalized thermoelastic interactions in an infinite body with a spherical cavity // *Intern. J. Thermophys.* 2011. V. 32. P. 1247–1270.
34. **Sur A., Kanoria M.** Fractional order two-temperature thermoelasticity with finite wave speed // *Acta Mech.* 2012. V. 223, N 12. P. 2685–2701.
35. **Mondal S., Mallik S. H., Kanoria M.** Fractional order two-temperature dual-phase-lag thermoelasticity with variable thermal conductivity // *Intern. Scholarly Res. Notices.* 2014. V. 2014. 646049.
36. **Bahar L. Y., Hetnarski R. B.** State space approach to thermoelasticity // *Proc. of the 6th Canad. congress of applied mechanics, Vancouver (Canada), May 30 — June 3, 1977. S. 1.: Univ. of British Columbia, 1977. P. 17–18.*
37. **Honig G., Hirdes U.** A method for the numerical inversion of Laplace transform // *J. Comput. Appl. Math.* 1984. V. 10. P. 113–132.
38. **Banik S., Kanoria M.** Two-temperature generalized thermoelastic interactions in an infinite body with a spherical cavity // *Intern. J. Thermophys.* 2011. V. 32, iss. 6. P. 1247–1270. DOI: 10.1007/s10765-011-1002-2.
39. **Bahar L. Y., Hetnarski R. B.** State space approach to thermoelasticity // *J. Thermal Stresses.* 1978. V. 1, iss. 1. P. 135–145.

*Поступила в редакцию 3/II 2014 г.,
в окончательном варианте — 12/VIII 2014 г.*
