

УДК 532.583

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАВАЮЩЕГО ТЕЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

И. К. Тен

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается двумерная нестационарная задача о плавающем теле прямоугольной формы в слое жидкости конечной глубины. Вертикальные перемещения тела заданы. Задача исследуется в рамках линейной теории потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения движения жидкости сводятся к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода методом декомпозиции области течения. Полученная система исследована и решена численно методом редукции. Предложен метод решения задачи для потенциала скорости течения жидкости. Найдено распределение гидродинамических давления и силы, действующих на тело.

Введение. Задача о поведении плавающего тела является классической задачей корабельной гидродинамики. В настоящее время она становится актуальной в связи с проектированием плавающих аэродромов и стартовых площадок для космических ракет. Все работы на этих сооружениях имеет смысл проводить только тогда, когда их перемещения малы.

Малость отклонения плавающего тела от равновесного положения позволяет исследовать его движение в рамках линейной теории потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. В линейной теории граничные условия линеаризуются и сносятся на равновесное положение свободной границы жидкости и поверхность плавающего тела. В частности, предполагается, что при вычислении действующих на тело гидродинамических сил изменением смоченной части можно пренебречь. Несмотря на сделанные упрощения, задача остается достаточно сложной, так как форма погруженной части тела необязательно является канонической; гидродинамические силы зависят от глубины жидкости и истории процесса; течение жидкости описывается решением краевой задачи для потенциала скоростей в области сложной формы со смешанными условиями на ее границе; в рамках линейной теории возможно появление особенностей поля скорости на линиях смены типа граничного условия и в угловых точках поверхности тела.

Задачу можно решить только численными методами, однако для построения адекватного алгоритма необходимо учитывать особенности течения жидкости и движения тела.

Существует два метода построения решения рассматриваемой задачи. В первом методе (frequency-domain method) [1] используется преобразование Фурье по времени, при этом появляется новый параметр — частота. Окончательное решение находится с помощью обратного преобразования Фурье. Во втором методе (time-domain method) решается непосредственно нестационарная задача. Недостатком второго метода является то, что для определения неизвестных величин необходимо знать всю историю процесса. Это может существенно увеличить время счета. Ошибка начального этапа счета растет в течение

всего процесса вычисления. В то же время при использовании первого метода необходимо решать большое количество задач для различных значений частоты.

В последнее время возрос интерес к развитию второго метода. На основе фундаментального решения уравнения Лапласа в области течения строится функция Грина, и задача сводится к интегральным уравнениям по границе области. Важную роль в развитии данного метода сыграла работа [2]. В [3] проведен сравнительный анализ метода, предложенного в [2], и метода решения задачи в области частот на примере плавающего в жидкости конечной глубины вертикального кругового цилиндра. Решению задачи о плавающем теле методом граничных интегральных уравнений посвящено большое количество работ. В [4] исследована задача о взаимодействии жидкости и плавающей тонкой упругой пластины, на которую действует точечная нагрузка (модель посадки самолета на плавающий аэродром). В [5] решена задача о нахождении потенциала скорости для плавающего тела с наклонными боковыми стенками. В работе [6] предложен вариационный метод решения задачи о плавающем удлиненном теле.

При решении задачи методом граничных интегральных уравнений (методом граничных элементов) бесконечная область заменяется ограниченной. Для повышения точности результатов помимо уменьшения шага сетки необходимо расширить область счета, что существенно увеличивает время вычислений. В настоящей работе предлагается метод решения задачи в плоской постановке.

Постановка задачи. Рассматривается нестационарная задача о поведении плавающего тела в слое жидкости глубины H . Тело имеет форму удлиненного прямоугольного параллелепипеда. Дно считается ровным, осадка тела равна d' . Жидкость весома, идеальная и несжимаемая, ее течение потенциальное.

В случае удлиненного тела (поперечные размеры тела намного меньше продольного) можно использовать теорию плоских сечений [1]. Система координат расположена так, что ее начало лежит на уровне невозмущенной поверхности жидкости, ось Oz' проходит через центр тяжести тела, ось Oy' направлена вдоль тела (рис. 1). Тогда в каждом сечении $y' = \text{const}$ потенциал скорости Φ' можно рассматривать как функцию переменных x', z', t' .

Пусть прямоугольное тело длиной $2L'$ с осадкой d' совершает заданные вертикальные перемещения $z' = \xi'(t')$, амплитуда которых мала, причем $\xi'(0) = \dot{\xi}'(0) = 0$ (точка обозначает производную по времени). Введем безразмерные переменные следующим образом: $x' = xH$, $z' = zH$, $L' = LH$, $d' = dH$, $\xi'(t') = \xi(t)H$, $t' = t\sqrt{H/g}$, $\Phi' = H\sqrt{gH}\Phi(x, z, t)$, $p' = p\rho gH$, где $p(x, z, t)$ — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; Φ — потенциал скорости течения жидкости. Переменные со штрихом размерные, без штрихов — безразмерные.

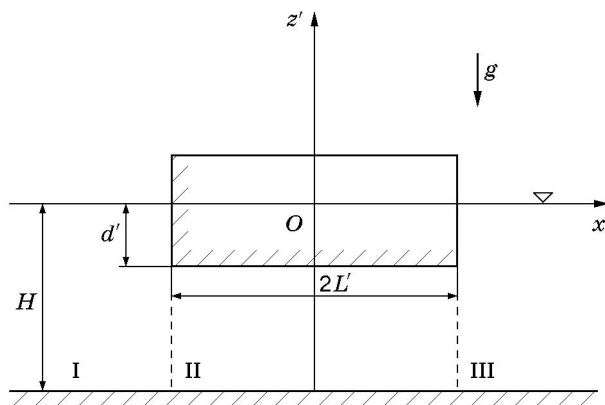


Рис. 1

В рамках линейной теории потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости уравнения движения, граничные условия и начальные данные в безразмерных переменных имеют вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, \quad (x, z) \in \Omega; \quad (1)$$

$$\Phi_x = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm L, \quad z \in [-d, 0]; \quad (2)$$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -1; \quad (3)$$

$$\Phi_z = \dot{\xi}(t) \quad \text{при} \quad z = -d, \quad |x| < L; \quad (4)$$

$$\Phi_{tt} + \Phi_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad |x| > L; \quad (5)$$

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \quad (6)$$

$$\Phi = \Phi_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (7)$$

где $\Omega = (((-\infty, -L) \cup (L, \infty)) \times [-1, 0]) \cup ([-L, L] \times [-1, -d])$. Уравнения (1)–(7) составляют начально-краевую задачу для потенциала скорости течения жидкости.

Метод декомпозиции. Система Вольтерра. Решение задачи (1)–(7) строится методом декомпозиции. Область течения разбивается на три части (рис. 1): I — левая внешняя область ($x < -L$); II — внутренняя область ($-L < x < L$); III — правая внешняя область ($x > L$).

Задача симметрична относительно оси Oz , при этом линия $x = 0$ является линией тока:

$$\Phi_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (8)$$

Поэтому задачу (1)–(7) достаточно решить для двух областей: $(x, z) \in [0, L] \times [-1, -d]$ (внутренняя задача) и $(x, z) \in [L, \infty) \times [-1, 0]$ (внешняя задача). На линии сопряжения двух областей должно выполняться условие непрерывности горизонтальной компоненты скорости и потенциала скорости. Пусть на линии сопряжения распределение горизонтальной скорости описывается некоторой функцией $f(z, t)$:

$$\Phi_x = f(z, t) \quad \text{при} \quad x = L, \quad z \in [-1, -d]. \quad (9)$$

Уравнения (1), (3), (4), (8), (9) составляют внутреннюю краевую задачу для потенциала скорости Φ с граничными условиями Неймана, уравнения (1)–(3), (5)–(7), (9) — внешнюю задачу. Решение задачи Неймана (1), (3), (4), (8), (9) существует при выполнении условия

$$\int_{-1}^{-d} f(\eta, t) d\eta + \dot{\xi}(t)L = 0. \quad (10)$$

Решая внутреннюю задачу методом Фурье, находим потенциал скорости $\Phi_I(x, z, t)$ в виде ряда

$$\Phi_I(x, z, t) = \frac{\dot{\xi}(t)}{2d_1} [(z+1)^2 - x^2] + \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(\lambda_n x)}{\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)} f_n(t) \cos(\lambda_n(z+1)), \quad (11)$$

где $\lambda_n = \pi n/d_1$; $d_1 = 1 - d$; f_n — коэффициенты разложения горизонтальной скорости $f(z, t)$ в ряд Фурье по полной ортогональной системе функций $\cos(\lambda_n(z+1))$, т. е.

$$f(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \cos(\lambda_k(z+1)). \quad (12)$$

Из условия (10) находим $f_0(t) = -(L/d_1)\dot{\xi}(t)$.

Сделаем замену переменной $x = \tilde{x} + L$. В переменных \tilde{x}, z правая внешняя область сдвинется влево на L , а сами уравнения не изменятся.

Потенциал скоростей $\Phi_{II}(\tilde{x}, z, t)$ при $\tilde{x} > 0$ ищется в виде суммы двух слагаемых φ_0 и φ , где φ_0 удовлетворяет условию (9). Условие (5) заменяется следующим:

$$\varphi_0 = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{x} > 0, \quad z = 0.$$

Для φ условие (9) заменяется однородным

$$\varphi_{\tilde{x}} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{x} = 0, \quad (13)$$

условие на свободной поверхности принимает вид

$$\varphi_{tt} + \varphi_z = -(\varphi_0)_z(\tilde{x}, z, t) \quad \text{при} \quad \tilde{x} > 0, \quad z = 0.$$

Аналогично внутренней задаче решение для φ_0 представляется в виде ряда

$$\varphi_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \exp(-\mu_n \tilde{x}) \beta_n(t) \cos(\mu_n(z+1)),$$

где $\mu_n = (\pi/2)(2n+1)$;

$$\beta_n(t) = \int_{-1}^{-d} f(\eta, t) \cos(\mu_n(\eta+1)) d\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Для нахождения функции $\varphi(\tilde{x}, z, t)$ продолжим ее симметрично относительно оси $\tilde{x} = 0$. Тогда условие непротекания (13) на этой линии будет выполняться автоматически, а условие на свободной поверхности примет вид

$$\varphi_{tt} + \varphi_z = -(\varphi_0)_z(|\tilde{x}|, z, t) \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (15)$$

С помощью прямого преобразования Фурье система уравнений (1), (3), (6), (15) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \varphi_{zz}^F - \zeta^2 \varphi^F &= 0, \\ \varphi_{tt}^F + \varphi_z^F &= h^F(\zeta, z, t) \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \varphi_z^F &= 0 \quad \text{при} \quad z = -1, \end{aligned}$$

где

$$h^F = - \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_0)_z(|\tilde{x}|, z, t) \exp(-i\zeta \tilde{x}) d\tilde{x} = -4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \zeta^2} \beta_n(t).$$

Решив эту систему с нулевыми начальными данными и применив обратное преобразование Фурье, получим

$$\varphi = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega} \frac{\text{ch}(\zeta(z+1))}{\text{ch} \zeta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu_n \beta_n(\tau)}{\mu_n^2 + \zeta^2} \right\} \exp(i\zeta \tilde{x}) d\tau d\zeta,$$

где $\omega^2 = \zeta \text{th} \zeta$. Используя (14) и таблицы рядов [7], можно показать, что выражение в

фигурных скобках равно $\frac{1}{2} \int_{-1}^{-d} f(\eta, \tau) \frac{\text{ch}(\zeta(\eta+1))}{\text{ch} \zeta} d\eta$. Окончательно имеем

$$\Phi_{II} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} \exp(-\mu_n \tilde{x}) \cos(\mu_n(z+1)) \beta_n(t) - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{-d} f(\eta, \tau) \frac{\operatorname{ch}(\zeta(\eta+1))}{\operatorname{ch} \zeta} d\eta \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega} \frac{\operatorname{ch}(\zeta(z+1))}{\operatorname{ch} \zeta} \exp(i\zeta \tilde{x}) d\zeta d\tau. \quad (16)$$

На линии $x = L$ потенциал скорости изменяется непрерывным образом, т. е. $\Phi_I = \Phi_{II}$. Приравнявая выражения (11) и (16) на линии $x = L$, получаем уравнение относительно функции $f(z, t)$

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{2d_1} [(z+1)^2 - L^2] + \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{\lambda_n \operatorname{th}(\lambda_n L)} \cos(\lambda_n(z+1)) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \cos(\mu_n(z+1)) \beta_n(t) - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{-d} f(\eta, \tau) \frac{\operatorname{ch}(\zeta(\eta+1))}{\operatorname{ch} \zeta} d\eta \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega} \frac{\operatorname{ch}(\zeta(z+1))}{\operatorname{ch} \zeta} d\zeta d\tau. \quad (17)$$

Подставляя разложение (12) для функции $f(z, t)$ в (14) и (17), получим

$$\beta_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{nk}, \quad \int_{-1}^{-d} f(\eta, t) \frac{\operatorname{ch}(\zeta(\eta+1))}{\operatorname{ch} \zeta} d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) D_k(\zeta),$$

где

$$T_{nk} = (-1)^k \frac{2}{\pi} \sin\left(\pi \frac{(2n+1)d_1}{2}\right) \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - (2k/d_1)^2}, \quad (18) \\ D_k(\zeta) = (-1)^k \frac{\zeta}{\zeta^2 + (\pi k/d_1)^2} \frac{\operatorname{sh}(\zeta d_1)}{\operatorname{ch} \zeta}.$$

Так как система $\{\cos(\lambda_n(z+1))\}_{n=0}^{\infty}$ является полной и ортогональной, то, умножая уравнение (17) на $\cos(\lambda_m(z+1))$ и интегрируя по z от -1 до $-d$, получим бесконечную систему интегральных уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$A\mathbf{f}(t) + \int_0^t S(t-\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau = \mathbf{F}(t), \quad (19)$$

$$\alpha_0(t) = -\frac{1}{1-d} \left(\mathbf{P}\mathbf{f}(t) + \int_0^t \mathbf{S}_0(t-\tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau \right) + F_0(t).$$

Здесь $A = \{A_{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$, $S = \{S_{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$ — симметричные матрицы с элементами

$$A_{km} = \frac{d_1}{2} \frac{1}{\lambda_m \operatorname{th}(\lambda_m L)} \delta_{km} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{nk} T_{nm}}{\mu_n}, \quad S_{km}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} D_k(\zeta) D_m(\zeta) d\zeta;$$

$$\mathbf{P} = \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{nk} T_{n0}}{\mu_n} \right\}_{k=1}^{\infty}; \quad F_0(t) = \dot{\xi}(t) \left(\frac{LP_{00}}{d_1^2} - \frac{d_1^2 - 3L^2}{6d_1} \right) + \frac{L}{d_1^2} \int_0^t \dot{\xi}(\tau) S_{00}(t-\tau) d\tau;$$

$$\mathbf{f} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}; \quad \mathbf{S}_0 = \{S_{k0}\}_{k=1}^{\infty}; \quad \mathbf{F} = \{F_m\}_{m=1}^{\infty};$$

δ_{km} — символ Кронекера. Компоненты вектора $\mathbf{F}(t)$ вычисляются по формулам

$$F_m(t) = \dot{\xi}(t) \left(\frac{L}{d_1} P_{0m} + (-1)^{m+1} \left(\frac{d_1}{\pi m} \right)^2 \right) + \frac{L}{d_1} \int_0^t \dot{\xi}(\tau) S_{0m}(t - \tau) d\tau.$$

Получена бесконечная система интегральных уравнений Вольтерра второго рода для определения коэффициентов разложения Фурье горизонтальной скорости на линии сопряжения внутренней и внешней областей.

Анализ системы. Заметим, что в выражении (18) для T_{nk} в знаменателе стоит разность, которая при некотором значении d (назовем его критической осадкой d_*) обращается в нуль. Тем не менее элементы ряда, входящего в A_{km} , в силу пределов

$$\lim_{d \rightarrow d_*(k)} \frac{\sin^2((\pi/2)d_1(2n+1))}{(2n+1)^2 - (2k/d_1)^2} = 0 \quad (k \neq m),$$

$$\lim_{d \rightarrow d_*(k)} \frac{\sin^2((\pi/2)d_1(2n+1))}{[(2n+1)^2 - (2k/d_1)^2]^2} = \frac{(\pi k)^2}{4(2n+1)^4} \quad (k = m)$$

особенностей не имеют.

Ядра системы (19) представляют собой интегралы по всей числовой оси. В силу четности подынтегральных функций эти интегралы можно заменить удвоенными интегралами только по положительной полуоси.

Отметим некоторые свойства функций $S_{km}(t)$. Во-первых, при увеличении одного из индексов функции $S_{km}(t)$ затухают, и начиная с некоторого M ($|S_{km}| \leq \varepsilon$ при $k, m > M$) можно положить $S_{km} \equiv 0$.

Во-вторых, $S_{km}(t)$ симметричны по своим индексам. Введем функции

$$S_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \frac{1}{\zeta^2 + (\pi k/d_1)^2} \frac{\text{sh}^2(\zeta d_1)}{\text{ch}^2 \zeta} d\zeta,$$

через которые элементы матрицы S_{km} при $k \neq m$ выражаются по формуле

$$S_{km}(t) = \frac{(-1)^{k+m}}{k^2 - m^2} (k^2 S_k(t) - m^2 S_m(t)).$$

Из последней формулы следует, что необходимо вычислять не $(M^2 + M)/2$ функций $S_{km}(t)$ (при $k \leq m$ в силу симметрии матрицы), а только $M + 1$ функций S_{kk} ($k = 0, 1, \dots, M$) и M функций S_k ($k = 1, 2, \dots, M$), т. е. $2M + 1$ функций.

В-третьих, при $t \rightarrow \infty$ функции $S_{km}(t)$ ведут себя как $O(t^{-4})$. В силу того что $S_{km}(t)$ выражаются через $S_k(t)$ линейно, достаточно показать справедливость этого утверждения для функций S_k .

Обозначим $G_k(\zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\zeta^2 + (\pi k/d_1)^2} \frac{\text{sh}^2(\zeta d_1)}{\text{ch}^2 \zeta}$ и сделаем замену переменной $\omega^2(\zeta) = \zeta \text{th} \zeta$. В окрестности нуля ω ведет себя как ζ , а на бесконечности — как $\sqrt{\zeta}$. Пусть $g_k(\omega) = G_k(\zeta(\omega))$, тогда

$$S_k(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} G_k(\zeta) d\zeta = \int_0^{\infty} \frac{g_k(\omega)}{\omega \omega'} \sin(\omega t) d\omega \quad (20)$$

(штрих обозначает производную по ζ).

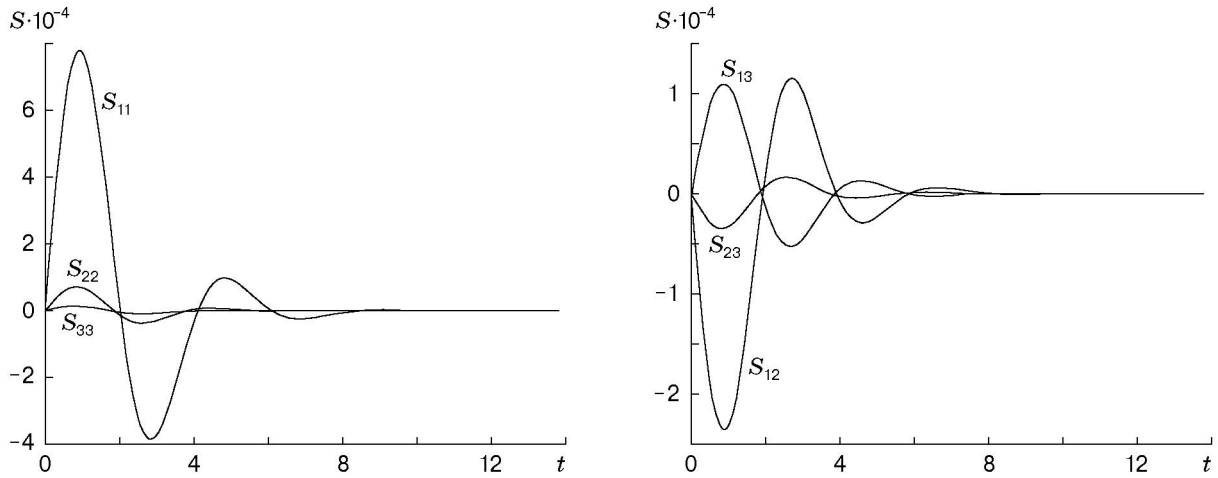


Рис. 2

Обозначим $h(\omega) \equiv g_k(\omega)/(\omega\omega')$ и рассмотрим два предельных случая. В окрестности нуля $h(\omega) \approx 2d_1^4\omega/(\pi^3k^2)$, т. е. $h(\omega) = O(\omega)$ и $h'(0) = 2d_1^4/(\pi^3k^2) < \infty$. В окрестности бесконечно удаленной точки $h(\omega) \approx (4/\pi)\omega^{-4}$, т. е. $h(\omega) = O(\omega^{-4})$ и $h^{(N)}(\omega) = O(\omega^{-(N+4)})$ при $N > 1$.

Интегрируя по частям (20) и учитывая поведение функции $h(\omega)$ и ее производных, покажем, что

$$S_k(t) = \frac{1}{t^4} \int_0^\infty \sin(\omega t) h^{(4)}(\omega) d\omega = O(t^{-4}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Начиная с некоторого момента T , такого что $|S_k(t)| \leq \varepsilon$ при $t \geq T$, можно положить $S_k(t) \equiv 0$ при $t \geq T$.

Проведенные расчеты для матрицы $S(t)$ при $0 \leq t \leq 20$ (шаг равен 0,1) и осадке $d = 0,4$ показывают, что при $t > 10$ можно положить $S(t) \equiv 0$ (рис. 2). На рис. 2 видно уменьшение амплитуды с увеличением номера элемента матрицы.

Численное решение. Для определения вектора \mathbf{f} система Вольтерра (19) решается методом редукции: $\mathbf{f} = \{f_k(t)\}$ при $k = 1, 2, \dots, M$ и $f_k \equiv 0$ при $k > M$. Интегралы аппроксимируются по формуле трапеций. Учитывая, что в начальный момент времени $f(z, 0) = 0$, получаем расчетные формулы

$$\mathbf{f}(0) = 0, \quad \mathbf{f}(N\Delta\tau) = A^{-1}\mathbf{F}(N\Delta\tau) - A^{-1} \sum_{n=1}^{N-1} S((N-n)\Delta\tau)\mathbf{f}(n\Delta\tau),$$

$$\alpha_0(N\Delta\tau) = -\frac{1}{1-d} \left(\mathbf{P}\mathbf{f}(N\Delta\tau) + \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{S}_0((N-n)\Delta\tau)\mathbf{f}(n\Delta\tau)\Delta\tau \right) + F_0(N\Delta\tau).$$

Из анализа численных расчетов, проведенных при $d = 0,4$ для закона движения тела $\xi(t) = (1 - \exp(-t)) \sin t$, следует, что через некоторый промежуток времени решение становится почти гармоническим по времени с периодом 2π .

В окрестности угловой точки тела $(L, -d)$ потенциал скорости Φ ведет себя как $O(r^{2/3})$, где $r^2 = (x-L)^2 + (z+d)^2$. Функция $f(z, t)$ является горизонтальной скоростью на линии $x = L$, следовательно, она имеет особенность вида $(z+d)^{-1/3}$ при $z \rightarrow -d - 0$. Легко показать, что коэффициенты $f_n(t)$ с увеличением номера должны затухать как

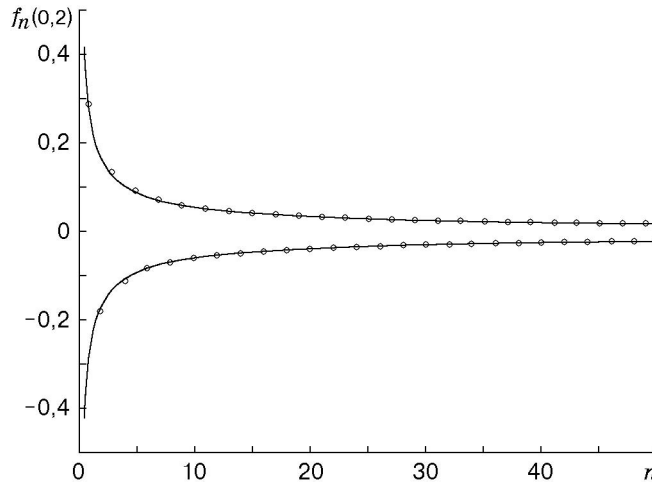


Рис. 3

$O(n^{-2/3})$. При больших значениях n величины $f_n(0,2)$ (рис. 3) ведут себя как $Cn^{-2/3}$, где $C = 0,265621$. На рис. 3 точками показаны значения $f_n(0,2)$ при $n = 1, 2, \dots, 50$, линиями — функции $\pm Cn^{-2/3}$. Видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с теоретическими.

Гидродинамические сила и давление. На днище тела давление вычисляется по формуле $p_b(x, t) = -\xi(t) - (\Phi_1)_t(x, -d, t)$. Здесь первое слагаемое — гидростатическая компонента давления, второе — динамическая компонента. В выражение для давления не входит постоянная часть, соответствующая силе Архимеда, так как эта часть давления уравновешивается силой тяжести. Из выражения для динамической компоненты давления

$$(\Phi_1)_t(x, -d, t) = \frac{\ddot{\xi}(t)}{2d_1}(d_1^2 - x^2) + \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n x)}{\operatorname{sh}(\lambda_n L)} \dot{f}_n(t)$$

следует, что необходимо знать производные функций $f_n(t)$. Эти производные аппроксимируются центральными разностями, за исключением производной в нуле, которая аппроксимируется разностью вперед. Сила, действующая на тело со стороны жидкости, равна интегралу по дну тела от давления.

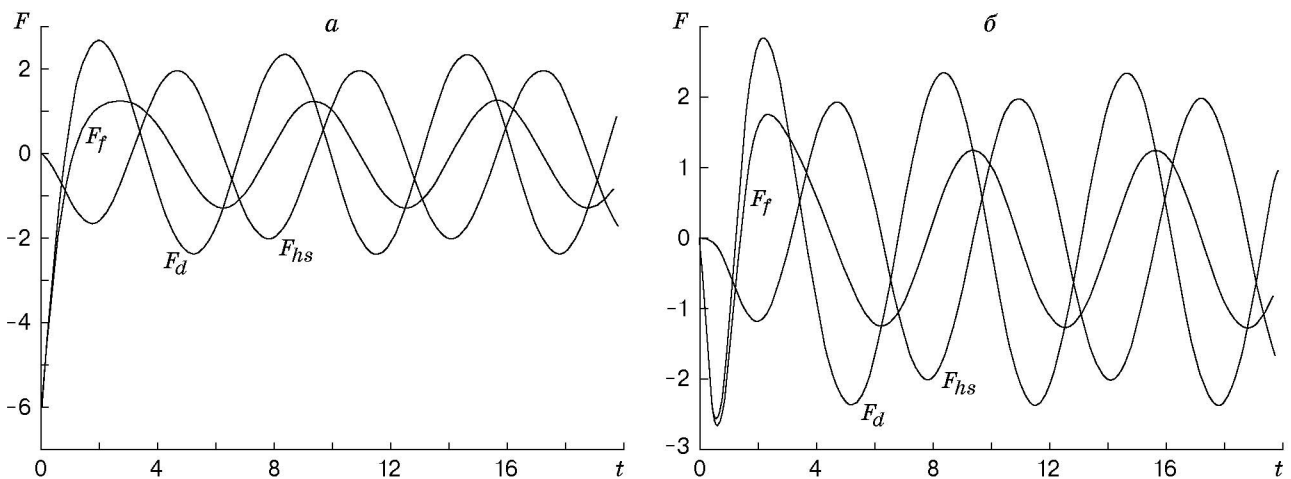


Рис. 4

Проведены численные расчеты силы для двух законов движения тела: $\xi(t) = (1 - \exp(-t)) \sin t$ (рис. 4,а) и $\xi(t) = (1 - \exp(-t))^3 \sin t$ (рис. 4,б). На рис. 4 представлены зависимости гидродинамических сил от времени (F_d — динамическая компонента силы, F_{hs} — гидростатическая компонента силы, F_f — полная сила (сумма гидростатической и динамической компонент)). Заметим, что различие наблюдается только на начальном этапе, когда уравнения движения имеют разную гладкость и сила пропорциональна второй производной функции движения.

Таким образом, изложенный метод является устойчивым и позволяет описать воздействие жидкости на плавающее тело.

Автор выражает благодарность А. А. Коробкину за постановку задачи, руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ньюмен Дж.** Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985.
2. **Cummins W. E.** The impulse response function and ship motions // Schiffstechnik. 1962. Bd 9, N 47. S. 101–109.
3. **Johansson M.** Transient motions of large floating structures. Göteborg: Chalmers Univ. of Technol., 1986. (Report. Ser. A14).
4. **Watanabe E., Utsunomiya T.** Transient response analysis of a VLFS at airplane landing // Proc. of the Intern. workshop on very large floating structures, Hayama, Kanagawa (Japan), Nov. 25–28, 1996. Hayama, Kanagawa: Ship Res. Inst.; Shonan Village Center, 1996. P. 243–247.
5. **Duan W., Dai Y.** Hydrodynamic analysis of non-wallsided floating body by time-domain method // Proc. OMAE. 1997. V. 1A. P. 251–257.
6. **Xia J., Wang Z.** Time-domain hydroelasticity theory of ship responding to waves // J. Ship Res. 1997. V. 41, N 4. P. 286–300.
7. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды, элементарные функции. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 20/IV 2001 г.
