

УДК 621.391

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ  
СМЕСИ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МИЗЕСА  
ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ\***

**И. С. Грузман**

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: isguzman@gmail.com*

Предложен алгоритм сегментации анизотропных изображений на основе оценок локальной ориентации текстур, полученных с помощью градиентного структурного тензора. В качестве модели оценок предложено использовать смесь равномерного распределения и распределения Мизеса. Получен алгоритм оценивания неизвестных параметров смеси на основе тригонометрических моментов. Приведены примеры, демонстрирующие эффективность применения алгоритма сегментации для выделения текстур с одним доминирующим направлением.

*Ключевые слова:* сегментация, оценка локальной ориентации, оценка параметров смеси распределений, угловые случайные величины.

**Введение.** Сегментация изображений, содержащих локально ориентированные текстуры и анизотропный фон, является важным этапом в задачах анализа дактилоскопических изображений [1], линейных следов от орудий взлома на различных поверхностях [2, 3], изображений дорожного полотна в целях обнаружения трещин [4, 5] и т. п.

Для сегментации таких изображений широко используется мера когерентности

$$\left\{ \chi(i_1, i_2) = \left( \frac{\lambda_1(i_1, i_2) - \lambda_2(i_1, i_2)}{\lambda_1(i_1, i_2) + \lambda_2(i_1, i_2)} \right)^2, \quad i_1 = \overline{1, N}, \quad i_2 = \overline{1, N} \right\} \quad (1)$$

на основе собственных значений  $\lambda_1(i_1, i_2)$  и  $\lambda_2(i_1, i_2)$  градиентного структурного тензора [6, 7]

$$\mathbf{g}(i_1, i_2) = \begin{pmatrix} g_{xx}(i_1, i_2) & g_{xy}(i_1, i_2) \\ g_{xy}(i_1, i_2) & g_{yy}(i_1, i_2) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

вычисленного для каждого элемента анализируемого изображения  $Z = \{z(i_1, i_2), i_1 = \overline{1, N}, i_2 = \overline{1, N}\}$  размером  $N \times N$ , где

$$g_{xx}(i_1, i_2) = \frac{1}{(2W + 1)^2} \sum_{j_1 = -W}^W \sum_{j_2 = -W}^W g_x^2(i_1 + j_1, i_2 + j_2); \quad (3)$$

$$g_{yy}(i_1, i_2) = \frac{1}{(2W + 1)^2} \sum_{j_1 = -W}^W \sum_{j_2 = -W}^W g_y^2(i_1 + j_1, i_2 + j_2); \quad (4)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 2014/138, проект № 1176).

$$g_{xy}(i_1, i_2) = \frac{1}{(2W+1)^2} \sum_{j_1=-W}^W \sum_{j_2=-W}^W g_x(i_1 + j_1, i_2 + j_2) g_y(i_1 + j_1, i_2 + j_2); \quad (5)$$

$g_x(\cdot)$  и  $g_y(\cdot)$  — производные по горизонтальному и вертикальному направлениям изображения  $Z$ , вычисленные с помощью оператора Собела;  $(2W+1) \times (2W+1)$  — размеры окна усреднения.

Мера (1) принимает значения от 0 до 1. Для идеального изотропного поля  $\chi = 0$ . Для идеального анизотропного поля, изолинии двумерной функции яркости которого являются параллельными прямыми,  $\chi = 1$ . Алгоритм сегментации состоит в сравнении меры когерентности с порогом  $C_\chi$ . Принимается решение  $\gamma_1$ , что отсчёт изображения  $Z$  с координатами  $(i_1, i_2)$  принадлежит анизотропной локально ориентированной текстуре, если  $\chi(i_1, i_2) \geq C_\chi$ . В противном случае принимается решение  $\gamma_0$ , что отсчёт принадлежит неинформативному фону.

Если гистограмма значений меры когерентности (1) имеет два максимума, то в качестве порога берётся значение координаты минимума гистограммы между этими максимумами. Однако во многих практических случаях, когда анализируемое изображение искажено шумами или анизотропная текстура не обладает свойством локальной линейной симметрии [6], гистограмма значений меры когерентности не содержит резко выраженного минимума. В таких случаях нетривиальной проблемой является автоматический выбор глобального порога  $C_\chi$ . Кроме того, уровень ошибок сегментации на основе меры когерентности (1) может оказаться неприемлемо большим.

Для снижения ошибок сегментации целесообразно использовать оценку локальной ориентации (ЛО) текстуры на основе структурного тензора [6, 7]:

$$\{\varphi(i_1, i_2) = \arctg(v_2(i_1, i_2)/v_1(i_1, i_2))(\bmod \pi), i_1 = \overline{1, N}, i_2 = \overline{1, N}\}, \quad (6)$$

которая для точки с координатами  $(i_1, i_2)$  равна направлению собственного вектора  $\mathbf{v}(i_1, i_2) = [v_1(i_1, i_2), v_2(i_1, i_2)]^T$  матрицы  $\mathbf{g}(i_1, i_2)$ , соответствующего наименьшему собственному значению, т. е. углу, при котором среднее значение мощности первой производной по направлению двумерной функции яркости фрагмента в окрестности этой точки принимает минимальное значение [6]. В формуле (6)  $(\bmod \pi)$  обозначает, что областью определения оценки ЛО является дуга единичного радиуса ( $0 < \varphi \leq \pi$ ), поскольку углы ориентации текстуры  $\varphi$  и  $\varphi + n\pi$  неразличимы ( $n$  — произвольное целое число).

Распределение оценки  $\varphi$  анализируемого изображения  $Z$  можно представить в виде смеси распределений углов:

$$w_Z(\varphi) = p_0 w(\varphi | H_0) + (1 - p_0) w(\varphi | H_1), \quad (7)$$

где  $w(\varphi | H_0)$  и  $w(\varphi | H_1)$  — заданные на дуге  $(0, \pi]$  плотности распределения вероятностей (ПРВ) оценки ЛО изотропного фона (класс  $H_0$ ) и анизотропной текстуры (класс  $H_1$ ) соответственно;  $p_0$  — априорная вероятность класса  $H_0$ , определяющая площадь на изображении, занимаемую изотропной текстурой. В работе [8] показано, что ПРВ оценки ЛО изотропной текстуры  $w(\varphi | H_0)$  можно считать равномерной. Если анизотропная текстура анализируемого изображения содержит одно доминирующее направление, то ПРВ  $w(\varphi | H_1)$  унимодальна. Тогда ПРВ (7) также будет унимодальной.

На рис. 1,  $b, c$  показаны соответственно нормированные гистограммы меры когерентности (1) и оценки ЛО (6), вычисленные по реальному изображению динамических следов

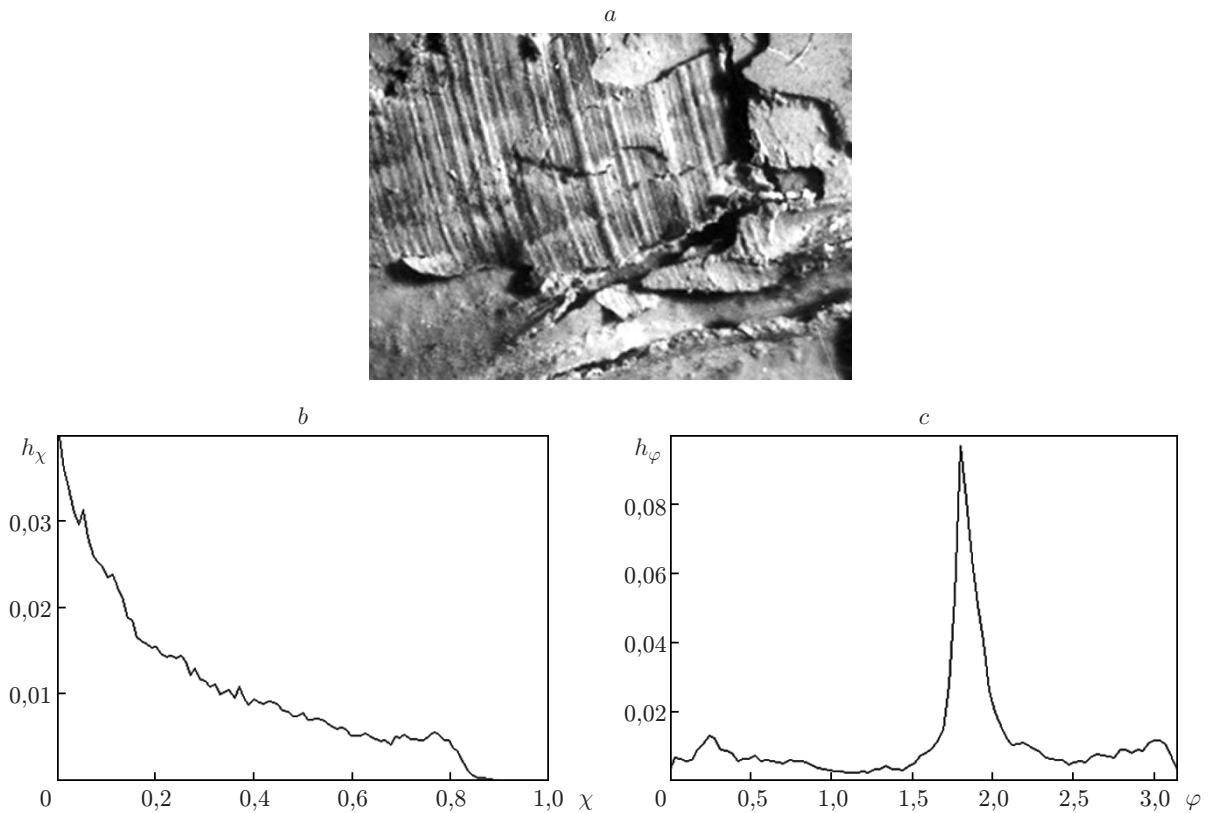


Рис. 1

инструмента (рис. 1, *a*). Гистограмма меры когерентности  $h_\chi$  не содержит резко выраженных минимумов, что обусловлено значительными размерами области перекрытия распределений статистики (1) для классов  $H_0$  и  $H_1$ . Очевидно, что в этом случае ошибки сегментации будут достаточно большими. Гистограмма оценки ЛО  $h_\varphi$  содержит один резко выраженный пик. Положение этого пика соответствует доминирующему направлению анизотропной текстуры, а его ширина прямо пропорциональна разбросу оценки ЛО. Причём чем уже этот пик, тем ниже уровень ошибок сегментации. Таким образом, эффективность алгоритма сегментации на основе статистики (6) может оказаться существенно выше, чем на основе меры когерентности (1).

Цель данной работы — построение алгоритма сегментации изображений, содержащих изотропный фон и анизотропную текстуру с одним доминирующим направлением, на базе оценки ЛО текстуры.

**Алгоритм сегментации, основанный на смеси распределений оценок углов ЛО.** Для описания распределения оценки ЛО анизотропной текстуры с одним доминирующим направлением используем аналог гауссовского распределения для угловых данных — распределение Мизеса [9], определённое на окружности единичного радиуса ( $0 < \varphi \leq 2\pi$ ). Чтобы устранить неоднозначность, обусловленную тем, что углы ориентации текстуры  $\varphi$  и  $\varphi + n\pi$  неразличимы, применим стандартный приём «удвоения угла» [9]. Тогда распределение Мизеса для углов, заданных на дуге  $(0, \pi]$ , имеет вид [10]

$$w_M(\varphi) = w(\varphi | H_1) = \frac{1}{\pi I_0(\kappa)} e^{(\kappa \cos(2(\varphi - \mu)))}, \quad (8)$$

где  $I_0(\kappa)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $\mu$  — круговое среднее направление случайного угла  $\varphi$ ;  $\kappa$  — параметр концентрации  $\varphi$ . Распреде-

ление (8) унимодально и симметрично относительно  $\varphi = \mu \pmod{\pi}$ . Оно характеризуется тригонометрическими моментами  $k$ -го порядка:

$$\tau_{M,k} = \int_0^\pi e^{j2k\varphi} w_M(\varphi) d\varphi = \frac{I_k(\kappa)}{I_0(\kappa)} e^{j2k\mu}, \quad (9)$$

где  $k$  — неотрицательное целое число;  $j$  — мнимая единица;  $I_k(\kappa)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода  $k$ -го порядка.

В качестве распределения оценки ЛО изотропной текстуры используем равномерное распределение  $w_U(\varphi) = w(\varphi | H_0) = 1/\pi$ , заданное на дуге  $(0, \pi]$ . Тригонометрические моменты  $w_U(\varphi)$  равны

$$\tau_{U,k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для принятых распределений  $w(\varphi | H_0)$  и  $w(\varphi | H_1)$  несложно показать, что алгоритм бинарной сегментации, основанный на принципе максимума апостериорного распределения вероятностей [11], имеет вид

$$\left\{ y(i_1, i_2) = \begin{cases} \gamma_1, & s_\varphi(i_1, i_2) \leq C_\varphi, \\ \gamma_0, & s_\varphi(i_1, i_2) > C_\varphi, \end{cases} \quad i_1 = \overline{1, N}, \quad i_2 = \overline{1, N} \right\}, \quad (11)$$

т. е. состоит в сравнении с порогом статистики

$$s_\varphi(i_1, i_2) = \sin(|\varphi(i_1, i_2) - \mu|), \quad (12)$$

представляющей собой «круговое расстояние» между случайным  $\varphi(i_1, i_2)$  и фиксированным  $\mu$  углами [10], заданными на дуге  $(0, \pi]$ . В результате сегментации получим бинарное изображение  $\{y(i_1, i_2), i_1 = \overline{1, N}, i_2 = \overline{1, N}\}$ . Оптимальный порог

$$C_\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \ln \left( I_0(\kappa) \frac{p_0}{1 - p_0} \right) \right)}, \quad (13)$$

удовлетворяющий уравнению

$$w(\varphi | H_0)p_0 = w(\varphi | H_1)p_1, \quad (14)$$

обеспечивает минимум вероятности ошибки сегментации

$$P_{\text{err}} = p_0\alpha + (1 - p_0)\beta, \quad (15)$$

где

$$\alpha = p(\gamma_1 | H_0) = \frac{1}{\pi} \int_{s_\varphi \leq C_\varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi} \arcsin(C_\varphi), \quad \beta = p(\gamma_0 | H_1) = \int_{s_\varphi > C_\varphi} w_M(\varphi) d\varphi$$

— условные вероятности ошибок первого и второго рода соответственно. Ошибка первого рода состоит в принятии решения о том, что анализируемый фрагмент является анизотропным, когда в действительности он изотропный. Ошибка второго рода состоит в принятии анизотропного фрагмента за изотропный.

Следует отметить, если уравнение (14) имеет корни, т. е. зависимости  $w(\varphi | H_0)p_0$  и  $w(\varphi | H_1)p_1$  пересекаются, то порог  $C_\varphi \in [0, 1]$ .

**Оценка параметров смеси распределений.** Для вычисления статистики (12) и порога (13), определяющих алгоритм сегментации (11), необходимо знать три параметра смеси (7):  $p_0$ ,  $\mu$  и  $\kappa$ . Поскольку оценки ЛО (6) для реальных изображений являются коррелированными и негауссовскими случайными величинами, то синтез оптимальных алгоритмов оценивания данных параметров не представляется возможным. Поэтому применим метод моментов, который достаточно просто реализовать для многих видов распределений. В частности, для оценки  $p_0$ ,  $\mu$  и  $\kappa$  достаточно использовать тригонометрические моменты первого и второго порядка, выбрав три из четырёх уравнений на основе вещественных и мнимых частей тригонометрических моментов. Однако в [12] показано, что оценка параметров взвешенной смеси двух распределений Мизеса с помощью минимально возможного числа уравнений приводит к чрезвычайно низкой помехоустойчивости. Лучший результат даёт метод наименьших квадратов (МНК), использующий избыточное число уравнений [12], но для его реализации требуется применение алгоритмов многомерной оптимизации, сложность которых нарастает с увеличением числа неизвестных параметров.

В данной работе предлагается квазиоптимальный алгоритм оценки параметров взвешенной смеси равномерного распределения и распределения Мизеса методом наименьших квадратов на основе тригонометрических моментов. Как показано далее, для его реализации достаточно будет применить методы одномерной оптимизации.

С учётом (9) и (10) тригонометрические моменты смеси (7) равны

$$\tau_{Z,k} = \int_0^\pi e^{j2k\varphi} w_Z(\varphi) d\varphi = (1 - p_0) \frac{I_k(\kappa)}{I_0(\kappa)} e^{j2k\mu}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (16)$$

где  $K \geq 2$  — число моментов, используемых для оценки неизвестных параметров. Очевидно, что модули  $|\tau_{Z,k}| = (1 - p_0)(I_k(\kappa)/I_0(\kappa))$ ,  $k = \overline{1, K}$ , тригонометрических моментов (16) зависят от двух неизвестных параметров ( $p_0$  и  $\kappa$ ), а аргументы  $\arg(\tau_{Z,k}) = 2k\mu$  — только от одного параметра  $\mu$ . Разделим задачу построения оценки трёх параметров на две подзадачи. МНК-оценку параметра  $\mu$ , полученную на основе аргументов  $\tau_{Z,k}$ , можно представить в виде

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\arg(\tau_{Z,k})}{2k}. \quad (17)$$

Нетрудно показать, что при известном параметре  $\kappa$  МНК-оценка вероятности

$$\tilde{p}_0 = 1 - I_0(\kappa) \left( \sum_{k=1}^K |\tau_{Z,k}| I_k(\kappa) / \sum_{k=1}^K I_k^2(\kappa) \right), \quad (18)$$

тогда МНК-оценка параметра  $\kappa$  с учётом (18) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &= \arg \min_{\kappa} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left( |\tau_{Z,k}| - (1 - \tilde{p}_0) \frac{I_k(\kappa)}{I_0(\kappa)} \right)^2 = \\ &= \arg \min_{\kappa} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left( |\tau_{Z,k}| - I_k(\kappa) \left( \sum_{l=1}^K |\tau_{Z,l}| I_l(\kappa) / \sum_{l=1}^K I_l^2(\kappa) \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, алгоритм сегментации изображений на основе смеси равномерного распределения и распределения Мизеса при неизвестных параметрах состоит в следующем:

1. Для оценок ЛО (6) анализируемого изображения  $Z$  вычисляются оценки  $K$  тригонометрических моментов [9].
2. Оценка параметра  $\tilde{\mu}$  находится в соответствии с (17).
3. Оценка параметра  $\tilde{\kappa}$  вычисляется с помощью метода одномерной минимизации целевой функции, приведённой в (19).
4. Подставив оценку  $\tilde{\kappa}$  в (18), получим оценку вероятности  $\tilde{p}_0$ .
5. Подставив полученные оценки неизвестных параметров в (12) и (13), найдём решающую статистику  $\{s_\varphi(i_1, i_2), i_1 = \overline{1, N}, i_2 = \overline{1, N}\}$  и порог  $C_\varphi$ .
6. Сегментация анизотропного изображения выполняется согласно правилу (11).

**Экспериментальные исследования алгоритма сегментации.** Для оценивания эффективности предложенного алгоритма сегментации и параметров смеси равномерного распределения и распределения Мизеса проведено три эксперимента методом компьютерного моделирования.

Во всех экспериментах число тригонометрических моментов, используемых для получения оценок параметров смеси,  $K = 4$ . Как показали экспериментальные исследования, применение большего числа моментов не приводит к существенному повышению точности оценок неизвестных параметров, поскольку с увеличением порядка момента ухудшается относительная точность его оценки.

Задача первого эксперимента состояла в сравнении полученного алгоритма и алгоритма сегментации при точно известных параметрах смеси  $p_0$ ,  $\mu$  и  $\kappa$ . На рис. 2 приведены зависимости вероятности ошибки сегментации  $P_{\text{err}}$  (15) от вероятности  $p_0$  при  $\kappa = 60$  и  $\kappa = 120$ , где сплошные кривые соответствуют предложенному алгоритму сегментации, а штриховые — алгоритму сегментации при точно известных параметрах смеси. Зависимости  $P_{\text{err}}$  были получены по 100 статистически независимым выборкам объёмом  $n = 10000$  элементов для каждого значения  $p_0$ . Каждая выборка состояла из  $np_0$  и  $n(1 - p_0)$  статистически независимых чисел, подчиняющихся равномерному распределению и распределению Мизеса. Параметр  $\mu \in (0, \pi]$  от выборки к выборке менялся случайным образом в соответствии с равномерной ПРВ.

Во втором эксперименте проверялась адекватность принятой модели (7), представляющей собой смесь равномерного распределения и распределения Мизеса, оценкам ЛО (6). Для вычисления вероятности ошибки сегментации имитировалось 100 статистически независимых изображений размером  $N \times N = 400 \times 400$  элементов для фиксированного значения  $p_0$  при  $W = 15$ . Каждое изображение состояло из изотропной текстуры площадью  $p_0(N \times N)$  элементов и анизотропной текстуры с одним доминирующим направлением площадью  $(1 - p_0)(N \times N)$  элементов. Текстуры представляли собой гауссовские случайные

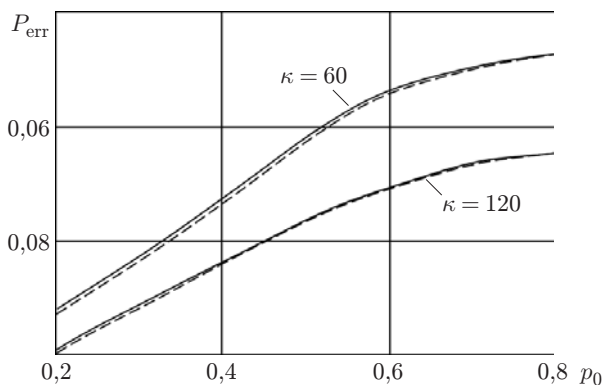


Рис. 2

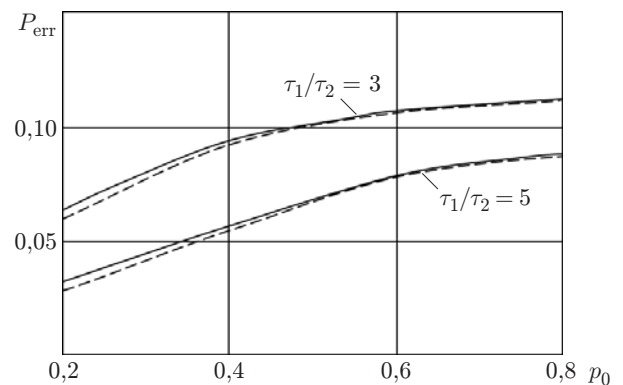


Рис. 3

поля с корреляционной функцией

$$K_Z(i_1, i_2) = \exp \left( - \frac{\pi(i_1 \cos \mu - i_2 \sin \mu)^2}{4\tau_1^2} - \frac{\pi(i_1 \sin \mu + i_2 \cos \mu)^2}{4\tau_2^2} \right),$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — интервалы корреляции одномерных горизонтальных и вертикальных сечений случайного поля  $Z$  при  $\mu = 0$ . На рис. 3 приведены зависимости вероятности ошибки сегментации  $P_{\text{err}}$  от вероятности  $p_0$  при  $\tau_1/\tau_2 = 3$  и  $\tau_1/\tau_2 = 5$  для анизотропной текстуры, где  $\tau_2 = 3$ . Для изотропной текстуры интервалы корреляции вертикальных и горизонтальных сечений равны 3. Параметр  $\mu \in (0, \pi]$ , определяющий доминирующее направление анизотропной текстуры, был постоянным в пределах одного изображения и менялся случайным образом от изображения к изображению в соответствии с равномерной ПРВ. Сплошные кривые описывают предложенный алгоритм сегментации, штриховые — оптимальный алгоритм, где значение порога сегментации, обеспечивающее минимальный уровень вероятности ошибки, определялось в интерактивном режиме.

В третьем эксперименте алгоритм сегментации тестировался по реальным изображениям (рис. 4, *a*—*б, а*), содержащим текстуры с одним доминирующим направлением. Результаты сегментации предложенными алгоритмом (11) и алгоритмом на основе меры когерентности (1), для которого порог выбирался с помощью метода Оцу, приведены на рис. 4, *b*—*б, б* и рис. 4, *c*—*б, c* соответственно, где более светлые области — это текстура с одним доминирующим направлением.

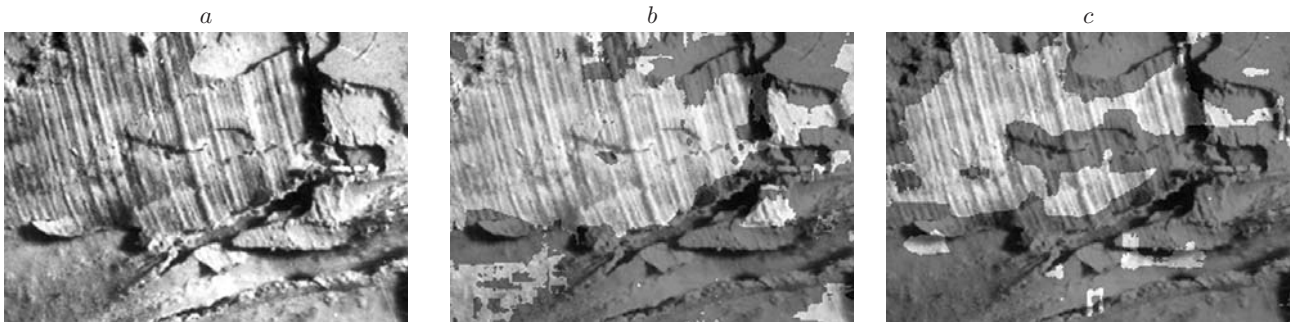


Рис. 4

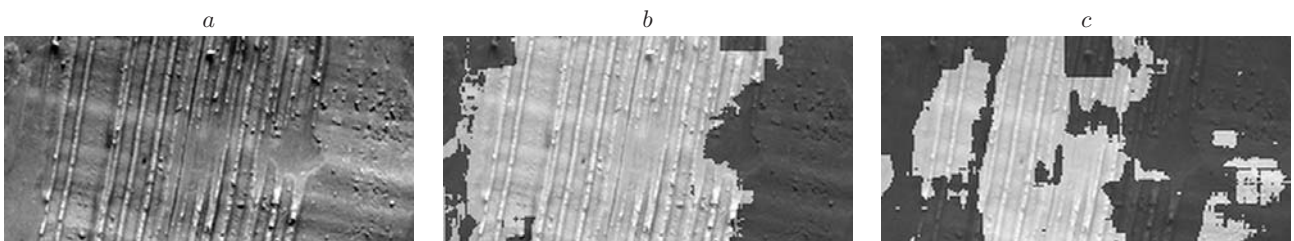


Рис. 5

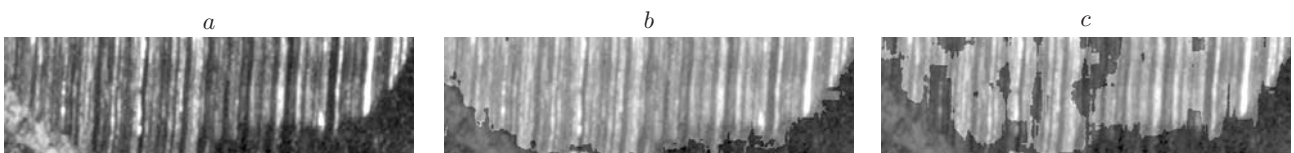


Рис. 6

**Заключение.** В данной работе предложен алгоритм сегментации изображений, содержащих анизотропную текстуру и анизотропную текстуру с одним доминирующим направлением, на основе оценок локальной ориентации. Для синтеза алгоритма использовалась модель смеси оценок ЛО, представляющая собой взвешенную сумму равномерного распределения и распределения Мизеса. Показано, что в алгоритме, обеспечивающем минимум вероятности ошибки сегментации для данной модели, в качестве решающей статистики взято круговое расстояние между угловыми величинами, заданными на дуге  $(0, \pi]$ . Предложен квазиоптимальный МНК-алгоритм оценивания трёх неизвестных параметров смеси распределений на основе тригонометрических моментов, для реализации которого требуется метод лишь одномерной оптимизации.

Результаты экспериментов продемонстрировали, что характеристики рассматриваемого и оптимального алгоритмов практически совпадают, а также подтвердили адекватность принятой модели смеси оценок ЛО. Тестирование по реальным изображениям показало, что такой алгоритм достаточно эффективно решает задачу выделения анизотропной текстуры, содержащей одно доминирующее направление.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Maltoni D., Maio D., Jain A. K., Prabhakar S.** Handbook of Fingerprint Recognition. N. Y.: Springer-Verlag, 2009. 496 p.
2. **Грузман И. С., Карпушин В. Б.** Оценка траектории движения слепообразующего объекта на основе градиентного структурного тензора // Автометрия. 2011. **47**, № 1. С. 2–9.
3. **Грузман И. С.** Оценка эффективности алгоритма сегментации на основе градиентного структурного тензора // Изв. вузов РФ. Радиоэлектроника. 2012. № 2. С. 22–30.
4. **Roli F.** Measure of texture anisotropy for crack detection on textured surfaces // Electron. Lett. 1996. **32**, N 14. P. 1274–1275.
5. **Nguyen T. S., Begot S., Duculty F., Avila M.** Free-form anisotropy: a new method for crack detection on pavement surface images // 18th IEEE Intern. Conf. on Image Processing. Bruxelles, Belgium, 2011. P. 1069–1072.
6. **Bigun J.** Vision with Direction: A Systematic Introduction to Image Processing and Computer Vision. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 396 p.
7. **Яне Б.** Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2007. 584 с.
8. **Witkin A. P.** Recovering surface shape and orientation from texture // Artif. Intel. 1981. **17**, Is. 1–3. P. 17–45.
9. **Mardia K. V., Jupp P. E.** Directional Statistics. Chichester: Wiley, 1999. 429 p.
10. **Jammalamadaka S. R., SenGupta A.** Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific Press, 2001. 336 p.
11. **Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П. и др.** Цифровая обработка изображений в информационных системах: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 352 с.
12. **Spurr B. D., Koutbeiy M. A.** A comparison of various methods for estimating the parameters in mixtures of von Mises distributions // Commun. Statistical-Simulation Comput. 1991. **20**, Is. 2–3. P. 725–741.

*Поступила в редакцию 25 марта 2013 г.*