

ГЕОФИЗИКА

УДК 518.12

**ПРЯМОЕ ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА**

М.И. Эпов, Э.П. Шурина*, О.В. Нечаев**

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия
* Новосибирский государственный технический университет, 630092, Новосибирск, просп. К. Маркса, 20, Россия
** ЗАО НПП ГА „Луч“, 630051, Новосибирск, ул. 2-я Юргинская, 34, Россия*

Рассматривается применение векторного метода конечных элементов для моделирования переменного электромагнитного поля в трехмерной неоднородной среде при решении задач каротажа в нефтегазовых скважинах. Приводятся результаты моделирования диаграмм в скважинах, вскрывающих тонкослоистые коллекторы с учетом реального положения зондов.

Векторный метод конечных элементов, нефтегазовые скважины, тонкослоистые коллекторы.

3D FORWARD MODELING OF VECTOR FIELD FOR INDUCTION LOGGING PROBLEMS

M.I. Epov, E.P. Shurina, and O.V. Nechaev

TEM responses in an inhomogeneous medium are modeled in 3D using the vector finite element method for induction logging in petroleum wells. The algorithm is applied to HFIL diagrams obtained in wells that tap thinly laminated formations with regard to the true position of logging tools.

Vector finite-element method, deviated well, thinly laminated formation

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных тенденций разработки нефтегазовых залежей состоит в вовлечении в оборот маломощных коллекторов, характеризующихся сложным внутренним строением и значительной изменчивостью вмещающей среды. Другой современной тенденцией является вскрытие продуктивных коллекторов с использованием не глинистых растворов, а сложных биополимерных композиций, обладающих очень высокой электропроводностью. Наряду с этим происходит наращивание объемов наклонно-горизонтального бурения (в том числе боковых стволов). Для достоверного решения задач промысловой геофизики в таких условиях требуется не только расширение арсенала геофизических методов, но и создание математического обеспечения, адекватно отражающего реальные ситуации в скважинах. В последнее десятилетие широко распространены методы высокочастотного электромагнитного каротажа (ВИКИЗ, ВЭМКЗ) [Антонов, 1980; Эпов, Никитенко, 1993; Мартаков, Эпов, 1999], обладающие высоким вертикальным разрешением и достаточной радиальной глубиной даже в скважинах с сильно проводящим буровым раствором. Дальнейшее повышение достоверности результатов интерпретации и более глубокое понимание особенностей диаграмм в сложно построенных разрезах требует создания высокоэффективных средств трехмерного моделирования высокочастотных электромагнитных полей.

Приборы ВИКИЗ и ВЭМКЗ состоят из набора 5 или 9 трехкатушечных зондов. В генераторных катушках течет переменный ток (частота 0.875—14 МГц). Измеряемой величиной является разность фаз ЭДС, наведенных в двух сближенных приемных катушках [Технология..., 2000]. Интерпретация диаграмм, полученных в результате измерений, требует решения обратных задач [Dorn et al., 1999; Newman, Hovsten, 2000], базирующихся на различных моделях пространственного распределения электрофизических характеристик исследуемых объектов и учете векторной природы электромагнитного поля. Эффективные, устойчивые алгоритмы решения обратных задач основаны на процедурах прямого моделирования [Haber, Ascher, 2001; Haber et al., 2001].

Одним из современных методов имитации электромагнитных полей в пространственно-неоднородных средах является векторный метод конечных элементов (ВМКЭ) [Nedelec, 1980, 1986; Niptmair, 2002]. В нем при постановке обеспечивается непрерывность тангенциальных (пространство $H(\text{rot}; \Omega)$)

или нормальных (пространство $H(\operatorname{div}; \Omega)$) компонент поля на межэлементных границах и на поверхностях раздела сред, характеризующихся значительной контрастностью электрофизических свойств. Как правило, в геофизических приложениях, кроме неоднородных по физическим свойствам пород, есть и геометрическая разномасштабность, связанная с размерами различных частей приборов. Все они должны учитываться при построении области моделирования. Поэтому при разработке алгоритмов прямых расчетов электромагнитного поля, обеспечивающих приемлемое по точности и быстрое решение, необходимо создать адекватную конкретной физической ситуации вычислительную схему, аппроксимирующую систему уравнений Максвелла с заданной точностью.

Основными особенностями задач электромагнитных зондирований в нефтяных скважинах можно назвать следующие: сочетание цилиндрических и плоских границ; некруговое сечение скважины; соизмеримое влияние токов проводимости и смещения; необходимость учета корпуса зонда как фрагмента области моделирования и его смещения с оси скважины (эксцентрицитет); разномасштабность и контраст электрофизических параметров (электропроводность и диэлектрическая проницаемость) не только пластов и буровой жидкости между собой, но и самого прибора (корпус, катушки конечных размеров и т. д.).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Задача моделирования сигналов в электромагнитном каротаже описывается системой уравнений Максвелла. Переменный ток в генераторной катушке изменяется во времени t по закону

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 e^{i\omega t}.$$

Здесь \mathbf{I}_0 — амплитуда тока, ω — его циклическая частота. В этом случае уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - i\omega \mathbf{D} - \mathbf{J} = \mathbf{J}_0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + i\omega \rho = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженность электрического и магнитного полей, \mathbf{D} , \mathbf{B} — электрическая и магнитная индукции, \mathbf{J} — плотность тока, \mathbf{J}_0 — плотность тока в источнике, ρ — плотность электрических зарядов, ε , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ — электрическая проводимость, i — мнимая единица.

Уравнения состояния имеют вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (6)$$

Будем предполагать, что всегда выполняется условие разрешимости системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_0 = 0.$$

Исключая из (1), (2) переменную \mathbf{H} , перейдем к векторному уравнению Гельмгольца относительно электрического поля \mathbf{E}

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_0, \quad (7)$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$ — квадрат волнового числа.

Введем краевые условия для тангенциальной составляющей электрического поля \mathbf{E} на внешней границе области моделирования $\partial\Omega$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

и условия на внутренних границах (Γ), разделяющих подобласти с различными электрофизическими свойствами

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma} = 0.$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к границе.

Учитывая (3), (5), (6), закон сохранения зарядов (4) можно преобразовать к следующему виду:

$$\operatorname{div} ((\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}) = 0.$$

ВЕКТОРНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Пусть Ω — трехмерная, неоднородная по физическим свойствам область с липшиц — непрерывной границей $\partial\Omega$. Введем пространства Дж. Неделека [Nedelec, 1980, 1986]

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{rot} \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3\},$$

$$H_0(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0\},$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\operatorname{rot}; \Omega}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}^* d\Omega.$$

Здесь индекс (*) означает комплексное сопряжение. Определим скалярное произведение следующим образом:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega.$$

Для задачи (7), (8) сформулируем следующую вариационную постановку [Hiptmair, 2002].

Найти $\mathbf{E} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$

$$\left(\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{v}\right) + (k^2 \mathbf{E}, \mathbf{v}) = -i(\omega \mathbf{J}_0, \mathbf{v}). \quad (9)$$

В соответствии с векторной формулой Грина запишем

$$\int_{\Omega} [p(\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}(p \operatorname{rot} \mathbf{v})] d\Omega = \int_{\partial\Omega} p[(\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] dS.$$

Тогда уравнение (9) можно представить в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} [(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (10)$$

Из свойств введенных пространств следует, что второе слагаемое в правой части (10) равно нулю.

В результате получаем векторную вариационную постановку.

Найти $\mathbf{E} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$

$$\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{v}\right) + (k^2 \mathbf{E}, \mathbf{v}) = -i(\omega \mathbf{J}_0, \mathbf{v}). \quad (11)$$

Можно показать, что решение вариационной задачи (11) удовлетворяет закону сохранения заряда (4) в слабом смысле:

$$((\omega^2\varepsilon + i\omega\sigma)\mathbf{E}, \operatorname{grad} \xi) = 0; \quad \forall \xi \in L^2(\Omega).$$

ДИСКРЕТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Введем декартову систему координат $\{x, y, z\}$ с единичными ортами $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Построим в расчетной области гексаэдральную сетку, на ячейках которой определим базисные edge-функции, ассоциированные с ребрами сетки конечномерного подпространства $H^h(\operatorname{rot}; \Omega) \subset H(\operatorname{rot}; \Omega)$.

На единичном кубе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ есть 12 локальных базисных функций N_l^e ($l = 1, 2, \dots, 12$). Для краткости приведем только часть из них:

$$N_1^e = (1-y)(1-z)\mathbf{i}, \quad N_2^e = y(1-z)\mathbf{i},$$

$$N_3^e = (1-y)z\mathbf{i}, \quad N_4^e = yz\mathbf{i},$$

$$N_5^e = (1-z)(1-x)\mathbf{j}, \dots \quad N_6^e = (1-x)(1-y)\mathbf{k} \dots$$

Такой базис обеспечивает непрерывность тангенциальных компонент поля на межэлементных границах. Его использование позволяет естественным образом учесть непрерывность тангенциальных компонент электрического поля \mathbf{E} на границе двух подобластей с различными электрофизическими параметрами.

Введем конечномерное подпространство $H^1(\Omega)^h$ пространства $H^1(\Omega)$. В качестве базисных возьмем трилинейные узловые функции

$$\begin{aligned}\xi_1^e &= (1-x)(1-y)(1-z), \quad \xi_2^e = x(1-y)(1-z), \quad \xi_3^e = (1-x)y(1-z), \\ \xi_4^e &= xy(1-z), \quad \xi_5^e = (1-x)(1-y)z, \quad \xi_6^e = x(1-y)z, \\ \xi_7^e &= (1-x)yz, \quad \xi_8^e = xyz.\end{aligned}$$

Можно показать, что градиент от базисной функции конечномерного подпространства $H^1(\Omega)^h$ есть линейная комбинация базисных функций подпространства $H(\text{rot}; \Omega)^h$. Например,

$$\text{grad } \xi_1^e = -\mathbf{N}_1^e - \mathbf{N}_5^e - \mathbf{N}_9^e.$$

Аналогичные выражения можно построить и для других функций.

Сформулируем дискретную вариационную постановку.

Найти $\mathbf{E}^h \in H_0^h(\text{rot}; \Omega)$ такое, что для $\forall \mathbf{v}^h \in H_0^h(\text{rot}; \Omega)$

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}^h, \text{rot } \mathbf{v}^h\right) + (k^2 \mathbf{E}^h, \mathbf{v}^h) = -i(\omega \mathbf{J}_0, \mathbf{v}^h).$$

В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

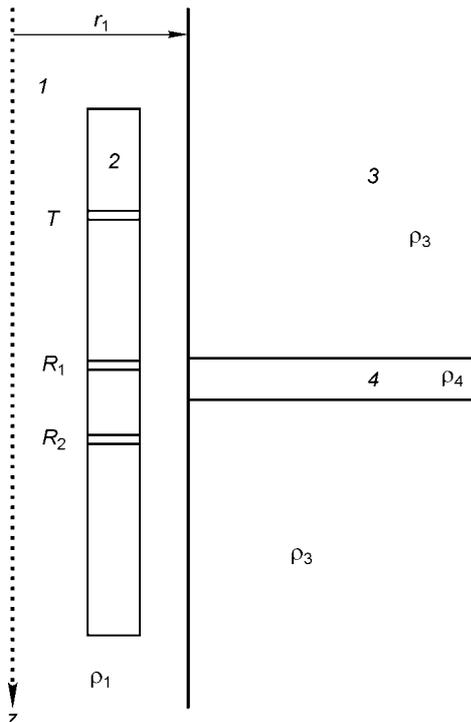
$$\begin{bmatrix} \hat{A} + \hat{B} & -\hat{C} \\ \hat{C} & \hat{A} + \hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r \\ f_i \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Здесь E_r и E_i — векторы соответствующих весов в разложениях по базису действительной и мнимой компонент электрического поля \mathbf{E} . Элементы матриц $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ и векторов f_r, f_i определяются соотношениями

$$\begin{aligned}[A]_{i,j} &= \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{N}_i^h, \text{rot } \mathbf{N}_j^h\right), \\ [B]_{i,j} &= -(\varepsilon \omega^2 \mathbf{N}_i^h, \mathbf{N}_j^h), \quad [C]_{i,j} = (\sigma \omega \mathbf{N}_i^h, \mathbf{N}_j^h), \\ [f_r]_i &= (\omega (\mathbf{J}_0)_{im}, \mathbf{N}_i^h), \quad [f_i]_i = -(\omega (\mathbf{J}_0)_{re}, \mathbf{N}_i^h).\end{aligned}$$

Система (12) несимметрична и плохо обусловлена. Для ее эффективного решения был разработан много-сеточный алгоритм, подробное описание которого приведено в [Шурина, Нечаев, 2005].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ



Введем декартову $\{x, y, z\}$ и цилиндрическую $\{r, \phi, z\}$ системы координат, ось z которых совпадает с осью скважины и направлена вниз. Будем предполагать, что среда осесимметричная, т. е. ее электропроводность и диэлектрическая проницаемость не зависят от угла ϕ . Численное моделирование было выполнено для скважины, содержащей зонд и пересекающей тонкий пропласток. Сечение модели в плоскости ZOY приведено на рис. 1: скважина (радиус $r_1 = 0.108$ м) заполнена буровым раствором; непроводящий корпус зонда (радиус $r_0 = 0.035$ м, $\varepsilon = 80\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м) с генераторной (T) и двумя приемными (R_1, R_2) катушками. Амплитуда тока в генераторной катушке 1 А, частота $f = 14$ МГц. Измерительная катушка R_1 расположена на расстоянии 0.4 м, а R_2 — на расстоянии 0.5 м от генераторной.

Результатом вычислений является разность фаз $\Delta\varphi$ между ЭДС, наведенными в приемных катушках.

Тестирование проводилось на однородной среде с удельным электрическим сопротивлением ρ . В табл. 1 приведены

Рис. 1. Расчетная область.

1 — скважина, 2 — зонд, 3 — вмещающая среда, 4 — пропласток.

Таблица 1.

Значения разности фаз, найденных численно и аналитически

	0.167	0.25	0.5	1.0	2.0	4.0
ρ , Ом·м						
$\Delta\varphi^h$, град	104.7	84.67	59.70	41.25	28.10	19.34
$\Delta\varphi^a$, град	103.6	84.36	59.14	41.17	28.33	19.14
Отн. погрешность, %	1.10	0.36	0.94	0.21	0.10	1.05

Таблица 2. Зависимость $\Delta\varphi$ от смещения оси зонда

Сопrotивление, Ом·м		Смещение оси, м			
ρ_1	ρ_3	0.0	0.032	0.065	0.085
0.25	2	30.48	30.37	29.29	27.88
		32.47		28.67	
	10	11.90	12.40	13.30	13.44
		13.36		12.66	
	50	3.25	3.88	5.81	6.70
100		5.06		5.45	
		1.72	2.36	4.39	5.31
		3.40		3.98	
0.5	2	29.38	29.22	27.55	25.73
		30.32		27.82	
	10	11.86	12.04	13.05	12.13
		12.90		11.97	
	50	3.64	3.95	6.67	5.91
		5.33		5.09	
	100	2.18	2.50	5.35	4.57
		3.81		3.66	

значения разности фаз, найденные численно ($\Delta\varphi^h$), аналитически [Технология..., 2000] ($\Delta\varphi^a$), а также модуль относительной погрешности. Вычисления выполнялись на параллелепипедальной сетке, размер системы линейных алгебраических уравнений 1091664×1091664 . Невязка приближенного решения x^k системы линейных алгебраических уравнений $Gx = f$ есть $r^k = f - Gx^k$, где k — номер итерации. Относительная невязка определяется $\delta = \frac{\|r^k\|}{\|f\|}$. Критерием выхода из итерационного решателя было уменьшение относительной невязки на 7 порядков.

Как видно, предложенный метод обеспечивает относительную погрешность моделирования разности фаз, не превосходящую 1.1 %.

В табл. 2 и на рис. 2 приведены зависимости $\Delta\varphi$ от удельного сопротивления однородной внешней среды ($\rho_3 = \rho_4$) при различных смещениях оси зонда с оси скважины в двух моделях. В первой из них скважина кругового сечения, а во

второй — эллипсоидальной (полуоси 0.108 и 0.130 м). Отметим, что в двух колонках приведены сигналы (в верхней строке для первой модели, в нижней — для второй) в зонде, лежащем на стенке скважины (во второй модели по большой полуоси).

При менее проводящем буровом растворе влияние эксцентриситета проявляется в относительно мало контрастных моделях. Следовательно, при инверсии диаграмм ВИКИЗ необходимо учитывать влияние эксцентриситета, которое проявляется как в повышении значения разности фаз в высокоомных средах, так и в снижении сигналов в относительно проводящих породах. В противном случае этот эффект можно истолковать как наличие проводящей или изолирующей зоны непосредственно за скважиной.

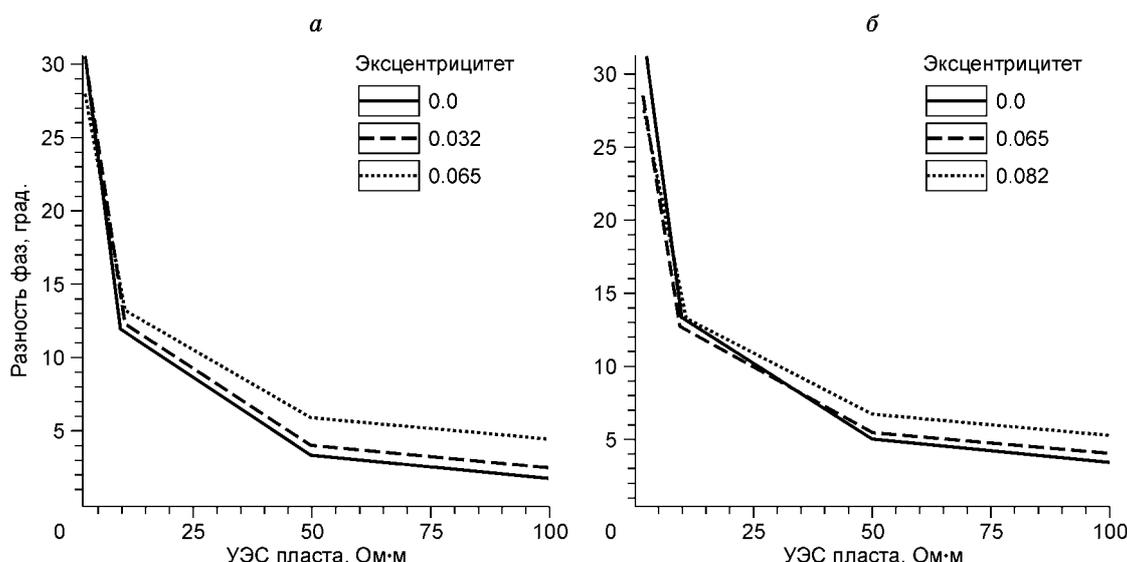


Рис. 2. Зависимость $\Delta\varphi$ от удельного сопротивления пласта, пересеченного скважиной кругового (а) и эллиптического (б) сечений.

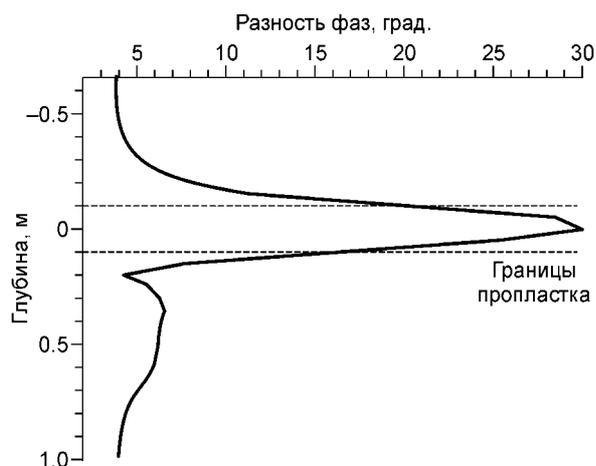


Рис. 3. Диаграмма короткого зонда, пересекающего тонкий ($h = 0.2$ м) пропласток.

$\rho_1 = 1, \rho_3 = 100, \rho_4 = 2$ Ом·м.

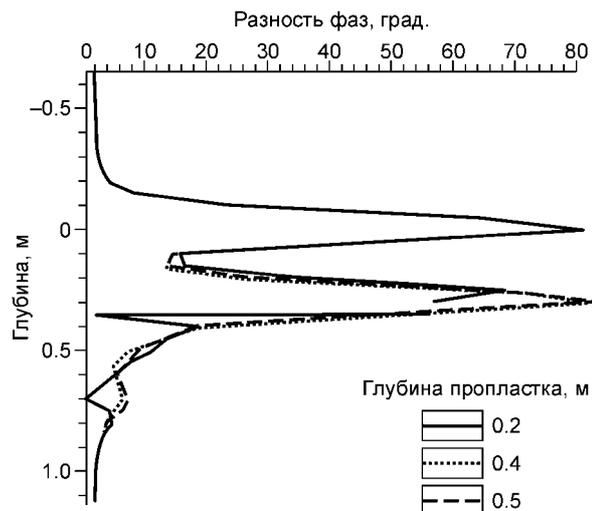


Рис. 4. Диаграмма короткого зонда при пересечении двух тонких пропластков.

$\rho_1 = 1, \rho_3 = 100, \rho_4 = 0.2$ Ом·м.

Большой интерес представляет изучение вертикального разрешения и возможности выделения тонких проводящих пропластков. Последние могут представлять как непроницаемые глинистые прослои ($УЭС = 2—3$ Ом·м) или заполненные высокопроводящим буровым раствором тонкие проницаемые зоны ($УЭС 0.5—1.0$ Ом·м), так и техногенные трещины. Центр пропластка совпадает с нулевой точкой.

На рис. 3 приведена диаграмма короткого зонда при пересечении тонкого проводящего пропластка (шаг по глубине 0.05 м). Из-за асимметрии зонда диаграмма также несимметрична. Основной максимум соответствует прохождению через центр пропластка дальней приемной катушки. Показание зонда в этой точке соответствует показаниям в однородной среде с $УЭС = 2$ Ом·м. Отметим повышение значения разности фаз до 5.5° при прохождении генераторной катушки через проласток. На диаграмме появляется излом, когда дальняя приемная катушка достигает его подошвы. Положение границ с достаточной точностью можно определить, взяв отметки глубины, где разность фаз достигает половины своего максимального значения. Относительный вклад пропластка в сигнал становится незначительным (менее 10%), когда дальняя приемная катушка удаляется примерно на 0.9 м, а генераторная — на 0.4 м от его подошвы. При приближении к пропластку сверху его влияние изменяет значение разности фаз более чем на 10% , когда измерительная катушка отстоит от кровли менее чем на 0.4 м. Таким образом „область влияния“ пропластка лежит в диапазоне глубин $(-0.5, 0.5)$.

Рассмотрим более сложные модельные ситуации с двумя тонкими пропластками (мощность 0.1 м). Центр первого пропластка расположен в точке $z = 0$, второго — $z = 0.25$. Причем первый прослой в плоскости $ХОУ$ занимает всю область, а радиальные размеры второго могут изменяться. Предположим, что первый из них представляет естественную трещину, заполненную проводящим буровым раствором на всю глубину. Второй же представляет песчаный проласток с разной глубиной проникновения фильтрата бурового раствора (на $0.2, 0.4$ м и на всю глубину). Из рис. 4 видно, что при его заполнении раствором на глубину > 0.4 м диаграммы не различаются. При этом обе зоны хорошо выделяются по диаграмме. Положение максимума сигнала соответствует координатам центров проницаемых областей. Уменьшение глубины проникновения в проласток приводит к понижению сигнала и сглаживанию двух побочных экстремумов ($z = 0.35, z = 0.7$). Таким образом, форма диаграммы короткого зонда позволяет различить техногенную трещиноватость небольшой глубины и естественные тонкие высокопроводящие зоны, а также оценить глубину проникновения в проницаемые песчанистые слои даже при их малой мощности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная вычислительная схема и ее программная реализация являются инструментом, обеспечивающим прямое моделирование электромагнитного поля на частотах $0.5—15$ МГц в трехмерной области, состоящей из скважины, зонда (с измерительными и генераторными катушками) и неоднородных пластов, характеризующихся различными электрическими свойствами и размерами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-05-64528), совместного международного проекта NWO и РФФИ (грант 047.016.003).

ЛИТЕРАТУРА

Антонов Ю.Н. Изопараметрическое каротажное зондирование // Геология и геофизика, 1980 (6), с. 81—91.

Мартаков С.В., Эпов М.И. Прямые двумерные задачи электромагнитного каротажа // Геология и геофизика, 1999, т. 40 (2), с. 249—254.

Технология исследования нефтегазовых скважин на основе ВИКИЗ: Методическое руководство / Под ред. М.И. Эпова, Ю.Н. Антонова. Новосибирск, НИЦ ОИГГМ СО РАН, Изд-во СО РАН, 2000, 121 с.

Шурина Э.П., Нечаев О.В. Многосеточный алгоритм решения векторным методом конечных элементов трехмерного уравнения Гельмгольца // Математическое моделирование, 2005, т. 17, № 6, с. 92—102.

Эпов М.И., Никитенко М.Н. Система одномерной интерпретации данных высокочастотных индукционных каротажных зондирований // Геология и геофизика, 1993, т. 34 (2), с. 124—130.

Dorn O., Bertete-Aquirre H., Berryman J.G., Papanicolaou G.C. A nonlinear inversion method for 3D electromagnetic imaging using adjoint fields // Inverse Problems, 1999, v. 15, p. 1523—1558.

Haber E., Ascher U. Fast finite volume simulation of 3D electromagnetic problems with highly discontinuous coefficients // SIAM J. Scient Comput., 2001, v. 22, p. 1943—1961.

Haber E., Ascher U., Arulian D., Oldenburg D. Fast simulation of 3D electromagnetic problems using potentials // J. Comput. Phys., 2001, v. 163, p. 150—171.

Hiptmair R. Finite elements in computational electromagnetism // Acta Numerica, 2002, p. 237—330.

Nedelec J.C. Mixed finite elements in $H(\text{rot}; \Omega)$ // Numerische Mathematik, 1980, v. 35, № 3, p. 315—341.

Nedelec J.C. A new family of mixed finite elements in $H(\text{rot}; \Omega)$ // Numerische Mathematik, 1986, v. 50, p. 57—81.

Newman G., Hoversten M. Solution strategies for two- and three-dimensional electromagnetic inverse problem // Inverse Problems, 2000, v. 16, № 5, p. 1357—1375.

*Рекомендована к печати 7 сентября 2006 г.
С.В. Гольдиным*

*Поступила в редакцию 30 сентября 2005 г.,
после доработки — 31 мая 2006 г.*