

УДК 532.51

ОБ ОДНОМ ТИПЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Ж. Л. Мальцева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача об уединенных волнах на границе раздела двух жидкостей. Строится равномерное асимптотическое разложение для уединенных внутренних волн с уплощенными вершинами (типа плато), в пределе вырождающихся в бор. Показано, что в этом случае амплитуда волны в отличие от волны Кортевега — де Фриза имеет одинаковый порядок малости с длинноволновым параметром.

Классификация возможных типов стационарных волн в двухслойной жидкости под крышкой дана в [1, гл. 1] в рамках модели второго приближения теории мелкой воды и в [2] на основе уравнений Кортевега — де Фриза с квадратичной и кубической нелинейностью. Существование уединенных волн в двухслойной жидкости в точной постановке доказано в [3, 4]. Существование решений типа бора для уравнений Эйлера доказано в [5, 6].

В [7, 8] численно изучена ветвь уединенных волн в двухслойных течениях без сдвига скорости, переходящих в бор при стремлении амплитуды и скорости к критическим значениям. В [9] эта ситуация проанализирована полуаналитическими методами на основе длинноволнового приближения девятого порядка точности по амплитудному параметру.

1. Исходные уравнения. Рассматривается плоское безвихревое установившееся течение двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Предполагается, что на бесконечности скорости слоев жидкости равны U_i , $i = 1, 2$ (индекс 1 относится к нижнему слою, индекс 2 — к верхнему). Область, занимаемая жидкостью, — полоса шириной $H = H_1 + H_2$, разделенная линией контактного разрыва γ_1 на две криволинейных полосы Ω_i . Снизу жидкость ограничена плоским дном ($\gamma_0: y = 0$), сверху — плоской крышкой ($\gamma_2: y = H$).

Уравнения движения, записанные в терминах функции тока, имеют вид

$$\begin{aligned}
 \psi_{xx} + \psi_{yy} &= 0 && \text{в } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\
 \psi &= 0 && \text{на } \gamma_0, \\
 \psi = Q_1, \quad [\rho(\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2gy - 2b)] &= 0 && \text{на } \gamma_1, \\
 \psi &= Q_1 + Q_2 && \text{на } \gamma_2, \\
 \psi &\rightarrow \psi_0, \quad \nabla\psi \rightarrow \nabla\psi_0, && |x| \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок величины на границе раздела слоев; $Q_i = U_i H_i$, ρ_i — расходы и плотности в слоях соответственно; b — постоянная Бернулли;

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 43 СО РАН «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости» при поддержке программы «Ведущие научные школы» (код проекта 96-15-96283).

ψ_0 — функция тока невозмущенного кусочно-постоянного течения:

$$\psi_0 = \begin{cases} yQ_1/H_1, & 0 < y < H_1, \\ Q_1 + (y - H_1)Q_2/H_2, & H_1 < y < H. \end{cases}$$

Задача состоит в нахождении нетривиального решения, отличного от этого течения.

Введем безразмерные переменные, выбирая в качестве масштаба для линейных величин H_1 , а для функции тока Q_1 в нижнем слое и Q_2/r в верхнем, где $r = H_2/H_1$. Характерными безразмерными параметрами задачи являются числа Фруда

$$Fr_i^2 = \frac{\bar{U}_i^2}{gH} \frac{\rho_i}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Преобразование Мизеса $(x, y) \rightarrow (x, \psi)$ переводит область течения в двойную полосу

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \quad \Pi_1 = (0, 1) \times \mathbb{R}, \quad \Pi_2 = (1, 1+r) \times \mathbb{R},$$

где r — отношение невозмущенных глубин слоев.

Уравнение линий тока ищем в виде

$$y = \psi + \varepsilon w(\bar{x}, \psi), \quad \bar{x} = \varepsilon x,$$

где ε — длинноволновый параметр, который будет определен ниже.

В безразмерных переменных система уравнений для w примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 w_{xx} + w_{\psi\psi} &= \operatorname{div} \mathbf{Q}(\nabla w, \varepsilon), & 0 < \psi < 1, \quad 1 < \psi < 1+r, \\ w &= 0, & \psi = 0, \quad \psi = h, \\ [w] &= 0, \quad [Fr^2 w_\psi] + h^{-1}w = [Fr^2 Q_2(\nabla w)], & \psi = 1, \\ w &\rightarrow 0, \quad \nabla w \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) = \left(\frac{\varepsilon^3 w_x w_\psi}{1 + \varepsilon w_\psi}, \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3 w_x^2 + 3\varepsilon w_\psi^2 + 2\varepsilon^2 w_\psi^3}{(1 + \varepsilon w_\psi)^2} \right),$$

$Fr = Fr_i$ в Π_i .

2. Предварительный анализ. Задача (2), линеаризованная на кусочно-постоянном потоке с заданными величинами Fr_i и r , имеет решения в виде элементарных волновых пакетов

$$w(x, \psi) = W(\psi) e^{-i\alpha x},$$

если α связано с параметрами основного течения дисперсионным соотношением

$$\Delta(\alpha) \equiv Fr_1^2 \alpha \operatorname{cth} \alpha + Fr_2^2 \alpha \operatorname{cth}(r\alpha) - (r+1)^{-1} = 0. \quad (3)$$

Вещественные корни уравнения (3) существуют только при условии

$$Fr_1^2 + r^{-1} Fr_2^2 \leq (1+r)^{-1}. \quad (4)$$

Это неравенство определяет спектр линейных волн. Область, соответствующая неравенству (4), на рис. 1 заштрихована. Граница спектра состоит из точек бифуркации для решений задачи — в них происходит ответвление стационарных длинных волн от кусочно-постоянного течения. В частности, в [1, 6] показано, что при

$$|Fr_1| + |Fr_2| = 1 \quad (5)$$

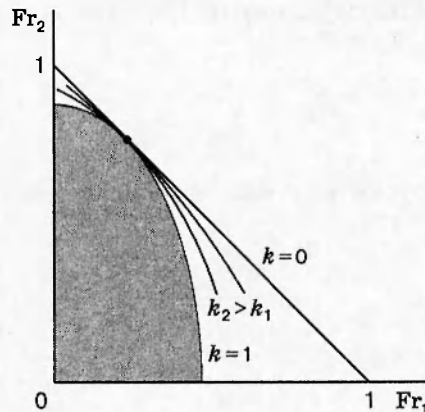


Рис. 1

существует однопараметрическое решение нелинейной задачи в виде бора. Будем изучать семейство решений для пар чисел Фруда (Fr_1, Fr_2) , лежащих в сверхкритической области (вне эллипса) в окрестности точки

$$(\overset{0}{F}_1, \overset{0}{F}_2) = (1/(1+r), r/(1+r)). \tag{6}$$

Введем параметризацию $(Fr_1, Fr_2) \mapsto (\varepsilon, k)$ по следующему правилу. Обозначим через ε наименьший положительный корень уравнения

$$Fr_1^2 \varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon + Fr_2^2 \varepsilon \operatorname{ctg} (r\varepsilon) - (r+1)^{-1} = 0. \tag{7}$$

Для точек (Fr_1, Fr_2) , лежащих вне эллипса (4), дисперсионная функция $\Delta(\varkappa)$ имеет только чисто мнимые комплексно-сопряженные корни. При этом $\varkappa = \pm i\varepsilon$ — корни, ближайшие к вещественной оси. Параметр ε является показателем экспоненциального убывания решения на бесконечности. Соотношение (7) является аналогом формулы Стокса для уединенных поверхностных волн $Fr^2 = \operatorname{tg} \varepsilon / \varepsilon$.

Семейство линий уровня второго параметра k состоит из эллипсов

$$\left(kFr_1 + \frac{1-k}{r+1}\right)^2 + \frac{1}{r} \left(kFr_2 + \frac{r(1-k)}{r+1}\right)^2 - \frac{1}{r+1} = 0, \tag{8}$$

каждый из которых касается сторон квадрата (5) в точке (6). При изменении k от 0 до 1 эти эллипсы заполняют криволинейные секторы между прямой $Fr_1 + Fr_2 = 1$ и эллипсом (4) (рис. 1).

Параметризация (7), (8) имеет особенность в точке $(\overset{0}{F}_1, \overset{0}{F}_2)$, что отражает специфику поведения решения в ее окрестности. Для чисел Фруда справедливо разложение в ряды по степеням ε

$$Fr_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_i^n,$$

где коэффициенты рядов выражаются по формулам

$$\begin{aligned} F_1^1 &= \frac{1}{\theta(1+r)\sqrt{1-k}}, & F_2^1 &= -F_1^1, \\ F_1^2 &= \frac{1}{6} \frac{2r^2 + kr^2 - 2r - kr + k}{(k-1)(r+1)}, & F_2^2 &= \frac{1}{6} \frac{r(r^2k - 2r - kr + k + 2)}{(k-1)(r+1)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\theta = \sqrt{3(r+1)/(r(r^3+1))}$.

3. Коэффициенты ряда возмущений. Подстановка в (2) w в виде ряда по степеням ε

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n$$

приводит к последовательности систем уравнений для коэффициентов w_n

$$w_n \psi \psi = g_n \quad \text{в } \Pi_i; \quad (10)$$

$$w_0 = 0 \quad \text{при } \psi = 0, h; \quad (11)$$

$$[w_n] = 0 \quad \text{при } \psi = 1; \quad (12)$$

$$\Lambda w_n = \varphi_n \quad \text{при } \psi = 1, \quad (13)$$

где дифференциальный оператор Λ имеет вид

$$\Lambda w = \overset{0}{F^2} w_\psi(x, 1+0) - \overset{0}{F^2} w_\psi(x, 1-0) + h^{-1} w(x, 1),$$

правые части уравнений (10)

$$g_0 = 0, \quad g_1 = \frac{3}{2} (w_{0\psi}^2)_\psi, \quad g_2 = -w_{0xx} + (3w_{0\psi} w_{1\psi} - 2w_{0\psi})_\psi,$$

$$g_n = -w_{n-2,xx} + [3(w_{0\psi} w_{n-1,\psi} + w_{1\psi} w_{n-2,\psi}) - 8w_{0\psi}^2 w_{n-2,\psi}]_\psi + f_1(w_0, \dots, w_{n-3}),$$

а правые части (13) представляются в виде

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = -[2 \overset{0}{F} \overset{1}{F} w_{0\psi}] + \left[\frac{3}{2} w_{0\psi}^2 \overset{0}{F^2} \right],$$

$$\varphi_2 = -[\overset{1}{F^2} w_{0\psi} + 2 \overset{0}{F} \overset{1}{F} w_{1\psi} + 2 \overset{0}{F} \overset{2}{F} w_{0\psi}] + [3 \overset{0}{F^2} w_{0\psi} w_{1\psi} - 2 \overset{0}{F^2} w_{0\psi}^3 + 3 \overset{0}{F} \overset{1}{F} w_{0\psi}^2],$$

$$\begin{aligned} \varphi_n = & [6 \overset{0}{F} \overset{1}{F} w_{0\psi} w_{n-2,\psi} + 3 \overset{0}{F^2} (w_{0\psi} w_{n-1,\psi} + w_{1\psi} w_{n-2,\psi}) - 6 \overset{0}{F^2} w_{0\psi}^2 w_{n-2,\psi}] - \\ & - [2 \overset{0}{F} \overset{1}{F} w_{n-1,\psi} + (2 \overset{0}{F} \overset{2}{F} + \overset{1}{F^2}) w_{n-2,\psi}] + f_2(w_0, \dots, w_{n-3}). \end{aligned}$$

Решения уравнений (10)–(13) для $n = 1$ и $n = 2$ имеют вид

$$w_0(x, \psi) = C_0(x)W(\psi), \quad w_1(x, \psi) = C_1(x)W(\psi),$$

где

$$W = \begin{cases} \psi, & 0 < \psi < 1, \\ (\psi - h)/(1 - h), & 1 < \psi < h, \end{cases}$$

$h = 1 + r$, а функции $C_0(x)$ и $C_1(x)$ остаются неопределенными и находятся из условия совместности уравнений последующих приближений.

Для $n \geq 2$ решения уравнений (10)–(13) имеют структуру

$$w_n(x, \psi) = C_n(x)W(\psi) + C_{n-2}(x)W_1(\psi) + f(C_0, \dots, C_{n-3}),$$

где

$$W_1 = \begin{cases} \psi^3/6, & 0 < \psi < 1, \\ (\psi - h)^3/(6r^2), & 1 < \psi < h. \end{cases}$$

Уравнение для функции $C_0(x)$ следует из (13) для $n = 2$:

$$C_0'' = P_3(C_0), \quad P_3(C_0) = \frac{6h}{r(r^3+1)} C_0^3 - \frac{9h^2}{r(r^3+1)} F_1 C_0^2 + C_0. \quad (14)$$

Отсюда

$$C_0 = a \frac{1 - \operatorname{th}^2(x/2)}{\theta(a^2 - \operatorname{th}^2(x/2))},$$

где $a + 1/a = \pm 2/\sqrt{1-k} = \pm 2(1+r) F_1 \theta$. Знак «+» соответствует волне повышения, «-» — волне понижения уровня.

Функции C_n последующих приближений получаются из рекуррентной последовательности уравнений

$$C_n'' - P_3'(C_0)C_n = f_n(C_0, \dots, C_{n-1}). \quad (15)$$

В [10] для бессдвигового течения показано, что любое решение исходной задачи о внутренних волнах с симметричными условиями на бесконечности является симметричным относительно вертикальной оси. Четное решение уравнения (15) определяется единственным образом и имеет вид

$$C_n = -u_1 \int_0^x f_n u_2 dx - u_2 \int_x^{+\infty} f_n u_1 dx.$$

Здесь $u_{1,2}$ — базисные решения однородного уравнения, $u_1 = C_0'$, а u_2 выражается через u_1 по формуле Лиувилля и имеет вид

$$u_2 = \frac{\beta_1 \operatorname{ch} 3x + \beta_2 \operatorname{ch} 2x + \beta_3 x \operatorname{sh} x + \beta_4}{(\beta_5 + \beta_6 \operatorname{ch} x)^2},$$

где $\beta_1 = (a^6 + 3a^4 + 3a^2 - 1)(a^2 - 1)$; $\beta_2 = 16(a^2 - 1)^3(a^2 + 1) - 65a^8 + 4a^6 - 6a^4 + 4a^2 - 65$; $\beta_3 = (60a^6 + 12a^4 - 12a^2 - 60)(a^2 - 1)$; $\beta_4 = (-80a^6 - 48a^4 - 48a^2 + 80)(a^2 - 1)$; $\beta_5 = \sqrt{16a(a^2 - 1)/\theta(a^2 + 1)}$; $\beta_6 = \sqrt{16a(a^2 - 1)/\theta(a^2 - 1)}$.

Для $n = 1$ имеем $f_1 = k_4 C_0^4 + k_3 C_0^3 + k_2 C_0^2$ с коэффициентами

$$k_2 = \frac{(1-r)(r^2 - kr + 2r + 1)}{2\theta^2 r^2 (r+1)^2 (k-1)}, \quad k_3 = \frac{4}{\theta^3 r (r+1) \sqrt{1-k}} \frac{1-r^3}{r^2 + r^5}, \quad k_4 = \frac{5(r^3 - r^2 + r + 1)}{2r^3 (1+r^3) \theta^2 (r+1)}.$$

Отсюда для C_1 получаем представление

$$C_1 = \frac{\alpha_1 \operatorname{ch} x + \alpha_2 \operatorname{sh} x \cdot (\ln [(a - \operatorname{th}(x/2))/(a + \operatorname{th}(x/2)])] + \alpha_3}{(a^2 - 1) \alpha_4 (a^2 + 1 + (a^2 - 1) \operatorname{ch} x)^2},$$

где

$$\alpha_1 = k_2 \frac{20a^2}{\theta^4} (1 + a^2) + k_3 \frac{30a^3}{\theta^5} + k_4 \frac{12a^2(1 + a^2)}{\theta^6},$$

$$\alpha_2 = 6k_4 a (a^2 - 1)^2 / \theta^6, \quad \alpha_3 = 4a^2 (a^2 - 1) (5k_2 - 3k_4 / \theta^2) / \theta^4, \quad \alpha_4 = 15r(r + 1).$$

Графики функций C_0, C_1 для $r = 1, 2, a = 1,0001$ представлены на рис. 2.

4. Анализ решения. Рассмотрим предельные режимы течений в зависимости от параметра k .

Граница раздела слоев в полученном приближении представляется формулой

$$y = 1 + \varepsilon a \frac{1 - \operatorname{th}^2(\varepsilon x/2)}{\theta(a^2 - \operatorname{th}^2(\varepsilon x/2))} + \varepsilon^2 C_1(x) + O(\varepsilon^3).$$

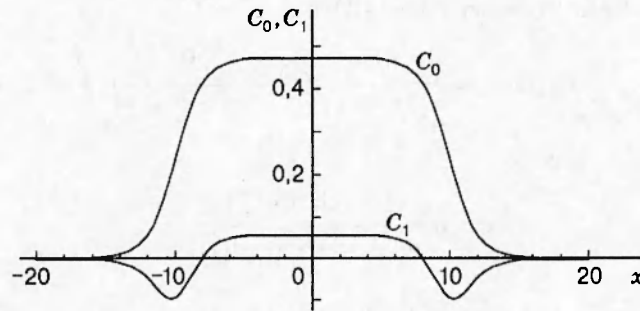


Рис. 2

При фиксированном значении параметра a или k амплитуда волны имеет одинаковый порядок с ε . В пределе $a \rightarrow 1$, когда точка (Fr_1, Fr_2) в плоскости чисел Фруда приближается к прямой $Fr_1 + Fr_2 = 1$, амплитуда остается ограниченной. Вершина уединенной волны при этом уплощается, а ее фронт, находящийся вблизи точки с абсциссой $x = a \ln[(a-1)/(a+1)]$, трансформируется в бор (рис. 3). Здесь a_1, a_2 — различные значения параметра a .

В другом предельном случае $a^{-1} \sim \varepsilon \rightarrow 0$ получаем уединенную волну Кортвега — де Фриза

$$y = 1 + \varepsilon^2 \theta^{-1} \text{ch}^{-2}(\varepsilon x) + o(\varepsilon^2).$$

Можно установить связь параметров (ε, k) с геометрическими параметрами течения, например с амплитудой A . При этом в качестве дополняющего второго параметра удобно взять ширину фронта волны L , которую определим как разницу абсцисс точек пересечения касательной к волне в точке перегиба с прямыми $y = 0$ и $y = 1/a$ (рис. 3), $0 < L \leq 4$. Отметим, что если через точку касания провести вертикальную прямую, то площади криволинейных треугольников S_1 и S_2 , ограниченных графиком функции C_0 и его асимптотами, равны. В первом приближении справедливы формулы

$$a = 2 - L/4, \quad \varepsilon = A(2 - L/4) \sqrt{3(r+1)/(r^4+r)}.$$

В переменных (A, L) числа Фруда имеют вид

$$Fr_1 = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{32} \frac{80 - 16L + L^2}{r+1} A + O(A^3), \quad Fr_2 = \frac{r}{r+1} - \frac{1}{32} \frac{80 - 16L + L^2}{r+1} A + O(A^3).$$

При $L = 4$, что соответствует бору,

$$Fr_1 = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+1} A + O(A^3), \quad Fr_2 = \frac{r}{r+1} - \frac{1}{r+1} A + O(A^3).$$

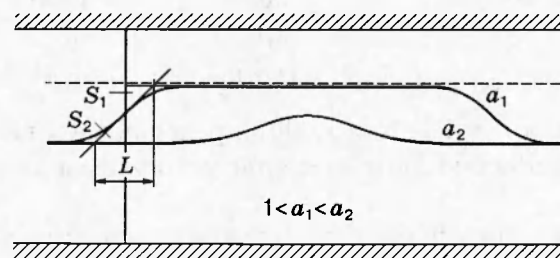


Рис. 3

Эффективная длина уединенной волны, равная расстоянию между точками перегиба на фронтах волны, в этих переменных представляется формулой

$$l = \frac{8 - L}{2} \ln \frac{12 - L}{4 - L}.$$

Выводы. Таким образом, указан алгоритм построения равномерной асимптотики для решения задачи о внутренних волнах в двухслойной жидкости под крышкой. Найденное приближение может быть использовано для доказательства теоремы существования точного решения, дающей обоснование проведенного построения. Рассмотренное в данной работе семейство уединенных внутренних волн интересно тем, что при фиксированной амплитуде не возникает ограничений на эффективную длину волны. Как следствие такие волны могут переносить сколь угодно большое количество энергии.

Автор выражает благодарность Н. И. Макаренко за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
2. **Funakoshi M.** Long internal waves in a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54, N 7. P. 2470–2476.
3. **Хабахпашева Т. И.** Уединенные волны в двухслойной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 69. С. 96–122.
4. **Amick C. J., Turner R. E. L.** A global theory of internal solitary waves in two-fluid systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 289, N 2. P. 431–484.
5. **Amick C. J., Turner R. E. L.** Small internal waves in two-fluid systems // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 108, N 2. P. 111–139.
6. **Makarenko N. I.** Smooth bore in a two-layer fluid // Intern. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 195–204.
7. **Funakoshi M., Oikawa M.** Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1986. V. 55, N 1. P. 128–144.
8. **Turner R. E. L., Vanden-Broeck J.-M.** Broadening of interfacial solitary waves // Phys. Fluids. 1988. V. 31, N 9. P. 2486–2490.
9. **Mirie R. M., Pennell S. A.** Internal solitary waves in a two-fluid system // Phys. Fluids A. 1989. V. 1, N 6. P. 986–991.
10. **Craig W., Sternberg P.** Symmetry of the free-surface flows // Arch. Rational Mech. Anal. 1992. V. 118, N 1. P. 1–36.

Поступила в редакцию 1/IV 1998 г.