

21. DiPersio R., Simon J., Menedrino A. B. Penetration of shaped charge jets into metallic targets/BRL Report N 1296, AD — 478717.  
 13. Уилкинс М. А., Гуинан М. У. Удар цилиндра по жесткой преграде // Механика. — М., 1973. — Вып. 3(139).

Поступила 21/III 1988 г.,  
 в окончательном варианте — 11/V 1988 г.

УДК 539.3

## ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕРМОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ ТЕЛ

В. В. Алехин, Б. Д. Аннин

(Новосибирск)

Задачи синтеза слоистых тел — одно из перспективных направлений в области структурной оптимизации. Им посвящен ряд работ [1—7], касающихся вопросов проектирования слоистых теплозащитных панелей, многослойных волновых фильтров упругих слоистых тел. В задачах синтеза слоистых конструкций в качестве управляющих параметров выбираются структура конструкции и ее геометрические размеры. Управлением, характеризующим структуру слоистых тел, является кусочно-постоянная функция с дискретной областью значений. Поэтому при выводе управляющих уравнений, построении численных алгоритмов решения задач синтеза необходимо использовать методы теории оптимального управления: принцип максимума, конечные вариации управления на множествах малой лебеговой меры. Структура и размеры слоистой конструкции полностью определяются в процессе оптимизации, хотя заранее количество слоев в конструкции, их размеры и материалы слоев не известны.

В настоящей работе рассматривается задача синтеза из конечного набора упругих однородных изотропных материалов многослойной сферической оболочки минимального веса, находящейся в стационарном температурном поле, нагруженной внутренним и внешним гидростатическим давлением, при заданных ограничениях на прочность сферы, ее размеры и критическую нагрузку потери устойчивости. Получены необходимые условия оптимальности, построен вычислительный алгоритм и приведен пример расчета оптимальной сферической оболочки.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеется набор  $W$ , состоящий из  $l$  однородных изотропных материалов. Из него требуется синтезировать слоистую сферическую оболочку минимального веса.

Пусть  $r_1, r_2$  — радиусы внутренней и внешней поверхностей рассматриваемой оболочки. Для определенности на границе  $r_1$  будем считать известной температуру  $T_1$  и давление  $p_1$ , а на внешней границе  $r_2$  зададим теплообмен по закону Ньютона и давление  $p_2$ . Напряженно-деформированное состояние многослойной сферы в предположении, что имеет местами сферической симметрии, описывается краевой задачей, включающей в себя уравнение равновесия

$$(1.1) \quad d\sigma_r/dr + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0;$$

стационарное уравнение теплопроводности

$$(1.2) \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \lambda \frac{dT}{dr} \right) = 0;$$

соотношения термоупругости

$$(1.3) \quad \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{du}{dr} + 2\nu \frac{u}{r} - \alpha(1+\nu)T \right],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - \alpha(1+\nu)T \right];$$

краевые условия

$$(1.4) \quad \sigma_r(r_1) = -p_1, \quad \sigma_r(r_2) = -p_2;$$

$$(1.5) \quad T(r_1) = T_1, \quad \lambda(r_2) \frac{dT}{dr}(r_2) = k[T_2 - T(r_2)],$$

где  $u(r)$ ,  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\varphi(r)$ ,  $T(r)$  — соответственно радиальное смещение точки тела, компоненты радиальных и окружных напряжений и стационарные

температурное поле, действующие в конструкции;  $E(r)$ ,  $\nu(r)$ ,  $\alpha(r)$ ,  $\lambda(r)$  — распределенные характеристики среды: модули Юнга, коэффициенты Пуассона, теплового расширения и теплопроводности материалов слоев;  $T_2$  — температура внешней среды;  $k$  — коэффициент теплопередачи.

На внутренних границах  $r_i \in (r_1, r_2)$  слоев, где терпят разрыв свойства среды, необходимо задавать условия сопряжения: непрерывность смещений  $u(r)$ , радиальных напряжений  $\sigma_r(r)$ , температуры  $T(r)$  и теплового потока  $\lambda(r)dT/dr$ , т. е.

$$(1.6) \quad [u(r_i)] = [\sigma_r(r_i)] = [T(r_i)] = \left[ \lambda(r_i) \frac{dT(r_i)}{dr} \right] = 0.$$

Пусть  $\sigma$ ,  $L$ ,  $\rho_*$ ,  $t_*$ ,  $\lambda_*$  — характерные величины, имеющие размерность напряжения, длины, плотности, температуры и коэффициента теплопроводности. Введем новые безразмерные переменные (в дальнейшем звездочка у безразмерных величин опущена):

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u^* &= u/L, & r^* &= r/L, & r_i^* &= r_i/L, & p_i^* &= p_i/\sigma, & i &= 1, 2, \\ \sigma_r^* &= \sigma_r/\sigma, & \sigma_s^* &= \sigma_s/\sigma, & E^* &= E/\sigma, & T^* &= T/t_*, \\ \alpha^* &= \alpha t_*, & \lambda^* &= \lambda/\lambda_*, & \rho^* &= \rho/\rho_*, & k^* &= kL/\lambda_*. \end{aligned}$$

$\sigma_s$ ,  $\rho$  — пределы прочности и плотности материалов из множества  $W$ . Делаем замену координат

$$(1.8) \quad r = r_1 + x(r_2 - r_1), \quad x \in [0, 1],$$

переводящую переменную область задания  $[r_1, r_2]$  в постоянную  $[0, 1]$ . Введем кусочно-постоянную функцию

$$(1.9) \quad \theta(x) = \{\theta_j; x \in [x_j, x_{j+1}), j = 1, \dots, n\}, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1,$$

характеризующую структуру многослойной конструкции: количество, размеры и материалы составляющих ее слоев. Значения  $\theta_j$  принадлежат дискретному конечному множеству

$$(1.10) \quad U = \{\theta_1, \dots, \theta_m\},$$

соответствующему заданному набору материалов  $W$ . Теперь все характеристики материалов из множества  $W$  будут функциями распределения  $(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Удобно в качестве множества  $U$  задать набор целых чисел  $U = \{1, \dots, m\}$ . Тогда запись  $\theta(x) = m$ ,  $x \in [x_k, x_{k+1})$  означает, что  $k$ -й слой сферы состоит из  $m$ -го материала множества  $W$ .

Так как структура слоистой сферической оболочки определяется функцией  $\theta(x)$ , а геометрия — ее размерами  $r_1$  и  $r_2$ , в качестве управления рассмотрим пару  $\{\theta(x), r_1\}$  (для определенности внешний радиус  $r_2$  считаем фиксированным), где  $\theta(x) \in U$  (1.10) и

$$(1.11) \quad r_1 \in [a, b]$$

$a$ ,  $b$  — заданные пределы, в которых может варьироваться толщина рассматриваемой конструкции).

Задача оптимального проектирования заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций  $\theta(x)$  (1.9), область значений которых принадлежит множеству  $U$  (1.10), и параметров  $r_1$  из отрезка  $[a, b]$  (1.11) требуется найти управление  $\{\theta(x), r_1\}$ , доставляющее минимум функционалу веса

$$(1.12) \quad F[\theta, r_1] = \int_{r_1}^{r_2} \rho(\theta) r^2 dr = \int_0^1 \Phi(x, \theta, r_1) dx$$

при заданных ограничениях на прочность

$$(1.13) \quad \varphi(x, u, \sigma_r, T, \theta, r_1) \leq 0$$

и критическую нагрузку потери устойчивости

$$(1.14) \quad p_2 - p_1 - q(\theta, r_1) \leq 0.$$

В качестве ограничения (1.13) рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$\varphi(x, u, \sigma_r, T, \theta, r_1) = |\sigma_r - \sigma_\varphi| - \sigma_s = \left| \frac{E}{1-\nu} \left( \frac{u}{r} - \alpha T \right) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma_r \right| - \sigma_s \leq 0,$$

а в качестве нагрузки  $q(\theta, r_1)$  (1.14) — величину

$$(1.15) \quad q(\theta, r_1) = \frac{2sE_c h^2}{R^2 \sqrt{3(1-\nu_c^2)}},$$

формально представляющую собой произведение внешнего критического давления для однородной изотропной сферической оболочки на некоторый коэффициент  $s < 1$ . Здесь  $h = (r_2 - r_1)$  — толщина оболочки;  $\bar{r} = (r_1 + r_2)/2$  — радиус ее срединной поверхности;  $E_c, \nu_c$  — модуль упругости материала оболочки.

Чтобы использовать выражение (1.15) в ограничении (1.14) для многослойной оболочки, в качестве  $E_c$  и  $\nu_c$  рассмотрим осредненные по толщине модули упругости пакета [8]

$$(1.16) \quad \nu_c = B_2/B_1, \quad E_c = (B_1 - \nu_c B_2)/h,$$

$$\text{где } B_1 = \int_0^1 \frac{E(\theta)}{1-\nu^2(\theta)} (r_2 - r_1) dx; \quad B_2 = \int_0^1 \frac{\nu(\theta) E(\theta)}{1-\nu^2(\theta)} (r_2 - r_1) dx.$$

Теперь ограничение (1.14) с учетом (1.15), (1.16) можно представить в виде

$$(1.17) \quad F_2[\theta, r_1] = p_2 - p_1 - \int_0^1 Q(\theta, r_1) dx \leq 0$$

$$\left( Q(\theta, r_1) = \frac{2sh^2 E(\theta) [1 - \nu_c \nu(\theta)]}{R^2 [1 - \nu^2(\theta)] \sqrt{3(1 - \nu_c^2)}} \right).$$

**2. Необходимые условия оптимальности.** Для их вывода в задаче (1.1)–(1.17) требуется построить выражения для вариаций целевого функционала (1.12) и ограничений (1.13), (1.17) через вариации управления  $\{\theta(x), r_1\}$ . С этой целью преобразуем краевую задачу (1.1)–(1.6). Проинтегрируем сначала уравнение (1.2). Имеем (штрих означает производную по координате  $x$ )

$$(2.1) \quad r^2 \lambda(x) T'(x) = c(r_2 - r_1),$$

где переменная  $r$  связана с  $x$  соотношением (1.8). Используя условие (1.6) непрерывности теплового потока по слоям конструкции, получаем, что константа интегрирования  $c$  будет одной и той же на всем отрезке  $[0, 1]$ . Сделаем теперь замену

$$(2.2) \quad T(x) = cT_0(x) + T_1,$$

из соотношений (1.5), (2.1), (2.2) получим задачу Коши для определения функции  $T_0(x)$ :

$$(2.3) \quad T_0'(x) = \frac{r_2 - r_1}{r^2 \lambda(x)}, \quad T_0(0) = 0.$$

При этом функция  $T_0(x)$  как решение задачи Коши (2.3) непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , следовательно, непрерывна и функция температуры  $T(x)$  (2.2). Константа  $c$  определяется из второго условия (1.5) и соотношений (2.1), (2.2):

$$(2.4) \quad c = kr_2^2 (T_2 - T_1) / [kr_2^2 T_0(1) + 1].$$

Для удобства обозначим значение функции  $T_0(1)$  через  $\gamma$ . Значение параметра  $\gamma$ , как следует из уравнения (2.3), зависит от выбора управления  $\{\theta(x), r_1\}$ .

Вид уравнений (1.1), (1.3), (2.3) и условия сопряжения (1.6) позволяют ввести непрерывные на отрезке  $[0, 1]$  фазовые переменные

$$(2.5) \quad \mathbf{Z}(x) = (u(x), \sigma_r(x), T_0(x))^T.$$

Теперь исходную краевую задачу (1.1), (1.3), (1.4), (2.2)–(2.4) можно представить в виде краевой задачи относительно неизвестных  $\mathbf{Z}(x)$  (2.5):

$$(2.6) \quad \mathbf{Z}'(x) = \mathbf{A}(x, \gamma, \theta, r_1) \cdot \mathbf{Z}(x) + \mathbf{B}(x, \theta, r_1), \quad z_2(0) = -p_1, \quad z_2(1) = -p_2, \quad z_3(0) = 0,$$

где ненулевые элементы  $a_{ij}$ ,  $b_i$  матрицы  $\mathbf{A}(x, \gamma, \theta, r_1)$  и вектора  $\mathbf{B}(x, \theta, r_1)$  выражаются как

$$a_{11} = \frac{2\nu(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)}, \quad a_{12} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)(r_2 - r_1)}{E(1 - \nu)}, \quad a_{13} = \frac{\alpha c(1 + \nu)(r_2 - r_1)}{1 - \nu},$$

$$a_{21} = \frac{2E(r_2 - r_1)}{r^2(1 - \nu)}, \quad a_{22} = \frac{(2 - 4\nu)(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)}, \quad a_{23} = \frac{2\alpha E c(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)},$$

$$b_1 = \alpha T_1(r_2 - r_1) \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad b_2 = \frac{2\alpha E T_1(r_2 - r_1)}{r(\nu - 1)}, \quad b_3 = \frac{r_2 - r_1}{r^2 \lambda}.$$

Локальное ограничение (1.13) заменим на эквивалентное интегральное ограничение

$$(2.7) \quad F_1[\mathbf{Z}, \gamma, \theta, r_1] = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \{\varphi(\dots) + |\varphi(\dots)|\} r^2 dr =$$

$$= \int_0^1 \Phi_1(x, \mathbf{Z}, \gamma, \theta, r_1) dx = 0.$$

Заметим, что функционал (2.7) имеет производную Фреше [9], так как подынтегральная функция  $|\varphi(\dots)|$ , представляющая собой модуль от условия пластичности Мизеса, в слоистой сфере может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой меры, состоящем из конечного числа точек.

Пусть теперь пара  $\{\theta(x), r_1\}$  — оптимальное управление из допустимого множества (1.10), (1.11), минимизирующее функционал (1.12) и удовлетворяющее ограничениям (1.17), (2.7). Рассмотрим возмущенное управление  $\{\theta^*(x), r_1 + \delta r_1\}$  [9]

$$(2.8) \quad \theta^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D, \quad g(x) \in U, \\ \theta(x), & x \notin D, \end{cases} \quad r_1 + \delta r_1 \in [a, b], \quad |\delta r_1| < \varepsilon$$

( $D \subset [0, 1]$  — множество малой меры,  $\text{mes}(D) < \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  — малая величина). Используя стандартную технику [9], можно получить главные части приращений функционалов (1.12), (1.17), (2.7) (для краткости аргументы функций, относящиеся к невозмущенному управлению  $\{\theta(x), r_1\}$ , опущены)

$$(2.9) \quad \delta F[\dots] = \int_D \{\Phi(\theta^*, \dots) - \Phi(\theta, \dots)\} dx + G \delta r_1,$$

$$\delta F_1[\dots] = \int_D \{M(\theta^*, \dots) - M(\theta, \dots)\} dx + G_1 \delta r_1,$$

$$\delta F_2[\dots] = - \int_D \{Q(\theta^*, r_1) - Q(\theta, r_1)\} dx - G_2 \delta r_1.$$

Здесь

$$M(x, \mathbf{Z}, \Psi, \gamma, \theta, r_1) = \Phi_1(x, \mathbf{Z}, \gamma, \theta, r_1) + \Psi^T(x) \cdot [A(x, \gamma, \theta, r_1) \cdot \mathbf{Z}(x) + \mathbf{B}(x, \theta, r_1)];$$

$$G = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} \Phi(x, \theta, r_1) dx, \quad G_1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} M(x, Z, \Psi, \gamma, \theta, r_1) dx,$$

$$G_2 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} Q(\bar{\theta}, r_1) dx;$$

вектор сопряженных переменных  $\Psi(x)$  удовлетворяет краевой задаче

$$(2.10) \quad \Psi'(x) = -A^T(x, \gamma, \theta, r_1) \cdot \Psi(x) - \left[ \frac{\partial}{\partial Z} \Phi_1(x, Z, \gamma, \theta, r_1) \right]^T,$$

$$\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0, \quad \psi_3(1) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \gamma} M(x, Z, \bar{\Psi}, \gamma, \theta, r_1) dx.$$

Составим теперь расширенный функционал

$$(2.11) \quad J[\theta, r_1] = F[\theta, r_1] + \lambda_4 F_1[Z, \gamma, \theta, r_1] + \lambda_1 \{F_2[\theta, r_1] + \xi_1^2\} +$$

$$+ \lambda_2 \{a - r_1 + \xi_2^2\} + \lambda_3 \{r_1 - b + \xi_3^2\}$$

( $\lambda_i, \xi_i^2$  — множители Лагранжа и штрафные переменные [10]). Вариацию функционала  $J[\theta, r_1]$  (2.11) с использованием выражений (2.9) можно представить в виде

$$(2.12) \quad \delta J[\dots] = \int_D \{H(\theta, \dots) - H(\theta^*, \dots)\} dx +$$

$$+ \{G + \lambda_4 G_1 - \lambda_1 G_2 + \lambda_3 - \lambda_2\} \delta r_1 + 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i \xi_i \delta \xi_i,$$

где

$$(2.13) \quad H(x, Z, \bar{\Psi}, \gamma, \theta, r_1) = -\Phi(x, \theta, r_1) - \lambda_4 M(x, Z, \Psi, \gamma, \theta, r_1) +$$

$$+ \lambda_1 Q(\theta, r_1).$$

Так как управление  $\{\theta(x), r_1\}$  является оптимальным (минимизирующим) управлением, для любых допустимых управлений  $\{\theta^*(x), r_1 + \delta r_1\}$  должно выполняться условие  $\delta J[\dots] \geq 0$ . Тогда из выражения (2.12) в силу произвольности вариаций  $\delta r_1, \delta \xi_i$  получаем соотношения [10]

$$(2.14) \quad G + \lambda_4 G_1 - \lambda_1 G_2 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

$$(2.15) \quad \lambda_1 F_2[\theta, r_1] = 0, \quad \lambda_1 \geq 0;$$

$$(2.16) \quad \lambda_2(a - r_1) = 0, \quad \lambda_3(r_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0$$

и в силу того, что множество малой меры  $D$  может быть почти всюду плотно расположено на отрезке  $[0, 1]$ , для почти всех  $x \in [0, 1]$  должно выполняться условие максимума для функции Гамильтона  $H(\dots)$  (2.13) по аргументу  $\theta$  [9]

$$(2.17) \quad H(x, Z, \bar{\Psi}, \gamma, \theta, r_1) = \max_{\theta^* \in U} H(x, Z, \Psi, \gamma, \theta^*, r_1).$$

Таким образом, получаем, что оптимальное управление  $\{\theta(x), r_1\}$  и соответствующие ему оптимальная траектория  $Z(x)$  и вектор сопряженных переменных  $\Psi(x)$  должны удовлетворять краевым задачам (2.6), (2.10), соотношениям и ограничениям (1.9)–(1.11), (1.17), (2.7), (2.15), (2.16) и условиям оптимальности (2.14), (2.17).

**3. Вычислительный алгоритм.** Основная идея прямого метода решения задач оптимального проектирования заключается в построении последовательности управлений  $\{\theta(x), r_1\}_j, j = 1, 2, \dots$ , минимизирующей целевой функционал (1.12). Для этого введем равномерной сетки  $\{x_i\}$  разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  отрезков  $\bar{D}_i$ , моделирующих множества малой меры. Зададим начальное управление  $\{\theta(x), r_1\}$  из допустимой области

1.9)–(1.11). Очевидно, что функция  $\theta(x)$  является кусочно-постоянной; участками постоянства  $D_i = [x_i, x_{i+1})$ , на которых она принимает значения из множества  $U$  (1.10). Следующее приближение  $\{\theta^*(x), r_1 + \delta r_1\}$  на некотором множестве  $D_i$  задается в виде (2.8)

$$3.1) \quad \theta^*(x) = \begin{cases} \theta_k, & x \in D_i, \quad \theta_k \in U, \\ \theta(x), & x \notin D_i; \end{cases}$$

$$3.2) \quad r_1 + \delta r_1 \in [a, b], \quad |\delta r_1| < \varepsilon$$

и определяется из линеаризованной оптимизационной задачи: найти на множестве  $D_i$  такое допустимое возмущение  $\{\theta_k, \delta r_1\}$ , которое обеспечивает максимальное убывание функционала  $F[\dots]$  (1.12) (или, что то же, минимум вариации  $\delta F[\dots]$  (2.9)) при условиях (3.1), (3.2) и линеаризованных ограничениях (1.17), (2.7)

$$3.3) \quad F_1[Z + \delta Z, \gamma + \delta\gamma, \theta^*, r_1 + \delta r_1] \approx F_1[Z, \gamma, \theta, r_1] + \delta F_1[Z, \gamma, \theta, r_1] = 0;$$

$$3.4) \quad F_2[\theta^*, r_1 + \delta r_1] \approx F_2[\theta, r_1] + \delta F_2[\theta, r_1] \leq 0,$$

где выражения для  $\delta F_1[\dots]$ ,  $\delta F_2[\dots]$  даются выражениями (2.9). Данная линеаризованная задача представляет собой вариант задачи, рассмотренной в пп. 1, 2. Отсюда непосредственно получаем, что оптимальное возмущение  $\{\theta_k, \delta r_1\}$  должно удовлетворять соотношениям

$$3.5) \quad \delta r_1 = -\tau \{G + \lambda_4 G_1 - \lambda_1 G_2 - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \tau \geq 0;$$

$$3.6) \quad \lambda_1 \{F_2[\theta, r_1] + \delta F_2[\theta, r_1]\} = 0, \quad \lambda_1 \geq 0;$$

$$3.7) \quad \lambda_2(a - r_1 - \delta r_1) = 0, \quad \lambda_3(r_1 + \delta r_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0$$

ограничениям (3.2)–(3.4).

Множители  $\tau, \lambda_2, \lambda_3$  в процессе численного счета находятся из (3.2), (3.7). Для определения наилучшей поправки  $\theta_k$  (3.1) реализуется один из двух вариантов.

А.  $G_1 \neq 0$ . Тогда из выражений (3.3), (3.5) получим

$$\delta r_1 = - \left\{ \int_{D_i} [M(\theta_k, \dots) - M(\theta, \dots)] dx + F_1[Z, \gamma, \theta, r_1] \right\} / G_1,$$

поправка  $\theta_k$ , минимизирующая вариацию  $\delta F[\dots]$  (2.9), находится из условия

$$\int_{D_i} H(x, Z, \Psi, \gamma, \theta_k, r_1) dx = \max_{\theta_j \in U} \int_{D_i} H(x, Z, \Psi, \gamma, \theta_j, r_1) dx$$

$$(H(x, Z, \Psi, \gamma, \theta_j, r_1) = -\Phi(x, \theta_j, r_1) + GM(x, Z, \Psi, \gamma, \theta_j, r_1)/G_1).$$

при этом кроме ограничений (3.2), (3.7) должно выполняться и (3.4).

Б.  $G_1 = 0$ . Предполагая, что выполняется точное равенство (3.4), из соотношений (3.4), (3.5) находим (в рассматриваемой задаче  $G_2 \neq 0$ )

$$\delta r_1 = - \left\{ \int_{D_i} [Q(\theta_k, r_1) - Q(\theta, r_1)] dx - F_2[\theta, r_1] \right\} / G_2.$$

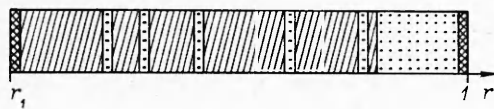
при этом множитель

$$\lambda_1 = \left\{ F_2[\theta, r_1] - \int_{D_i} [Q(\theta_k, r_1) - Q(\theta, r_1)] dx \right\} / (\tau G_2^2) + (G - \lambda_2 + \lambda_3)/G_2.$$

согласно условию (3.6),  $\lambda_1 \geq 0$ . Если  $\lambda_1 \geq 0$ , то поправка  $\theta_k$  определяется из выражения

$$\int_{D_i} H(x, \theta_k, r_1) dx = \max_{\theta_j \in U} \int_{D_i} H(x, \theta_j, r_1) dx$$

$$(H(x, \theta_j, r_1) = -\Phi(x, \theta_j, r_1) + GQ(\theta_j, r_1)/G_2)$$



Р и с. 1

с учетом ограничений (3.2), (3.7) и  $F_1[Z + \delta Z, \gamma + \delta\gamma, \theta^*, r_1 + \delta r_1] = 0$  (3.3). Если же  $\lambda_2 < 0$ , то предположение о выполнении точного равенства (3.4) неверно. Тогда ограничение (3.4) не учитывается, а поправка  $\{\theta_n, \delta r_1\}$  определяется из соотношений

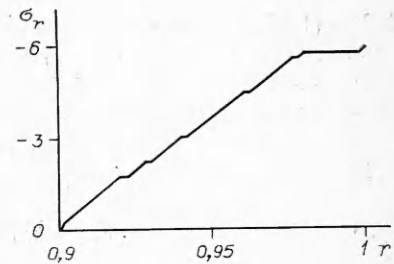
$$\delta r_1 = -\tau [G - \lambda_2 + \lambda_3], \quad \int_{D_i} \Phi(x, \theta_n, r_1) dx = \min_{\theta_j \in U_{D_i}} \int_{D_i} \Phi(x, \theta_j, r_1) dx$$

с учетом ограничений (3.2), (3.3), (3.7).

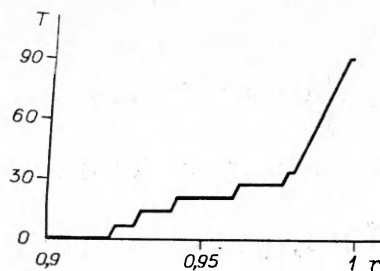
Построив таким образом новое управление  $\{\theta^*(x), r_1 + \delta r_1\}$ , принимаем его за начальное и строим следующее приближение. Процесс считается оконченным на данной сетке разбиения  $\{x_i\}$ , если управление  $\{\theta(x), r_1\}$  не изменяется ни на одном из множеств  $D_i$ .

**4. Пример.** Множество  $W$  состоит из пяти материалов, имеющих следующие механические и физические безразмерные характеристики (1.7)  $E = 270; 7100; 10\ 500; 21\ 000; 11\ 200$ ,  $\nu = 0,27; 0,3; 0,3; 0,3; 0,33$ ,  $\rho = 0,65; 2,85; 4,4; 7,8; 8,93$ ,  $\sigma_s = 4,5; 40; 60; 120; 20$ ,  $\alpha \cdot 10^6 = 100; 21,94; 8,4; 15; 16,7$ ,  $\lambda = 0,07; 155,4; 8,4; 45,4; 389,6$ ,  $k = 23,26$ . На внутренней поверхности сферы, радиус  $r_1$  которой может меняться в пределах отрезка  $[0,7; 0,91]$ , задавались  $p_1 = 0$  и  $T_1 = 0$ . На внешней поверхности сферы, радиус  $r_2$  которой считается фиксированным и равным единице, задавались  $p_2 = 6$  и теплообмен по закону Ньютона с температурой внешней среды  $T_2 = 100$ . В формуле (1.15) коэффициент  $s = 0,1$ . Изнутри и снаружи сфера покрыта тонкими (толщиной 0,002) неварьируемыми защитными слоями из третьего материала. Внутренняя варьируемая область сферы разбивалась по толщине на 48 равных частей, моделирующих множества  $D_i$ .

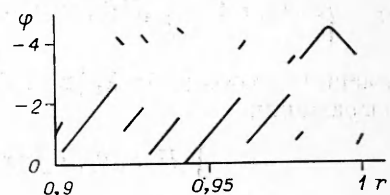
В качестве начального приближения взята четырехслойная сфера с  $r_1 = 0,9$ ,  $F = 0,2203$  и со слоями  $[0,9; 0,912]$  из третьего материала,  $[0,912; 0,972]$  из второго материала,  $[0,972; 0,998]$  из первого материала,  $[0,998; 1]$  из третьего материала. В результате оптимизации получена четырнадцатислойная сфера (в число слоев включены и два неварьируемых защитных слоя) с  $r_1 = 0,9015$  и  $F^* = 0,202$  (ограничение  $F_2 = -0$  (1.17)). На рис. 1 представлен разрез данной сферы по толщине. Сетки заштрихованы слои из третьего материала, линиями — из второго материала, точками — из первого материала. На рис. 2—4 приведены графики распределений в оптимальной сфере радиальных напряжений  $\sigma_r(r)$ , температуры  $T(r)$  и функции интенсивности напряжений  $\varphi(r)$  (1.13). Слой легкой «однородной» сферой, удовлетворяющей ограничениям на прочность (1.13) и устойчивость (1.14) при заданных  $p_1, p_2$  и  $T_1, T_2$ , является трехслойная сфера с  $r_1 = 0,91$  и  $F^* = 0,2398$ , внутренняя варьируема



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

область которой состоит из второго материала. Относительный выигрыш по весу для оптимальной сферы по сравнению с данной «однородной» составил  $(1 - F_*/F^*) \cdot 100\% = 15,8\%$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Оптимизация многослойных структур при прохождении волн // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 6.
2. Бабе Г. Д., Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимизация многослойных конструкций, подверженных периодическим температурным воздействиям // ДАН СССР.— 1983.— Т. 269, № 2.
3. Бабе Г. Д., Гусев Е. Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров.— Новосибирск: Наука, 1987.
4. Алехин В. В. Оптимизация слоистых тел при ограничении на основную частоту собственных колебаний // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 66.
5. Алехин В. В., Каниболотский М. А. Оптимизация массы слоистой сферы из конечного набора материалов // Механика композит. материалов.— 1986.— № 2.
6. Аптуков В. Н., Белоусов В. Л., Каниболотский М. А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композит. материалов.— 1986.— № 2.
7. Аннин Б. Д., Алехин В. В. Синтез слоистых композитов // VI Междунар. симп. о композиционных металлических материалах.— Высоки Татры — Стара Лесна, ЧССР, 1986.— Т. 1.
8. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов.— М.: Машиностроение, 1977.
9. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.
10. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: механические системы и конструкции.— М.: Мир, 1983.

Поступила 25/VII 1988 г.

УДК 539.376

### ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. Ю. Цвелодуб  
(Новосибирск)

В [1—6] исследовались некоторые обратные задачи, связанные с нахождением внешних воздействий, необходимых для получения в условиях ползучести за заданное время  $t_*$  требуемой остаточной формы тела или пластины с учетом упругой разгрузки в момент  $t - t_*$ . При этом предполагалось, что неизвестные внешние воздействия принадлежат определенному классу, например, в [2, 4, 5] рассматривались релаксационные задачи, когда в течение времени  $t_*$  неизвестные перемещения точек поверхности тела (неизвестные прогибы пластины) оставались фиксированными, в [1, 2] считались постоянными во времени внешние нагрузки и т. п.

В данной работе исследуется класс обратных задач о нахождении внешних нагрузок таких, которые бы обеспечивали заданную остаточную форму тела (пластины) в любой текущий момент времени. Для случая малых деформаций доказывается теорема единственности решения. Дана вариационная формулировка этих задач, основанная на нахождении стационарного значения некоторого функционала; при этом одновременно варьируются скорости перемещений и напряжений как текущих, так и остаточных (после упругой разгрузки). На конкретном примере сопоставляется решение задачи в точной постановке с решением, полученным с использованием указанного смешанного вариационного принципа.

1. Рассмотрим равномерно прогретое тело объема  $v$  с поверхностью  $S$ , определяющие уравнения деформирования которого запишем как

$$(1.1) \quad \varepsilon_{kl} = a_{klmn} \sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^c \quad (k, l = 1, 2, 3),$$

где  $\varepsilon_{kl}$ ,  $\varepsilon_{kl}^c$ ,  $\sigma_{kl}$ ,  $a_{klmn} = a_{mnhl}$  — компоненты тензоров полных деформаций, деформаций ползучести, напряжений и упругих податливостей соответственно; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Деформации считаются малыми, так что компоненты  $\varepsilon_{kl}$  выражаются через компоненты вектора перемещений  $u_k$  известными соотношениями Коши.