

УДК 532.54

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА В КАНАЛЕ С УМЕРЕННЫМ СУЖЕНИЕМ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ЭНДОСКОПА

Н. Т. М. Эль-Дабе, Г. М. Моатимид, М. А. Хассан, Д. Р. Мостафа

Университет Айн Шамс, Каир, Египет

E-mails: eng_mohamed_nabil125@hotmail.com, gal_moa@hotmail.com,

m_a_hassan_gk@hotmail.com, dodyyasser017@yahoo.com

Исследуется влияние вертикального переменного тока, электрического поля и теплообмена на перистальтическое течение диэлектрической вязкоупругой жидкости Олдройда в цилиндрическом и конусообразном умеренно сужающемся каналах. Аналитические решения уравнений движения строятся с использованием метода возмущений, зависящего от двух параметров: амплитудного отношения и малого волнового числа. Численные расчеты выполнены при различных значениях электрического числа Рэлея, градиента температуры, числа Рейнольдса, волнового числа, максимального сужения и числа Вейссенберга. Показано влияние этих параметров на распределения скорости, температуры, электрического потенциала и пристенного напряжения сдвига и построены линии тока. Установлено, что в случае сужающейся конусообразной трубки данные параметры больше, чем в случае цилиндрической и расширяющейся конусообразной трубки.

Ключевые слова: перистальтическое течение, модель Олдройда, конусообразная артерия, течение в сужающемся канале, электрогидродинамика, теплообмен, явление захвата.

DOI: 10.15372/PMTF20160106

Введение. Математическая модель, предложенная Дж. Г. Олдройдом для изучения механического поведения вязкоупругих жидкостей [1], имеет большое значение при определении реологических свойств растворов полимеров. Настоящее исследование очень важно для многих медицинских приложений, таких как перемещение желудочного сока в тонкой кишке, когда в нее вставлен эндоскоп.

В большой части желудочно-кишечного тракта и желудка человека перистальтические волны генерируются последовательным сокращением гладких мышц, что способствует продвижению шара пищи, называемого болюсом [2], и препятствует его обратному движению [3]. Задачи перистальтического движения решались как в неподвижной системе отсчета, так и в системе отсчета, связанной со стационарной волнообразной стенкой [4].

В работах [5, 6] исследовалось течение крови в стенозированных артериях. С медицинской точки зрения стеноз означает сужение любого прохода в теле (канала или отверстия). Патологическое увеличение толщины стенок артерии вызывает стеноз или артериосклероз, которые могут развиваться в различных местах сердечно-сосудистой системы

при определенных условиях. Уменьшение или прекращение кровоснабжения может приводить к инфарктам, инфаркту миокарда, сердечной недостаточности [7], кроме того, при стенозе артерии напряжение и сопротивление потоку больше, чем в нормальной артерии. Нарушения кровоснабжения теоретически и экспериментально исследовались во многих работах (см., например, [8]).

Для изучения перистальтического движения и свойств тканей большое значение имеет исследование теплообмена, представляющего собой переход тепловой энергии от горячего тела к холодному. Теплообмен используется в радиочастотной терапии для лечения таких заболеваний, как коагуляция ткани, первая стадия рака печени, рак легких и отток желудочного сока [9]. В работе [10] исследовалось влияние теплообмена на перистальтическое течение ньютоновских и неньютоновских жидкостей. Вследствие нагрева диэлектрической жидкости возникает градиент диэлектрической постоянной ϵ и электропроводности σ . Воздействие электрического поля постоянного тока приводит к накоплению свободного заряда в жидкости. В случае воздействия электрического поля переменного тока с частотой, значительно превышающей величину, обратную времени релаксации ϵ/σ , свободный заряд не успевает накопиться [11]. Случай электрического поля переменного тока, более управляемый, чем случай электрического поля постоянного тока, исследован в [12].

Исследованием динамики электрически заряженных жидкостей занимается электрогидродинамика, или электрокинетика. Этот раздел науки исследует движение ионизированных частиц или молекул и их взаимодействия с электрическими полями и окружающей жидкостью, типы частиц и механизмы движения жидкостей, такие как электрофорез, электрокинетические процессы, диэлектрофорез, электроосмос и электровращение. Данные явления связаны с непосредственным преобразованием электрической энергии в кинетическую и наоборот. В случаях, когда имеет место ионизация воздуха, возникает индуцированное течение, известное как коронный, или ионный, ветер [13].

В работе [14], посвященной исследованию осесимметричного перистальтического течения несжимаемой вязкоупругой жидкости через трубку, радиус которой меняется по длине (конусообразная трубка), изучалось течение ньютоновской и неньютоновской жидкостей через конусообразные артерии при наличии стеноза. В [15] исследовалось влияние пульсирующего градиента давления на неньютоновское течение (модель степенного закона) крови через гибкие конусообразные артерии при наличии стеноза.

Задача о возникновении конвективной неустойчивости диэлектрической жидкости при одновременном воздействии вертикального электрического поля переменного тока и вертикального температурного градиента исследована в работе [16]. Электрогидродинамическая неустойчивость в слое диэлектрической жидкости, ограниченном двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами, при воздействии радиального электрического поля переменного тока и радиального градиента температуры, изучалась в [11].

Целью настоящей работы является исследование влияния вертикального электрического поля и температурного градиента на перистальтическое движение несжимаемой вязкоупругой диэлектрической жидкости Олдройда.

1. Формулировка задачи. Исследуется нестационарное течение жидкости Олдройда между двумя коаксиальными трубками. По стенке внешней конусообразной трубки, имеющей умеренное сужение, перемещается вниз синусоидальная волна. Твердая цилиндрическая внутренняя стенка движется с постоянной скоростью V_0 (рис. 1). Используется цилиндрическая система координат (r, θ, z) . Рассматривается случай аксиальной симметрии, т. е. физические величины не зависят от координаты θ . Радиусы внутренней и внешней трубок равны $r = r_1$ и $r = R(z) + \eta$, температуры — θ_1, θ_2 соответственно. На течение жидкости оказывают влияние градиент температуры и радиальное электрическое поле переменного тока. Внешняя трубка заземлена, внутренняя трубка имеет постоянный

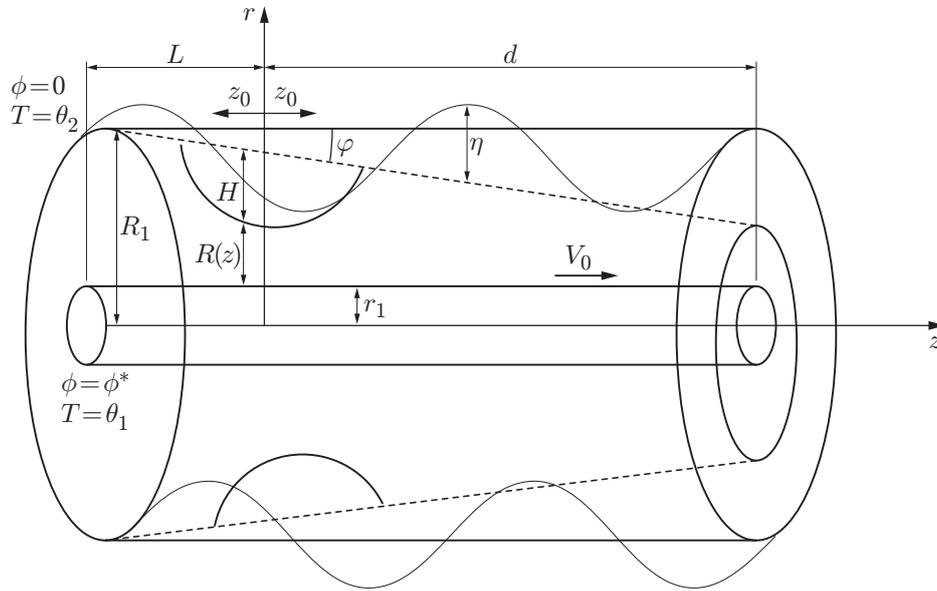


Рис. 1. Схема задачи

электрический потенциал ϕ^* . Эффективный радиус внешней трубки $R(z)$ определяется следующим образом [6]:

$$R(z) = \begin{cases} R_1 - m(z + L), & -L < z < z_0, \\ R_1 - m(z + L) - (H/2)[1 + \cos(\pi z/z_0)], & -z_0 \leq z \leq z_0, \\ R_1 - m(z + L), & z_0 < z < d. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь R_1 — радиус внешней трубки при $z = -L$; $H = h \cos \varphi$ — величина сужения в конусообразной внешней трубке; φ — угол сужения; h — максимальная величина сужения; z_0 — половина длины стенозного сужения; $m = \text{tg } \varphi$.

Отношение величины сужения к радиусу цилиндрической трубки $H/R \leq 1$. Рассматриваемый сегмент артерии имеет конечную длину $L + d$ [5]. Формы трубок различны: сужающаяся конусообразная ($\varphi < 0$), цилиндрическая ($\varphi = 0$) и расширяющаяся конусообразная ($\varphi > 0$) [15].

Рассматривается модель жидкости Олдройда, уравнение состояния которой имеет вид [1]

$$S + \lambda_1 \left(\frac{dS}{dt} - LS - SL^T \right) = \mu \left(A + \lambda_2 \left(\frac{dA}{dt} - LA - AL^T \right) \right), \quad (2)$$

где S — девиатор напряжения; λ_1 — время релаксации; $\lambda_2 < \lambda_1$ — время запаздывания; μ — динамическая вязкость; $A = \nabla V + (\nabla V)^T$ — скорость тензора деформации; $V = (U, 0, W)$ — поле скорости; $L = \nabla V$.

Массовая сила электрического происхождения, отнесенная к единичному объему, определяется по формуле [17]

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right), \quad (3)$$

где \mathbf{E} — электрическое поле; ρ_e — плотность свободного заряда. Первый член — электростатическая объемная сила (кулоновская сила, сила свободного заряда ρ_e). В предположении, что пространственные заряды отсутствуют, член $\rho_e E$ исчезает. Второй член

$-E^2\nabla\varepsilon/2$ представляет собой диэлектрическую силу, зависящую от градиента ε . Последний член $\nabla(\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)E^2)/2$ — сила, обусловленная наличием электрострикции.

Полагая, что диэлектрическая постоянная является функцией температуры [16], имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0[1 - e(\theta - \theta_1)], \quad (4)$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума; e — коэффициент линейного расширения диэлектрической постоянной вследствие наличия градиента температуры, полагаемый малой положительной величиной.

Уравнение энергии запишем в виде [18]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = k\nabla^2 T,$$

где T — температура; $k = K/(\rho c_1)$ — температуропроводность; K — теплопроводность; c_1 — удельная теплоемкость.

Задача решается в квазистатическом приближении, что позволяет пренебречь внешним магнитным полем и магнитными эффектами. В предположении, что электростатическое поле является соленоидальным и свободные заряды отсутствуют, уравнения Максвелла принимают вид [19]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \end{aligned} \quad (5)$$

где ϕ — электрический потенциал.

Полагая, что плотность жидкости ρ является однородной, условие несжимаемости (уравнение неразрывности) запишем в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

уравнение движения — в виде

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{f}_e, \quad (6)$$

где p — давление.

Геометрия перистальтической поверхности стенки [4] описывается выражением

$$\eta = a \cos(2\pi/\lambda)(z - kt/R_1), \quad (7)$$

где a , λ — амплитуда и длина волны; kt/R_1 — скорость волны. Граничные условия [4, 11] имеют следующий вид:

$$r = R(z) + \eta: \quad U = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad W = 0, \quad T = \theta_2, \quad \phi = 0; \quad (8)$$

$$r = r_1: \quad U = 0, \quad W = V_0, \quad T = \theta_1, \quad \phi = \phi^*. \quad (9)$$

С учетом (3) уравнение движения (6) принимает вид:

— в проекции на ось r

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r} - \frac{E^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}; \quad (10)$$

— в проекции на ось z

$$\rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \frac{E^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (11)$$

($\Pi = p - \frac{1}{2} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right)$ — модифицированное давление).

С учетом уравнения неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

соотношение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} & S_{rr} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{rr}}{\partial t} + \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{rr} - 2 \frac{\partial U}{\partial r} S_{rr} - 2 \frac{\partial W}{\partial r} S_{rz} \right) = \\ & = \mu \left[2 \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda_2 \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial t} + 2 \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial r} - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - 2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r} - 2 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & S_{zz} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{zz}}{\partial t} + \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{zz} - 2 \frac{\partial U}{\partial z} S_{rz} - 2 \frac{\partial W}{\partial z} S_{zz} \right) = \\ & = \mu \left[2 \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda_2 \left(2 \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} + 2 \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r} - 4 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & S_{\theta\theta} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial t} + \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{\theta\theta} - 2 \frac{U}{r} S_{\theta\theta} \right) = \\ & = \mu \left[2 \frac{U}{r} + \lambda_2 \left(\frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial t} + 2 \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{U}{r} - 4 \frac{U^2}{r^2} \right) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & S_{rz} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{rz}}{\partial t} + \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{rz} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) S_{rz} - \frac{\partial W}{\partial r} S_{zz} - \frac{\partial U}{\partial z} S_{rr} \right) = \\ & = \mu \left[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} + \left(U \frac{\partial}{\partial r} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} - 3 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем функцию тока $\psi = \psi(r, z, t)$:

$$U = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (17)$$

С учетом (3), (5), (10), (17) имеем

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \\ & = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r} + \frac{\varepsilon_0 e}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial r}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) = \\ & = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \frac{\varepsilon_0 e}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & S_{rr} + \lambda_1 \left[\frac{\partial S_{rr}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{rr} - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) S_{rr} - \right. \\ & \left. - 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) S_{rz} \right] = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z \partial t} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big]; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} S_{zz} + \lambda_1 \left[\frac{\partial S_{zz}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{zz} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} S_{rz} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} S_{zz} \right] = \\ = \mu \left[-\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \lambda_2 \left(-\frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z \partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)^2 - \frac{4}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right)^2 \right) \right]; \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} + \lambda_1 \left(\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} S_{\theta\theta} \right) = \\ = \mu \left[\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \lambda_2 \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z \partial t} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{8}{r^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right) \right]; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{rz} + \lambda_1 \left[\frac{\partial S_{rz}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{rz} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} S_{rz} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) S_{zz} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} S_{rr} \right] = \mu \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) \right]; \quad (23) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad (24)$$

$$-\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \varepsilon_0 [1 - e(T - \theta_1)] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \varepsilon_0 [1 - e(T - \theta_1)] \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (25)$$

Граничные условия (8), (9) принимают вид

$$r = R(z) + \eta: \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2\pi a_0 k r}{\lambda R_1} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(z - \frac{k}{R_1} t \right), \quad T = \theta_2, \quad \phi = 0,$$

$$r = r_1: \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = V_0, \quad T = \theta_1, \quad \phi = \phi^*.$$

Ниже уравнения записываются в безразмерных переменных. В качестве характерной длины используется величина R_1 , характерного времени — R_1^2/k , характерной массы — величина M . Остальные безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{r} = \frac{r}{R_1}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R_1}, \quad \bar{U} = \frac{UR_1}{k}, \quad \bar{W} = \frac{WR_1}{k}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{R_1}, \quad \bar{t} = \frac{kt}{R_1^2}, \\ \bar{S} = \frac{SR_1^2}{\mu k}, \quad \bar{z}_0 = \frac{z_0}{R_1}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{kR_1}, \quad \bar{L} = \frac{L}{R_1}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R_1}, \quad \bar{d} = \frac{d}{R_1}, \\ \bar{R}(z) = \frac{R(z)}{R_1}, \quad \bar{p}^* = \frac{p^* R_1^2}{\rho k^2}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\beta R_1}, \quad \bar{\phi} = \frac{\phi}{E_0 R_1}, \quad \gamma = \frac{L_1}{L_2 \text{Re}}. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Re} = k\rho/\mu$ — число Рейнольдса; $L_1 = \varepsilon_0 E_0^2 R_1^2 (e\beta R_1)^2 / (\rho\nu k)$ — электрическое число Рэлея; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость; $\beta = e(\theta_1 - \theta_2) / \ln(R(z)/r_1)$ — градиент

температуры; $a_0 = a/R_1$; $E_0 = \phi^* \beta^* / [r_1 \ln(1 + L_2(\theta_1^* - \theta_2^*))]$ — среднее квадратичное значение электрического поля при $r = r_1$; волновое число $\alpha = 2\pi R_1 / \lambda$ характеризует величину сужения; $L_2 = e\beta R_1$; $\theta_1^* = \theta_1 / (\beta R_1)$; $\theta_2^* = \theta_2 / (\beta R_1)$; $\beta^* = L_2 \beta / e$. Черта, обозначающая безразмерные величины, далее опускается.

Безразмерный эффективный радиус внешней трубки $R(z)$ находим следующим образом:

$$R(z) = \begin{cases} 1 - m(z + L), & L < z < -z_0, \\ 1 - m(z + L) - (H/2)[1 + \cos(\pi z/z_0)], & -z_0 \leq z \leq z_0, \\ 1 - m(z + L), & z_0 < z < d. \end{cases} \quad (26)$$

Безразмерные уравнения (7), (18)–(25) запишем в следующем виде:

— в проекции на ось r

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \\ = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r} \right) + \frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial r}; \end{aligned} \quad (27)$$

— в проекции на ось z

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} = \\ = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right) + \frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} S_{rr} + \omega_1 \left[\frac{\partial S_{rr}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{rr} - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) S_{rr} - 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) S_{rz} \right] = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \omega_2 \left[-\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z \partial t} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right)^2 + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_{zz} + \omega_1 \left(\frac{\partial S_{zz}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{zz} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} S_{rz} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} S_{zz} \right) = \\ = -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \omega_2 \left[-\frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z \partial t} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)^2 - \frac{4}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} + \omega_1 \left(\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} S_{\theta\theta} \right) = \\ = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \omega_2 \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z \partial t} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{8}{r^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} S_{rz} + \omega_1 \left[\frac{\partial S_{rz}}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) S_{rz} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} S_{rz} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) S_{zz} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} S_{rr} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \omega_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}]; \quad (32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r[1 + \epsilon \theta_1 - L_2 T] \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r[1 + \epsilon \theta_1 - L_2 T] \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0, \quad (34)$$

где $\omega_1 = \lambda_1 k / R_1^2$, $\omega_2 = \lambda_2 k / R_1^2$ — числа Вейссенберга. Граничные условия имеют вид

$$r = R(z) + \eta: \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = a_0 \alpha r \sin \alpha(z - t), \quad T = \frac{\theta_2}{\beta R_1}, \quad \phi = 0; \quad (35)$$

$$r = r_1: \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{V_0 r R_1}{k}, \quad T = \frac{\theta_1}{\beta R_1}, \quad \phi = \frac{\phi^*}{E_0 R_1}; \quad (36)$$

$$\eta = a_0 \cos \alpha(z - t). \quad (37)$$

Система уравнений (27)–(34) является системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Приближенное решение системы (27)–(34) будем искать с использованием метода возмущений.

2. Приближенное решение. Для использования метода возмущений выберем амплитуду a_0 в качестве малого параметра и представим величины ψ , Π , T , ϕ , S в виде следующего ряда по этому малому параметру:

$$\xi = \xi_0 + a_0 \xi_1 + \dots, \quad (38)$$

где ξ_0 — невозмущенная величина; ξ_1 — первое возмущение.

Подставляя разложения искомых функций в систему уравнений (27)–(34), сохраняя коэффициенты с одинаковыми степенями a_0 , приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений в частных производных нулевого и первого порядков с соответствующими граничными условиями.

2.1. *Решение системы в нулевом приближении.* Предположим, что радиальная скорость U мала по сравнению с осевой W и изменение величин T_0 , ϕ_0 , S_0 в z -направлении значительно меньше, чем в радиальном. Тогда $U \ll W$, $\partial W / \partial z \ll \partial W / \partial r$, членами $\partial U / \partial r$, $\partial^2 U / \partial r^2$, $\partial^2 U / \partial z^2$ можно пренебречь [6] и функции ψ_0 , T_0 , ϕ_0 , S_0 зависят только от r . Решение в нулевом приближении соответствует начальному состоянию, когда перистальтическая волна отсутствует. Исключая давление из выражений (27), (28), получаем

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) \right) \right) = 0; \quad (39)$$

$$S_{0rr} + \omega_1 \left(-2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) S_{0rz} \right) =$$

$$= \omega_2 \left(-\frac{2}{r^4} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right); \quad (40)$$

$$S_{0zz} = 0, \quad S_{0\theta\theta} = 0; \quad (41)$$

$$S_{0rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right); \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0}{\partial r} = 0; \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r[1 + e\theta_1 - L_2 T_0] \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) = 0. \quad (44)$$

С использованием разложения в ряд Тейлора граничные условия представим в виде

$$r = R(z): \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0, \quad T_0 = \frac{\theta_2}{\beta R_1}, \quad \phi_0 = 0; \quad (45)$$

$$r = r_1: \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = \frac{-V_0 r R_1}{k}, \quad T_0 = \frac{\theta_1}{\beta R_1}, \quad \phi_0 = \frac{\phi^*}{E_0 R_1}. \quad (46)$$

В случае свободной перекачки и стационарного течения решение уравнений (39)–(44) с учетом граничных условий (45), (46) принимает вид

$$\psi_0(r, z) = -\operatorname{Re} \left(\frac{c_1}{16} r^4 + \frac{c_2}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) r^2 + c_5(z) r^2 + \frac{c_3}{2} r^2 + c_4 \right); \quad (47)$$

$$S_{0rz}(r, z) = \operatorname{Re} \left(\frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \right), \quad S_{0rr}(r, z) = 2 \operatorname{Re}^2(\omega_1 - \omega_2) \left(\frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \right)^2,$$

$$T_0(r, z) = c_5 \ln r + c_6, \quad \phi_0(r, z) = \frac{c_7}{\beta^*} \ln \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) + c_8.$$

Выражения для постоянных c_1, c_2, \dots, c_8 не приводятся в силу их громоздкости.

В частном случае, когда в уравнениях (26), (47) $r_1 = 0$, $V_0 = 0$, $m = 0$, $h = 0$, $c_2 = c_4 = 0$, $T = 0$, $\phi = 0$, $c_3 = c_1/4$, выражение для ψ_0 принимает вид

$$\psi_0(r, z) = \frac{\operatorname{Re}}{8} \frac{dp_0}{dz} \left(r^2 - \frac{r^4}{2} \right),$$

что согласуется с решением [4].

2.2. *Решение системы в первом приближении.* С учетом граничных условий (35), (36) уравнения (27)–(34) в первом приближении записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial r} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{1rr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{1rz}}{\partial z} - \frac{S_{1\theta\theta}}{r} \right) + \\ + \frac{\gamma}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} + 2 \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right); \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial r} = \\ = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{1rz})}{\partial r} + \frac{\partial S_{1zz}}{\partial z} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial T_1}{\partial z}; \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1rr} + \omega_1 \left[\frac{\partial S_{1rr}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial S_{0rr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial S_{1rr}}{\partial z} - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) S_{0rr} - \right. \\ \left. - 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) S_{1rz} - 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) S_{0rz} \right] = \\ = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + \omega_2 \left[-\frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial z \partial t} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - \frac{4}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{4}{r^3} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) \right]; \quad (50) \end{aligned}$$

$$S_{1zz} + \omega_1 \left(\frac{\partial S_{1zz}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial S_{1zz}}{\partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} S_{0rz} \right) = -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} +$$

$$+ \omega_2 \left(-\frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r \partial z \partial t} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \right); \quad (51)$$

$$S_{1\theta\theta} + \omega_1 \left(\frac{\partial S_{1\theta\theta}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial S_{1\theta\theta}}{\partial z} \right) = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \omega_2 \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z \partial t} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right); \quad (52)$$

$$S_{1rz} + \omega_1 \left[\frac{\partial S_{1rz}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial S_{0rz}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial S_{1rz}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} S_{0rz} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) S_{1zz} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} S_{0rr} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \omega_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} \right]; \quad (53)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}; \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[(1 + e\theta_1) \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - L_2 T_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - L_2 T_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right] \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \left[(1 + e\theta_1) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - L_2 T_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right] \right) = 0. \quad (55)$$

Из (35), (36) получаем для искомых функций граничные условия в первом приближении:

$$r = R(z): \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = -\cos \alpha(z-t) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \alpha r \sin \alpha(z-t),$$

$$T_1 = -\cos \alpha(z-t) \frac{\partial T_0}{\partial r}, \quad \phi_1 = -\cos \alpha(z-t) \frac{\partial \phi_0}{\partial r},$$

$$r = r_1: \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \quad T_1 = 0, \quad \phi_1 = 0.$$

Решения для величин ψ_1 , S_1 , T_1 , ϕ_1 можно получить с использованием метода нормальных мод [4]:

$$\psi_1 = F_1(r) \exp[i\alpha(z-t)] + \text{к.с.}, \quad S_1 = \tau_1(r) \exp[i\alpha(z-t)] + \text{к.с.}, \\ T_1 = G_1(r) \exp[i\alpha(z-t)] + \text{к.с.}, \quad \phi_1 = E_1(r) \exp[i\alpha(z-t)] + \text{к.с.} \quad (56)$$

(к.с. — комплексно-сопряженное выражение предыдущего слагаемого).

Подставляя (56) в (48)–(55), получаем систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(-\frac{i\alpha}{r} + i\alpha \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r}{4} + \frac{c_2 \ln r}{r} + \frac{c_3}{r} \right) \right) \left(\frac{d^2 F_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} - \alpha^2 F_1 \right) + \frac{2i \operatorname{Re} c_2 \alpha}{r^3} F_1 = \\ = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(-\frac{d^2 \tau_{1rz}}{dr^2} + i\alpha \frac{d\tau_{1rr}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\tau_{1rz}}{dr} - i\alpha \frac{d\tau_{1zz}}{dr} + \frac{i\alpha}{r} \tau_{1rr} + \left(\frac{1}{r^2} - \alpha^2 \right) \tau_{1rz} - \frac{i\alpha}{r} \tau_{1\theta\theta} \right) + \\ + \frac{i\alpha \gamma c_7}{r^2} \left(\frac{c_5}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)} \frac{dE_1}{dr} + \frac{c_7(c_9 + \beta^* \ln(r/r_1))}{r(1 + \beta^* \ln(r/r_1))^3} G_1 \right); \quad (57)$$

$$\left(1 + i\alpha \omega_1 \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \right) \tau_{1rr} +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2i\alpha \operatorname{Re}^2 \omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \left(- \left(\frac{c_1^2 r}{2} + \frac{2c_2^2}{r^3} + \frac{2c_1 c_2}{r} \right) \frac{dF_1}{dr} + \left(c_1^2 + \frac{2c_1 c_2}{r^2} \right) F_1 \right) - \\
 & \quad - \operatorname{Re} \omega_1 \left(\frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r} \right) \left(- \frac{1}{r} \frac{d^2 F_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dF_1}{dr} + \tau_{1rz} \right) = \\
 & = 2i\alpha \left(\frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} - \frac{1}{r^2} F_1 \right) + 2\alpha^2 \omega_2 \left(\frac{1}{r} \left(1 - \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \frac{dF_1}{dr} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r^2} \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{3c_1 r^2}{4} + c_2 (\ln r + 1) + c_3 \right) \right) F_1 \right) + 2 \operatorname{Re} \omega_2 \left(c_1 + \frac{2c_2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 F_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} \right); \quad (58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + i\alpha \omega_1 \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \right) \tau_{1zz} - 2 \operatorname{Re} \alpha^2 (\omega_1 - \omega_2) \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2} \right) F_1 = \\
 & = \frac{2}{r} \left(-i\alpha + \alpha^2 \omega_2 \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \right) \frac{dF_1}{dr}; \quad (59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + i\alpha \omega_1 \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \right) \tau_{1\theta\theta} = \\
 & = \frac{2}{r^2} \left(-i\alpha + \alpha^2 \omega_2 \left(1 - \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \right) F_1; \quad (60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + i\alpha \omega_1 \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \right) \tau_{1rz} - \operatorname{Re} \omega_1 \left(\frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r} \right) \tau_{1zz} + \\
 & \quad + 2 \operatorname{Re} \omega_1 \left(-\frac{i\alpha c_2}{r^3} + \operatorname{Re} \alpha^2 (\omega_1 - \omega_2) \left(\frac{c_1^2 r}{4} + \frac{c_2^2}{r^3} + \frac{c_1 c_2}{r} \right) \right) F_1 = \\
 & = \frac{1}{r} (1 - \omega_2 i\alpha) \left(-\frac{d^2 F_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} - \alpha^2 F_1 \right) + i\alpha \operatorname{Re} \omega_2 \left(\frac{5c_1}{4} - \frac{c_2}{r} \ln r + \frac{c_3}{r} + \frac{2}{r^2} (c_2 + c_3) \right) \frac{dF_1}{dr} + \\
 & \quad + i\alpha \operatorname{Re} \omega_2 \left(c_1 F_1 - \left(\alpha^2 F_1 + \frac{d^2 F_1}{dr^2} \right) \left(\frac{c_1 r}{4} + \frac{c_2}{r} \ln r + \frac{c_3}{r} \right) \right); \quad (61)
 \end{aligned}$$

$$i\alpha \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) G_1 + \frac{i\alpha c_5}{r^2} F_1 = \frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1}{dr} - \alpha^2 G_1; \quad (62)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) \frac{dE_1}{dr} - \frac{c_7 L_2}{1 + \beta^* \ln (r/r_1) G_1} \right) - \alpha^2 \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) E_1 = 0 \quad (63)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned}
 r = R(z): \quad \frac{dF_1}{dr} &= \frac{\operatorname{Re}}{2} \left(\frac{3c_1 r^2}{4} + c_2 (\ln r + 1) + c_3 \right), \quad F_1 = -\frac{r}{2}, \quad G_1 = -\frac{c_5}{r}, \\
 E_1 &= -\frac{c_7}{r(1 + \beta^* \ln (r/r_1))}; \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$r = r_1: \quad \frac{dF_1}{dr} = 0, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad E_1 = 0. \quad (65)$$

Уравнения (57)–(63) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Найти их решение в замкнутой форме при произвольных значениях параметров невозможно. В случае неньютонских жидкостей требуемые решения находятся с использованием метода возмущений [3]. При этом полагается, что в уравнениях содержится один или два малых параметра. В соответствии с [21] рассматривается длинноволновое приближение при условии, что волновое число α мало. Искомые

величины, характеризующие течение жидкости, можно разложить в степенной ряд по малому параметру α следующим образом:

$$\chi_1(r) = \chi_{10}(r) + \alpha\chi_{11}(r) + \dots \quad (66)$$

Подставляя разложение (66) в (57)–(63) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях α , можно получить уравнения в нулевом и первом приближениях по параметру α .

В нулевом приближении уравнения (57)–(63) с использованием (64), (65) записываются в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2\tau_{10rz}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{10rz}}{dr} - \frac{1}{r^2} \tau_{10rz} \right) &= 0, \\ \tau_{10rr} - 2 \text{Re} \omega_1 \left(\frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2 F_{10}}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dF_{10}}{dr} + \tau_{10rz} \right) &= 2 \text{Re} \omega_2 \left(c_1 + \frac{2c_2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 F_{10}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF_{10}}{dr} \right), \\ \tau_{10zz} = 0, \quad \tau_{10\theta\theta} = 0, \quad \tau_{10rz} &= \frac{1}{r} \left(-\frac{d^2 F_{10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_{10}}{dr} \right), \\ \frac{d^2 G_{10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{10}}{dr} &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left(r \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) \frac{dE_{10}}{dr} - \frac{c_7 L_2}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)} G_{10} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} r = R(z): \quad \frac{dF_{10}}{dr} &= \frac{\text{Re}}{2} \left(\frac{3c_1 r^2}{4} + c_2(\ln r + 1) + c_3 \right), \quad F_{10} = -\frac{r}{2}, \quad G_{10} = -\frac{c_5}{r}, \\ E_{10} &= -\frac{c_7}{r(1 + \beta^* \ln(r/r_1))}, \\ r = r_1: \quad \frac{dF_{10}}{dr} &= 0, \quad F_{10} = 0, \quad G_{10} = 0, \quad E_{10} = 0. \end{aligned}$$

Решение системы в нулевом приближении по параметру α имеет вид

$$\begin{aligned} F_{10}(r, z) &= -\frac{c_{10}}{8} r^4 - \left(\frac{c_{11}}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{c_{12}}{2} \right) r^2 + c_{13}, \\ \tau_{10zr}(r, z) &= c_{10} r + \frac{c_{11}}{r}, \quad \tau_{10zz} = 0, \quad \tau_{10\theta\theta} = 0, \\ \tau_{10rr}(r, z) &= 2 \text{Re}(\omega_1 - \omega_2) \left(\frac{c_1 r}{2} + \frac{2c_2}{r} \right) \left(c_{10} r + \frac{c_{11}}{r} \right), \quad G_{10} = c_{15} \ln r + c_{16}, \\ E_{10} &= \frac{c_{18}}{\beta^*} \ln \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) - c_{19} \left(\frac{1}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)} + \ln \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

(константы c_i , $i = 9, 10, \dots, 19$ не приводятся в силу их громоздкости).

В первом приближении уравнения (57)–(63) с использованием (64), (65) можно записать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 \tau_{11rz}}{dr^2} + r \frac{d\tau_{11rz}}{dr} - \tau_{11rz} &= i \left(c_{20} r^5 + c_{21} r^3 + c_{22} r + \frac{c_{23}}{r} + \right. \\ &\left. + c_{24} r^3 \ln r + c_{25} r \ln r + \frac{c_{26}}{r(1 + \beta^* \ln(r/r_1))^2} + \frac{c_{27} \ln(r/r_1)}{r(1 + \beta^* \ln(r/r_1))^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dF_{11}}{dr} \right) &= i \left[-\frac{7}{48} c_{20} r^7 - c_{30} r^5 + c_{34} r^4 + c_{35} r^3 + c_{36} r^2 + (c_{37} - c_{28}) r + c_{42} + \right. \\ &+ \frac{c_{40}}{r} + \frac{c_{41}}{r^3} + \left(-\frac{5c_{24}}{4} r^5 - \frac{3c_{25}}{8} r^3 + c_{38} r^2 + c_{39} r + \frac{c_{43}}{r} \right) \ln r + \frac{c_{44} (\ln r)^2}{r} - \\ &\left. - \frac{c_{27}}{\beta^*} r \ln \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) - \frac{c_{32} r}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)} - \frac{c_{33}}{r} \operatorname{Ei} \left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1} \right) \right], \\ \tau_{11rr} &= -i\omega_1 \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) \tau_{10rr} - \\ &- 2i \operatorname{Re}^2 \omega_1 (\omega_1 - \omega_2) \left(-\left(\frac{c_1^2 r}{2} + \frac{2c_2^2}{r^3} + \frac{2c_1 c_2}{r} \right) \frac{dF_{10}}{dr} + \left(c_1^2 + \frac{2c_1 c_2}{r^2} \right) F_{10} \right) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \omega_1 \left(\frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r} \right) \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2 F_{11}}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dF_{11}}{dr} + \tau_{11rz} \right) + 2i \left(\frac{1}{r} \frac{dF_{10}}{dr} - \frac{1}{r^2} F_{10} \right) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \omega_2 \left(c_1 + \frac{2c_2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 F_{11}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF_{11}}{dr} \right), \\ \tau_{11zz} &= \frac{2i}{r} \frac{dF_{10}}{dr}, \quad \tau_{11\theta\theta} = \frac{2i}{r^2} F_{10}, \\ \left(-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{c_1 r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3 \right) \right) G_{10} + \frac{c_5}{r^2} F_{10} &= \frac{d^2 G_{11}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{11}}{dr}, \\ \frac{d}{dr} \left(r \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) \frac{dE_{11}}{dr} - \frac{c_7 L_2}{1 + \beta^* \ln(r/r_1) G_{11}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

(Ei(x) — интегральная показательная функция [20]) с граничными условиями

$$\begin{aligned} r = R(z): \quad \frac{dF_{11}}{dr} &= 0, \quad F_{11} = 0, \quad G_{11} = 0, \quad E_{11} = 0, \\ r = r_1: \quad \frac{dF_{11}}{dr} &= 0, \quad F_{11} = 0, \quad G_{11} = 0, \quad E_{11} = 0. \end{aligned}$$

Решение системы в первом приближении по параметру α с соответствующими граничными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} F_{11} &= i \left[-\frac{7c_{20}}{3840} r^{10} + c_{52} r^8 + \frac{c_{34}}{35} r^7 + c_{53} r^6 + c_{54} r^5 + \left(c_{55} - \frac{c_{28}}{8} \right) r^4 + \frac{c_{42}}{3} r^3 + \left(\frac{c_{45}}{2} + c_{56} + \frac{c_{29}}{4} \right) r^2 + \right. \\ &+ c_{51} + \left(-\frac{5c_{24}}{192} r^8 - \frac{c_{25}}{64} r^6 + \frac{c_{38}}{15} r^5 - \frac{c_{39}}{8} r^4 + \left(c_{57} - \frac{c_{29}}{2} \right) r^2 - \frac{c_{41}}{2} \right) \ln r + \\ &+ c_{58} r^2 (\ln r)^2 + \frac{c_{44}}{6} r^2 (\ln r)^3 + c_{59} r^2 \operatorname{Ei} \left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1} \right) + c_{60} \operatorname{Ei} \left(\frac{4}{\beta^*} + 4 \ln \frac{r}{r_1} \right) - \\ &- \frac{c_{33}}{2\beta^*} r^2 \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) \operatorname{Ei} \left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1} \right) - \frac{c_{27}}{8\beta^{*2}} r^4 \ln \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) + \\ &\left. + \frac{c_{33}}{4} \exp \left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1} \right) \right], \\ \tau_{11rz} &= i \left[\frac{7c_{20}}{48} r^7 + c_{30} r^5 + c_{31} r^3 + \left(c_{28} + \frac{c_{23}}{4} \right) r + \frac{c_{29}}{r} + \left(\frac{5c_{24}}{24} r^5 + \frac{3c_{25}}{8} r^3 + \frac{c_{23}}{2} r \right) \ln r + \right. \\ &\left. + c_{32} \frac{r}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)} + \frac{c_{27}}{\beta^{*2}} r \ln \left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1} \right) + \frac{c_{33}}{r} \operatorname{Ei} \left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{11zz} &= i(c_{10}r^2 + 2c_{11} \ln r - 2c_{12}), \\ \tau_{11\theta\theta} &= i\left(-\frac{c_{10}}{4}r^2 - c_{11}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right) + c_{12} + \frac{2c_{13}}{r^2}\right), \\ \tau_{rr11} &= i\left[9c_{63}r^8 + c_{64}r^6 + c_{65}r^5 + c_{66}r^4 + c_{67}r^3 + c_{68}r^2 + c_{69}r + c_{70} + \frac{c_{71}}{r^4} + \frac{c_{72}}{r^2} + \frac{c_{73}}{r} + \right. \\ &\quad \left. + \left(c_{74}r^6 + c_{75}r^4 + c_{76}r^3 + c_{77}r^2 + c_{78}r + c_{79} + \frac{c_{80}}{r^2}\right) \ln r + \left(c_{81} + \frac{c_{82}}{r^2}\right)(\ln r)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(c_{85} + \frac{c_{88}}{r^2}\right) \text{Ei}\left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1}\right) + (c_{84}r^2 + c_{87}) \ln\left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1}\right) + \frac{c_{83}r^2 + c_{86}}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)}\right] - c_{10}\left(\frac{r^3}{4} + r^2\right), \\ G_{11} &= (c_{91}r^4 + c_{92}r^2) \ln \frac{r}{r_1} + (c_{93}r^2 + c_{89}) \ln r + c_{94}(\ln r)^2 + c_{95}r^2 \ln r \ln(r/r_1) + c_{96}r^4 + c_{97}r^2 + c_{90}, \\ E_{11} &= c_{99} + \left(\frac{c_{98}}{\beta^*} + c_{106}\right)\left(1 + \beta^* \ln \frac{r}{r_1}\right) + c_{100} \text{Ei}\left(\frac{4}{\beta^*} + 4 \ln \frac{r}{r_1}\right) + c_{101} \text{Ei}\left(\frac{2}{\beta^*} + 2 \ln \frac{r}{r_1}\right) + \\ &\quad + \frac{c_{102}r^4 + c_{103}r^2 + c_{104}}{1 + \beta^* \ln(r/r_1)} + c_{107}r^2, \end{aligned}$$

где c_i ($i = 20, 21, \dots, 107$) — постоянные.

Выражение для расхода жидкости Q представим в виде

$$Q = \int_{r_1}^{R(z)} 2\pi W r dr,$$

где $W = W_0 + a_0 W_1$.

Уменьшение давления при прохождении стенозного участка находится по формуле

$$\Delta\Pi = \int_0^L \left(-\frac{d\Pi}{dz}\right) dz,$$

импеданс сопротивления — из соотношения

$$\bar{\lambda} = \frac{\Delta\Pi}{Q}.$$

В случае когда в уравнениях (26), (47) $r_1 = 0$, $V_0 = 0$, $T = 0$, $\phi = 0$, получаем

$$\begin{aligned} W(r, z) &= \frac{\text{Re } dp_0}{4} \frac{dz}{dz} (R(z)^2 - r^2), \\ \bar{\lambda} &= \frac{8}{3m\pi \text{Re}} \left[\frac{1}{(R_1 - m(d_0 + L))^3} + \frac{1}{(R_1 - mL)^3} + \frac{1}{(R_1 - H - m(d_0 + L_0 + L))^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(R_1 - H - m(d_0 + L))^3} - \frac{1}{(R_1 - m(d_0 + L_0 + L))^3} + \frac{1}{(R_1 - 2m + L)^3} \right], \end{aligned}$$

что согласуется с результатами работы [6].

Решение в нулевом приближении совпадает с решением для ньютоновской жидкости [4]. От чисел Вейссенберга зависит только величина S_{0rr} . Для того чтобы учесть влияние вязкости на перистальтические волны, получено решение в первом приближении, которое существенно зависит от чисел Вейссенберга.

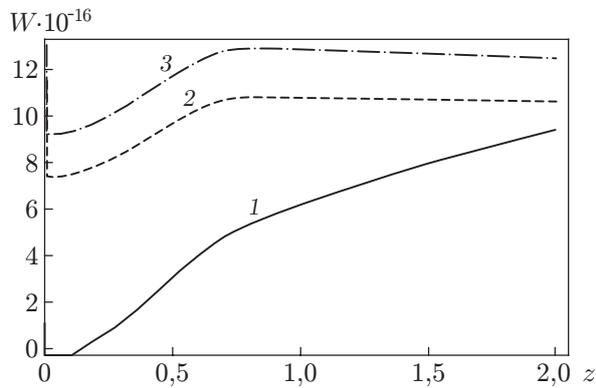


Рис. 2

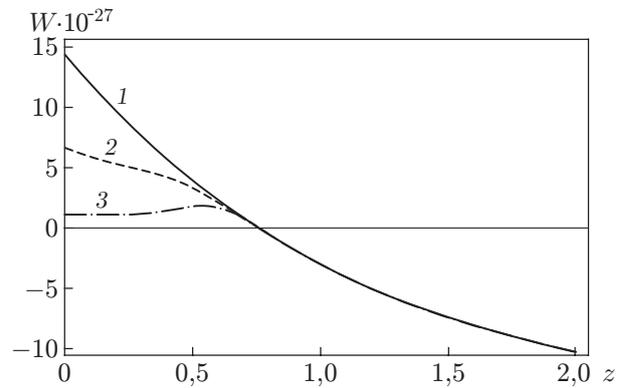


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость осевой скорости W от координаты z при $t = 1$, $L = 2$, $b = 0,01$, $L_0 = 0,8$, $c_1 = 4$, $r_1 = 0,2$, $R_1 = 2$, $V_0 = 1$, $k = 0,000\,01$, $a_0 = 0,01$, $e = 0,01$, $\phi_1^* = 60$, $\varphi = 0,05$, $\omega_1 = 0,09$, $\omega_2 = 0,003$, $L_1 = 1,9040 \cdot 10^3$, $\alpha = 0,1$, $h = 0,1$, $Re = 10$ и различных значениях β :

1 — $\beta = 10$, 2 — $\beta = 15$, 3 — $\beta = 20$

Рис. 3. Зависимость осевой скорости W от координаты z при $t = 1$, $L = 2$, $b = 0,01$, $L_0 = 0,7$, $c_1 = 4$, $r_1 = 1,5$, $R_1 = 2$, $V_0 = 1$, $k = 0,001$, $a_0 = 0,01$, $e = 0,01$, $\phi_1^* = 60$, $\varphi = 0,05$, $\omega_1 = 0,09$, $\omega_2 = 0,003$, $L_1 = 1,9040 \cdot 10^3$, $\beta = 5$, $\alpha = 0,1$, $Re = 10$ и различных значениях h :

1 — $h = 0$, 2 — $h = 0,1$, 3 — $h = 0,5$

3. Обсуждение результатов. Рассмотрим результаты численных расчетов.

3.1. *Характеристики перекачки.* Влияние различных параметров на распределения осевой скорости W , температуры T , электрического потенциала ϕ и напряжения на стенке S_{rz} исследовалось с использованием математического программного обеспечения. Результаты этого исследования приведены на рис. 2–10.

На рис. 2, 3 показано распределение осевой скорости W вдоль оси z при различных значениях градиента температуры β и максимальной величины сужения h . Видно, что осевая скорость увеличивается при увеличении параметра β . Это обусловлено уменьшением вязкости при увеличении температуры, вследствие чего скорость увеличивается. Когда максимальная величина сужения h находится в области $0,01 \leq z \leq 0,71$, осевая скорость уменьшается с увеличением h . Вне данной области кривые скорости W совпадают. Также установлено, что при отсутствии стеноза ($h = 0$) значения осевой скорости больше, чем при его наличии. Поэтому при сгущении крови образовавшийся сгусток ограничивает течение крови по артерии, что приводит к неблагоприятным последствиям [7]. При большой длине волны число Рейнольдса мало [3]. Результаты численных расчетов свидетельствуют о том, что при увеличении Re осевая скорость увеличивается. На рис. 2, 3 видно, что число Рейнольдса увеличивается при уменьшении как вязкости, так и сопротивления.

На рис. 4 приведена зависимость осевой скорости W от радиуса r при различных значениях угла конусности φ , на рис. 5 — зависимость осевой скорости W от координаты z при различных значениях числа Вейссенберга ω_1 . Согласно [6] наличие стенозного сужения оказывает влияние на работу артериальной системы. В настоящей работе установлено, что при $\varphi = -0,05$ значения осевой скорости больше, чем при $\varphi = 0$ и $\varphi = 0,05$. Также установлено, что осевая скорость уменьшается при увеличении числа Вейссенберга ω_1 . Это очевидно в случае ньютоновской жидкости ($\omega_1 = \omega_2 = 0$), когда значения осевой скорости больше, чем в случае жидкости Олдройда.

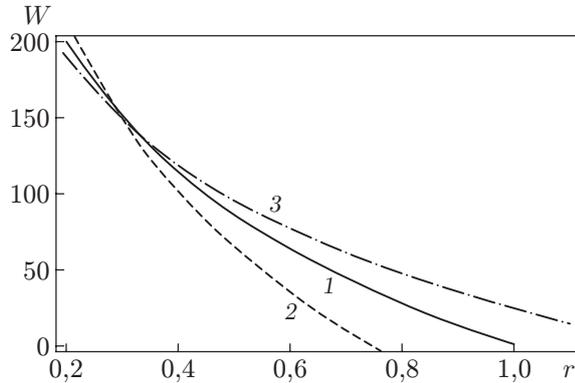


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость осевой скорости W от координаты r при $t = 1$, $L = 2$, $b = 0,01$, $L_0 = 0,8$, $c_1 = 0,1$, $r_1 = 0,2$, $R_1 = 2$, $V_0 = 1$, $k = 0,01$, $a_0 = 0,001$, $e = 0,01$, $\phi_1^* = 0,1$, $\alpha = 0,01$, $\omega_1 = 0,09$, $\omega_2 = 0,003$, $L_1 = 1,9040 \cdot 10^3$, $\beta = 5$, $h = 0,1$, $Re = 10$ и различных значениях φ :

1 — $\varphi = 0$, 2 — $\varphi = 0,05$, 3 — $\varphi = -0,05$

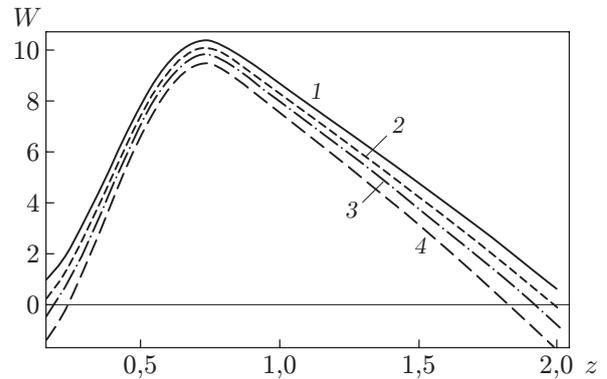


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость осевой скорости W от координаты z при $t = 1$, $L = 2$, $b = 0,01$, $L_0 = 0,8$, $c_1 = 4$, $r_1 = 0,2$, $R_1 = 2$, $V_0 = 1$, $k = 0,01$, $a_0 = 0,01$, $e = 0,01$, $\phi_1^* = 0,1$, $\alpha = 0,001$, $L_1 = 1,9040 \cdot 10^3$, $\beta = 5$, $h = 0,1$, $Re = 0,2$, $\omega_2 = 0,01$ и различных значениях ω_1 :

1 — $\omega_1 = \omega_2 = 0$, 2 — $\omega_1 = 0,05$, 3 — $\omega_1 = 0,07$, 4 — $\omega_1 = 0,09$

Зависимость осевой скорости от координаты z для частного случая, когда $\varphi = 0$, $h = 0$, $\beta \rightarrow 0$, $L_1 = 0$, $r_1 = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, приведена на рис. 6.

Распределение температуры T вдоль оси r при различных значениях угла конусности φ показано на рис. 7. Видно, что в сужающемся конусе ($\varphi = -0,05$) значения температуры больше, чем в цилиндрической ($\varphi = 0$) и расширяющейся конусообразной ($\varphi = 0,05$) трубках.

На рис. 8 показано распределение электрического потенциала ϕ вдоль оси z при различных значениях волнового числа. Использовалось электрическое поле переменного тока, так как оно создает дипольные заряды, способствующие сохранению формы перистальтических волн. На рис. 8 видно, что электрический потенциал увеличивается при увеличении волнового числа α .

Зависимость импеданса λ от величины сужения H для частного случая, когда $\alpha = 0$, $a_0 = 0$, $\beta \rightarrow 0$, $L_1 = 0$, $r_1 = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, показана на рис. 9. Видно, что при течении ньютоновской жидкости по конусообразной артерии при наличии легкого стеноза значение импеданса меньше, чем при течении жидкости Олдройда по коаксиальной конусообразной трубке при наличии перистальтического течения и легкой формы стеноза.

3.2. Характеристики захвата. Помимо явления накачки при перистальтическом движении может возникать захват. Изучению данного явления посвящено большое количество работ (см., например, [3, 21]). В случае когда стенки стационарны, можно предположить, что форма линий тока подобна форме стенок. В случае когда стенки волнообразны, при определенных условиях некоторые линии тока могут стать замкнутыми и захватывать частицы жидкости. Объем жидкости, ограниченный замкнутыми линиями тока, называется болюсом. Этот захваченный вращающийся внутри замкнутых линий тока болюс движется со скоростью перистальтической волны.

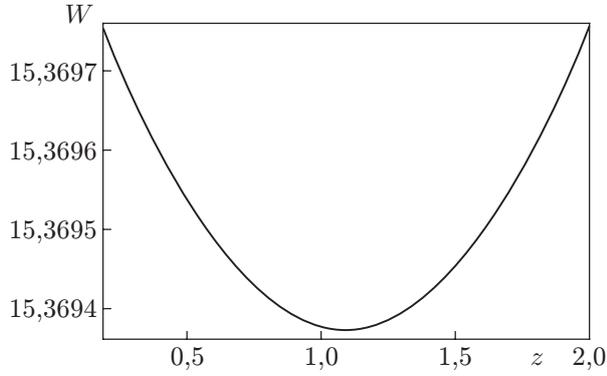


Рис. 6

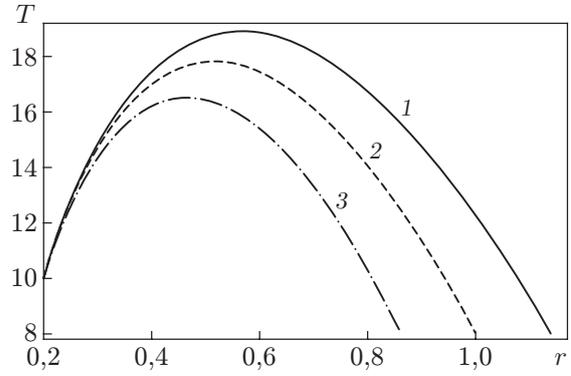


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость осевой скорости W от координаты z при $t = 1, L = 2, b = 0,01, L_0 = 0,8, c_1 = 4, r_1 \rightarrow 0, L_2 = e\beta R_1 \rightarrow 0, R_1 = 2, V_0 = \phi = \omega_1 = \omega_2 = h = L_1 = \phi_1^* = 0, k = 0,000\,0001, a_0 = 0,0001, \alpha = 0,5, Re = 10$

Рис. 7. Зависимость температуры T от координаты r при $t = 1, L = 2, b = 0,01, L_0 = 0,8, c_1 = 4, r_1 = 0,2, R_1 = 2, V_0 = 1, k = 0,01, a_0 = 0,4, e = 0,01, \phi_1^* = 60, \alpha = 0,8, \omega_1 = 0,9, \omega_2 = 0,2, L_1 = 1,9040 \cdot 10^3, \theta_1^* = 10, \beta = 0,01, h = 0,1, Re = 10$ и различных значениях угла конусности φ :

1 — $\varphi = -0,05, 2 — \varphi = 0, 3 — \varphi = 0,05$

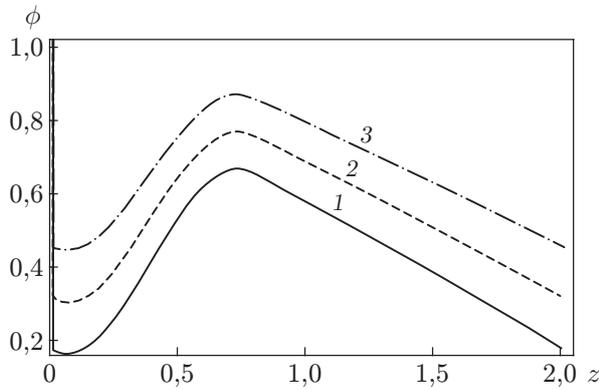


Рис. 8

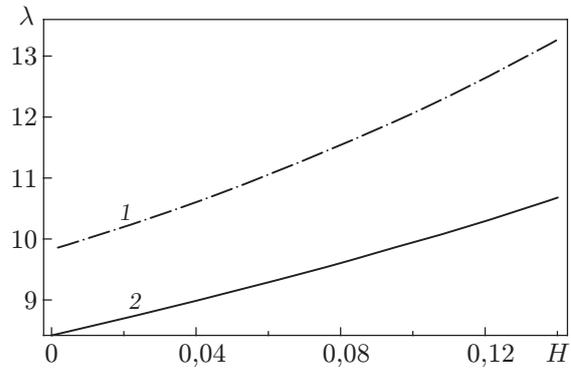


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость электрического потенциала ϕ от координаты z при $t = 1, L = 2, b = 0,01, L_0 = 0,8, c_1 = 0,4, r_1 = 0,2, R_1 = 2, V_0 = 1, k = 0,0001, a_0 = 0,01, e = 0,1, \phi_1^* = 60, \theta_1^* = 10, \varphi = 0,05, \omega_1 = 0,09, \omega_2 = 0,002, L_1 = 1,9040 \cdot 10^3, Re = 2, \beta = 10, h = 0,1$ и различных значениях волнового числа α :

1 — $\alpha = 10^{-5}, 2 — \alpha = 15 \cdot 10^{-5}, 3 — \alpha = 20 \cdot 10^{-5}$

Рис. 9. Зависимость импеданса λ от величины сужения H при $t = 1, L = 2, b = 0,01, L_0 = 0,8, c_1 = 4, r_1 \rightarrow 0, L_2 = e\beta R_1 \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0, R_1 = 2, V_0 = \omega_1 = \omega_2 = a_0 = L_1 = \phi_1^* = 0, k = 0,000\,0001, h = 0,1, Re = 10$:

1 — данные настоящей работы, 2 — данные работы [6]

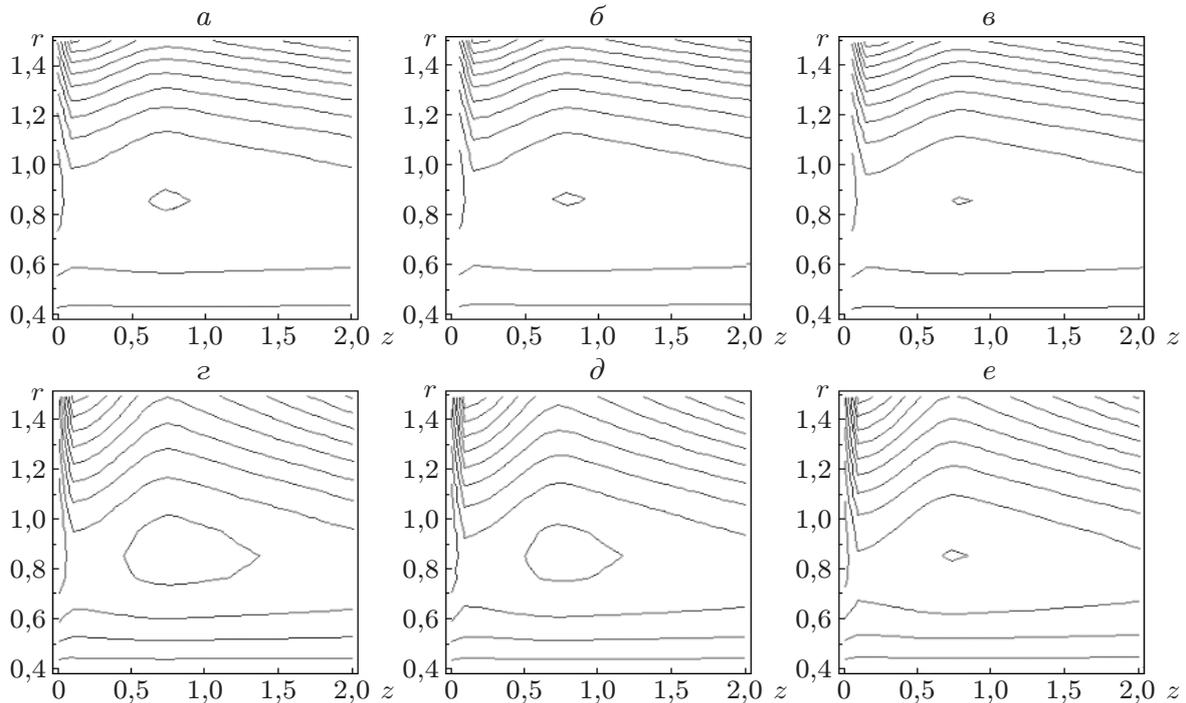


Рис. 10. Линии тока при $t = 1$, $L = 2$, $b = 0,01$, $L_0 = 0,8$, $c_1 = -0,0011$, $r_1 = 0,2$, $R_1 = 2$, $V_0 = 1$, $k = 0,01$, $a_0 = 0,000\,01$, $h = 0,1$, $e = 0,01$, $\phi_1^* = 0,1$, $L_1 = 1500$, $\omega_1 = 0,04$, $\omega_2 = 0,003$, $Re = 100$, $\varphi = 0,05$ и различных значениях α (а-в) и β (г-е): а-в — $\beta = 5$ (а — $\alpha = 0,01$, б — $\alpha = 0,15$, в — $\alpha = 0,02$), г-е — $\alpha = 0,01$ (г — $\beta = 1,00$, д — $\beta = 0,85$, е — $\beta = 0,80$)

На рис. 10 показаны линии тока при различных значениях волнового числа α и градиента температуры β . Видно, что захваченный болюс уменьшается при увеличении волнового числа α и увеличивается с увеличением β .

Заключение. С использованием теоретического метода проведено исследование воздействия вертикального электрического поля переменного тока и теплообмена на перистальтическое течение диэлектрической вязкоупругой жидкости Олдройда через цилиндрический и конусообразный кольцевые каналы. Внутренняя цилиндрическая твердая трубка движется с постоянной скоростью V_0 , внешняя трубка является конусообразной с умеренным стенозом, по ее стенке перемещается вниз синусоидальная волна. Система уравнений движения, являющаяся системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, решена методом возмущений, с помощью которого получены разложения по амплитудному отношению и волновому числу до первого порядка. Определено влияние электрического числа Рэлея, градиента температуры, числа Рейнольдса, волнового числа, максимальной величины сужения, угла конусности, числа Вейссенберга и амплитудного отношения на осевую скорость, температуру, электрический потенциал и распределения напряжений сдвига на стенке.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Oldroyd J. G.** Non Newtonian effects in steady motion of some idealised elastico-viscous liquids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. P. 278–297.
2. **Latham T. W.** Fluid motion in a peristaltic pump: MS thesis. Cambridge: Massachusetts Inst. of Technol., 1966.

3. **Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L.** Peristaltic pumping with long wave lengths at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1969. V. 37. P. 799–825.
4. **Fung Y. C., Yin F.** Peristaltic waves in circular cylindrical tubes // J. Appl. Mech. 1969. V. 36. P. 579–587.
5. **Chakravarty S., Datta A., Mandal P. K.** Analysis of nonlinear blood flow in a stenosed flexible artery // Intern. J. Engng Sci. 1995. V. 33. P. 1821–1837.
6. **Verma N., Parihar R. S.** Mathematical model of blood flow through a tapered artery with mild stenosis and hematocrit // J. Modern Math. Statistics. 2010. V. 4. P. 38–43.
7. **Nichols W. W.** McDonald's blood flow in arteries / W. W. Nichols, M. F. Orourke. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1973.
8. **Mann F. G., Herrick J. F., Essex H.** Effects of blood flow on decreasing the lumen of a blood vessel // Surgery. 1938. V. 4. P. 249–252.
9. **Arora C. P.** Heat and mass transfer. Delhi: Khanna Publ., 1997.
10. **Nadeem S., Akbar N. S.** Influence of heat transfer on a peristaltic transport of Herschel — Bulkley fluid in a non uniform inclined tube // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 4100–4113.
11. **Takashima M.** Electrohydrodynamic instability in a dielectric fluid between two coaxial cylinders // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1980. V. 33. P. 93–103.
12. **Melcher J. R.** Electromechanical dynamics. N. Y.: John Wiley and Sons, 1968.
13. **Crowley J. M.** Electrostatic fundamentals: Handbook of electrostatic processes. N. Y.: Marcel Dekker, 1995.
14. **Pandey S. K., Chaube M. K.** Peristaltic transport of a visco-elastic fluid in a tube of non-uniform cross section // Math. Comput. Modelling. 2010. V. 52. P. 501–514.
15. **Mandal P. K.** An unsteady of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis // Intern. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40. P. 151–164.
16. **Takashima M., Ghosh A. K.** Electrohydrodynamic instability of viscoelastic liquid layer // J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 47. P. 1717–1722.
17. **Landau L. D., Lifshitz E. M.** Electrodynamics of continuous media. N. Y.: Macmillan company, 1960.
18. **Tropea C., Yarin A. L., Foss J. F.** Hand book of experimental fluid mechanics. Berlin: Springer, 2007.
19. **Panofsky W. K. H.** Classical electricity and magnetism / W. K. H. Panofsky, M. Phillips. Reading; L.: Addison-Wesley publ. company, 1955.
20. **Lebedev N. N.** Special function and their applications. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.
21. **Jaffrin M. Y.** Inertia and streamline curvature effects on peristalsis pumping // Intern. J. Engng Sci. 1973. V. 11. P. 681–699.

*Поступила в редакцию 10/IX 2014 г.,
в окончательном варианте — 30/X 2014 г.*