

УДК 539.4

DOI: 10.15372/PMTF202215113

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

М. Пан, Ч. В. Цзинь, Б. Л. Ху, Ю. Ц. Чзан

Колледж гражданского строительства и архитектуры Чжэцзянского университета,  
Ханчжоу, Китай

E-mails: ppmzju@163.com, ccwwjin@163.com, bilanhuzju@163.com, cyqzhang@zju.edu.cn

Исследуется неустойчивость тонкостенной замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним импульсным давлением. Материал оболочки обладает пластической анизотропией. Предполагается, что цилиндрическая оболочка изготовлена из пластичного материала. С учетом влияния пластической анизотропии материала и скорости деформации на основе ортогонального анизотропного критерия текучести Хилла получено выражение для деформации, при которой происходит потеря устойчивости тонкостенного цилиндра с закрытыми торцами. Из полученных результатов следует, что деформация, при которой происходит потеря устойчивости тонкостенной замкнутой цилиндрической оболочки, зависит от степени пластической анизотропии и скорости деформации.

**Ключевые слова:** цилиндрические оболочки, потеря устойчивости, анизотропная пластичность, импульсное нагружение

**Введение.** Цилиндрические оболочки широко используются в нефтехимической промышленности, океанотехнике, аэрокосмической технике и т. д. При проектировании безопасных и надежных цилиндрических оболочек большое значение имеет определение предела их пластической неустойчивости с использованием теоретических, численных и экспериментальных методов [1–6].

В работе [7] полагалось, что для тонкостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления, максимальным допустимым давлением является давление, при котором возникает пластическая неустойчивость при растяжении. В работе [8] при исследовании вязкого разрушения тонкостенных цилиндров под действием динамического внутреннего давления установлено, что пластическая неустойчивость возникает при достижении максимального значения результирующей окружной напряженности. В работе [9] обнаружено два типа пластической неустойчивости цилиндрических оболочек при нагружении их статическим давлением: глобальная и локальная. Глобальная пластическая неустойчивость возникает при достижении максимального значения внутреннего давления, в то время как локальная пластическая неустойчивость наблюдается при испытании образцов на растяжение. В работе [10] исследовалось локальное разрушение цилиндра с открытым торцом при импульсной нагрузке. Из полученных результатов следует, что критерий локального разрушения для величины окружной деформации является более адекватным,

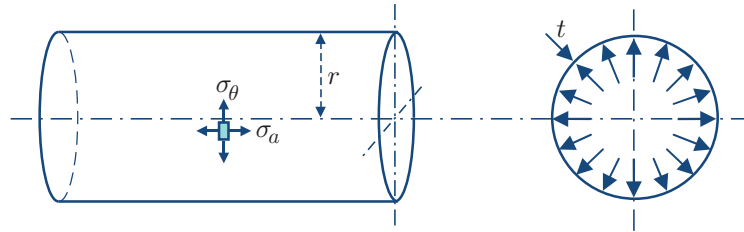


Рис. 1. Схема тонкостенной замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним импульсным давлением:

$\sigma_a$  — осевое главное напряжение,  $\sigma_\theta$  — окружное главное напряжение,  $r$  — текущий радиус,  $t$  — текущая толщина цилиндрической оболочки

чем критерий локального разрушения, используемый в коде ASME для судов, нагруженных импульсным давлением.

Известно, что при изготовлении многих цилиндрических оболочек может возникать пластическая анизотропия. В работе [11] получено аналитическое выражение для разрушающего давления длинной идеальной тонкостенной трубы с закрытыми торцами, которая находится под действием внутреннего и внешнего давления и материал которой является пластически анизотропным. В работе [12] исследовалось разрушение пластических анизотропных толстостенных цилиндрических сосудов под действием внутреннего и внешнего давления. Показано, что пластическая анизотропия оказывает существенное влияние на разрушающее давление.

В данной работе с использованием соотношений теории Хилла ортогональной анизотропии [13] изучается пластическая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек, которые находятся под действием импульсного давления и материал которых обладает пластической анизотропией.

**1. Анализ пластической неустойчивости.** Рассматривается тонкостенная замкнутая цилиндрическая оболочка, нагруженная внутренним импульсным давлением (рис. 1).

Согласно теории пластичности Хилла для материалов, обладающих ортогональной анизотропией, выражение для эквивалентного напряжения в цилиндре имеет вид

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{F(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + G(\sigma_r - \sigma_a)^2 + H(\sigma_a - \sigma_\theta)^2}{F + G + H} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\sigma_r$  — радиальное главное напряжение;  $F, G, H$  — параметры ортотропии. Выражение для эквивалентной деформации в цилиндре записывается в виде

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} (F + G + H)^{1/2} \left( \frac{F(G\varepsilon_\theta - H\varepsilon_r)^2 + G(H\varepsilon_r - F\varepsilon_a)^2 + H(F\varepsilon_a - G\varepsilon_\theta)^2}{(FG + GH + HF)^2} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_a, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  — главные деформации.

Степень анизотропии материала определяется параметрами  $r_a, r_\theta$ :

$$r_a = \frac{H}{G}, \quad r_\theta = \frac{H}{F}, \quad (3)$$

которые характеризуют степень анизотропии материала в осевом и окружном направлениях соответственно и определяются в экспериментах на растяжение в соответствующих направлениях. Для тонкостенных замкнутых цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением, главное радиальное напряжение  $\sigma_r$  значительно меньше главных осевого  $\sigma_a$  и окружного  $\sigma_\theta$  напряжений. Поэтому напряжением  $\sigma_r$  можно пренебречь. В результате получаем [1, 14, 15]

$$\sigma_a = \sigma_\theta/2. \quad (4)$$

С учетом (1), (3), (4) выражение для эквивалентного напряжения принимает вид

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{r_a r_\theta + 4r_a + r_\theta}{r_a r_\theta + r_a + r_\theta} \right)^{1/2} \sigma_\theta. \quad (5)$$

Из результатов многочисленных экспериментов по разрушению замкнутых цилиндрических оболочек следует, что осевые деформации незначительны и ими можно пренебречь [3]. Таким образом, выражения для трех главных конечных деформаций можно записать в виде

$$\varepsilon_\theta = \ln \frac{r}{r_0}, \quad \varepsilon_a = 0, \quad \varepsilon_r = \ln \frac{t}{t_0}, \quad (6)$$

где  $r_0, t_0$  — начальные значения радиуса и толщины оболочки соответственно. При пластическом деформировании с учетом несжимаемости материала имеем

$$\varepsilon_a + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 0. \quad (7)$$

Из (6), (7) следует

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta. \quad (8)$$

С учетом (2), (3), (6), (8) выражение для эквивалентной деформации можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{(r_a r_\theta + r_a + r_\theta)(r_a + 1)}{(r_a + r_\theta + 1)r_a} \right)^{1/2} \varepsilon_\theta. \quad (9)$$

В работе [8] установлено, что потеря устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной коротким импульсом внутреннего давления, происходит при достижении максимального значения равнодействующей окружных напряжений. Следовательно, условие потери устойчивости имеет вид [8]

$$d(\sigma_\theta t) = t d\sigma_\theta + \sigma_\theta dt = 0,$$

или

$$\frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta} + \frac{dt}{t} = 0. \quad (10)$$

Из (6), (8), (10) получаем

$$\sigma_\theta = \frac{d\sigma_\theta}{d\varepsilon_\theta}. \quad (11)$$

Из уравнений (5), (9), (11) следует, что соотношение между эквивалентными напряжением и деформацией можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \beta \sigma, \quad (12)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{(r_a + r_\theta + 1)r_a}{(r_a r_\theta + r_a + r_\theta)(r_a + 1)} \right)^{1/2}.$$

Деформацию, при которой происходит потеря устойчивости, можно определить из уравнения (12) и определяющих соотношений теории пластичности. Для того чтобы учесть влияние скорости деформации  $\dot{\varepsilon}$  на деформацию, при которой происходит потеря

устойчивости, при описании поведения материала принимается обобщенный закон, учитывающий скорость деформации [16]:

$$\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n + D\dot{\varepsilon}^m. \quad (13)$$

Здесь  $\sigma_0$ ,  $D$  — константы;  $K$  — коэффициент упрочнения;  $n$  — показатель степени в законе упрочнения;  $m$  — показатель, учитывающий влияние скорости деформации. Параметры в соотношении (13) определяются методом наименьшей квадратичной регрессии с использованием экспериментальных данных.

Из (12), (13) следует выражение для деформации, при которой происходит потеря устойчивости цилиндрической оболочки:

$$(\varepsilon_b)^n \left( \frac{n}{\varepsilon_b} - \beta \right) = \beta \left( \frac{\sigma_0}{K} + \frac{D}{K} \dot{\varepsilon}^m \right) \quad (14)$$

( $\varepsilon_b$  — эквивалентная деформация, при которой происходит потеря устойчивости замкнутой тонкостенной цилиндрической оболочки).

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** В выражении для деформации (14), при которой происходит потеря устойчивости оболочки, учитываются пластическая анизотропия материала и зависимость характеристик материала от скорости деформации. При  $D = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$  без учета пластической анизотропии ( $r_a = r_\theta = 1$ ) из трансцендентного уравнения (14) получаем выражение

$$\varepsilon_b = 2n/\sqrt{3},$$

которое следует из критерия Мизеса в случае пластической изотропии материала [8].

Численное решение трансцендентного уравнения (14) относительно деформации  $\varepsilon_b$  получено с использованием пакета Mathematica. На рис. 2 представлена зависимость деформации  $\varepsilon_b$  от показателя степени в законе упрочнения  $n$  при различных значениях параметра анизотропии в осевом направлении  $r_a$ . Видно, что деформация  $\varepsilon_b$  уменьшается с увеличением параметра  $r_a$  и увеличивается с увеличением показателя  $n$ .

На рис. 3 приведена зависимость деформации  $\varepsilon_b$  от показателя степени в законе упрочнения  $n$  при различных значениях параметра анизотропии в окружном направлении  $r_\theta$ . Видно, что с увеличением параметра анизотропии  $r_\theta$  и показателя степени в законе упрочнения  $n$  деформация  $\varepsilon_b$  увеличивается.

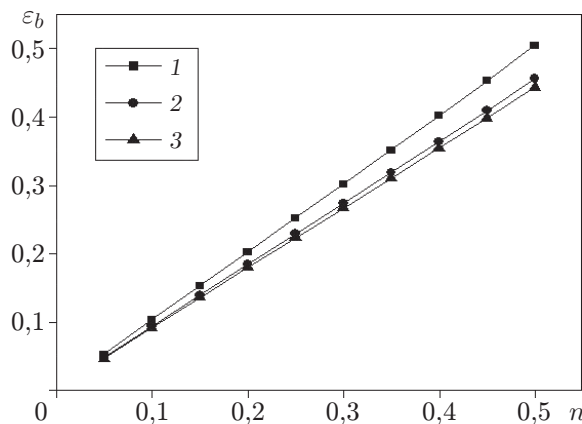


Рис. 2. Зависимость деформации, при которой происходит потеря устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки, от показателя деформационного упрочнения при  $\sigma_0/K = D/K = 0,1$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0,01$ ,  $m = 0,05$ ,  $r_\theta = 1$  и различных значениях параметра анизотропии в осевом направлении:

1 —  $r_a = 0,5$ , 2 —  $r_a = 1,0$ , 3 —  $r_a = 1,5$

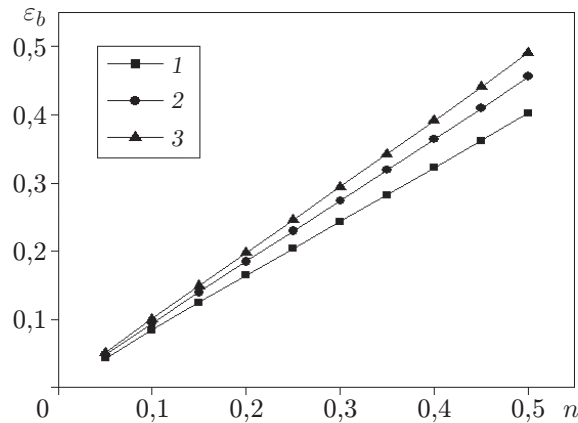


Рис. 3. Зависимость деформации  $\varepsilon_b$  от показателя степени в законе упрочнения  $n$  при  $\sigma_0/K = D/K = 0,1$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0,01$ ,  $m = 0,05$ ,  $r_a = 1$  и различных значениях параметра анизотропии в окружном направлении:

1 —  $r_\theta = 0,5$ , 2 —  $r_a = 1,0$ , 3 —  $r_\theta = 1,5$

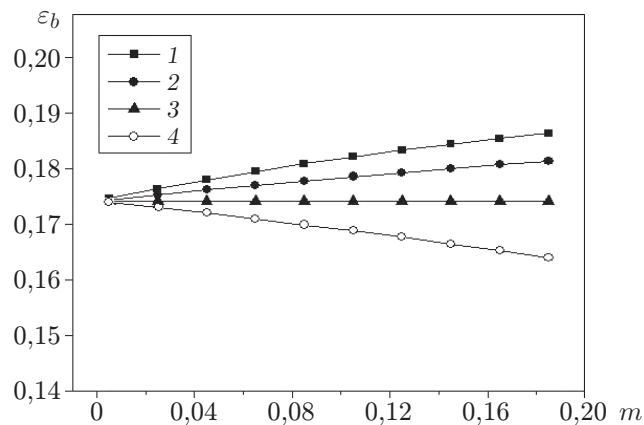


Рис. 4. Зависимость деформации, при которой происходит потеря устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки, от показателя  $m$ , учитывающего влияние скорости деформации, при  $\sigma_0/K = D/K = 0,1$ ,  $n = 0,2$ ,  $r_a = r_\theta = 0,5$  и различных значениях эквивалентной скорости истинной деформации:

1 —  $\dot{\varepsilon} = 0,01$ , 2 —  $\dot{\varepsilon} = 0,1$ , 3 —  $\dot{\varepsilon} = 1$ , 4 —  $\dot{\varepsilon} = 10$

На рис. 4 показана зависимость деформации  $\varepsilon_b$  от показателя  $m$  при различных значениях эквивалентной скорости деформации  $\dot{\varepsilon}$ . С увеличением  $m$  при  $\dot{\varepsilon} > 1$  деформация  $\varepsilon_b$  уменьшается, при  $\dot{\varepsilon} < 1$  увеличивается, при  $\dot{\varepsilon} = 1$  является постоянной. Из зависимостей, приведенных на рис. 4, также следует, что с увеличением скорости деформации деформация  $\varepsilon_b$  уменьшается.

**Заключение.** С использованием теории пластичности Хилла для материалов, обладающих ортогональной анизотропией, исследована неустойчивость замкнутой тонкостенной цилиндрической оболочки, нагруженной импульсным внутренним давлением. С помощью обобщенного степенного определяющего соотношения, учитывающего скорость деформации, получено выражение для деформации, при которой возникает пластическая неустойчивость. С использованием пакета Mathematica получено решение трансцендентного уравнения для критической деформации.

Исследовано влияние степени пластической анизотропии и скорости деформации на критическую деформацию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Svensson N. L.** The bursting pressure of cylindrical and spherical vessels // J. Appl. Mech. 1958. V. 25, N 1. P. 89–96.
2. **Mellor P. B.** The ultimate strength of thin-walled shells and circular diaphragms subjected to hydrostatic pressure // Intern. J. Mech. Sci. 1960. V. 1, N 2/3. P. 216–228.
3. **Costantino C. J.** The strength of thin-walled cylinders subjected to dynamic internal pressures // J. Appl. Mech. 1965. V. 32, N 1. P. 104–107.
4. **Kalnins A., Updike D. P.** Limit of pressures of cylindrical and spherical shells // J. Pressure Vessel Technol. 2002. V. 123, N 3. P. 288–292.
5. **Tugcu P.** Instability and ductile failure of thin cylindrical tubes under internal pressure impact // Intern. J. Impact Engng. 2003. V. 28, N 2. P. 183–205.
6. **Schleyer G. K., Rushton N. J.** Experimental investigation of large plastic deformation and fracture in explosively loaded open-ended steel cylinders // Intern. J. Comput. Methods Experiment. Measurements. 2012. V. 1, N 1. P. 1–16.
7. **Mellor P. B.** Tensile instability in thin-walled tubes // J. Mech. Engng Sci. 1962. V. 4, N 3. P. 251–256.
8. **Nakamura T., Kaguchi H., Kubo S.** Failure strain of thin cylindrical vessel subjected to dynamic internal pressure // ASME Press. Vess. Piping Conf. 2000. V. 399. P. 47–54.
9. **Mou Y., Reinhardt W. D., Kizhatil R. K., McClellan G. H.** Plastic instability in pressure vessels and their role in design. Finite element applications: linear, non-linear, optimization and fatigue and fracture // ASME Press. Vess. Piping Conf. 1998. V. 370. P. 135–142.
10. **Duffey T. A., Clayton A. M.** Protection against local failure for impulsively loaded vessels // J. Press. Vess. Technol. 2014. V. 137, N 1. P. 1–4.
11. **Zhang Y. Q., Wang L. Z.** Burst pressure of pipelines with plastic anisotropy under combined internal and external pressures // J. Engng Mech. 2013. V. 139, N 7. P. 920–924.
12. **Pang M., Jin C. W., Zhang Y. Q.** Burst failure analysis of plastic anisotropic thick-walled cylindrical vessels subjected to combined pressures // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, N 2. P. 329–335.
13. **Hill R.** The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950.
14. **Zhu X. K., Leis B. N.** Average shear stress yield criterion and its application to plastic collapse analysis of pipelines // Intern. J. Press. Vess. Piping. 2006. V. 83. P. 663–671.
15. **Wang L. Z., Zhang Y. Q.** Plastic collapse analysis of thin-walled pipes based on unified yield criterion // Intern. J. Mech. Sci. 2011. V. 53, N 5. P. 348–354.
16. **Duffey T. A.** Plastic instabilities in spherical vessels for static and dynamic loading // J. Press. Vess. Technol. 2011. V. 133, N 5. P. 1–6.

*Поступила в редакцию 12/IV 2022 г.,  
после доработки — 18/V 2022 г.  
Принята к публикации 26/V 2022 г.*