

УДК 533.9+518.517.948+533.605

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ В ОДНОМЕРНОМ СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ МЕТОДАМИ ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

А. В. Лихачев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложен новый метод измерения поля скорости в одномерном стационарном потоке, основанный на принципах лазерно-индуцированной флюоресценции в сочетании с эмиссионной томографией. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: эмиссионная томография, диагностика потоков, лазерно-индуцированная флюоресценция.

ВВЕДЕНИЕ

Измерение поля скорости в потоке, как правило, осуществляется с использованием лазерных анемометров (см., например, [1–3]). В этих приборах в исследуемой области потока создается зондирующее интерференционное поле. Измерение заключается в формировании в рассеянном свете его изображения или фурье-образа, которые затем преобразуются в электрический сигнал и анализируются. Вопросы рассеяния света движущимися вместе с потоком частицами рассматривались, в частности, в [4, 5]. В [6] обсуждаются алгоритмы обработки сигналов в лазерной анемометрии. Следует отметить, что в методах диагностики с использованием увлекаемых потоком частиц для определения их последовательных положений иногда используется быстрая фотосъемка [7]. Некоторые новые результаты в области измерения скорости потоков содержатся в [8].

В работе [9] описана следующая экспериментальная схема. С помощью лазерного ножа в потоке выделяется некоторое сечение. При этом используется лазер с частотной перестройкой, что позволяет добиться резонансного поглощения излучения в выделенном слое молекулами (или радикалами) определенного типа. Затем регистрируется доплеровский сдвиг флюоресценции, обусловленный коллективным движением возбужденных молекул в потоке.

Предлагаемый в настоящей работе метод измерения поля скорости в стационарном одномерном потоке сходен с указанным выше методом планарной лазерно-индуцированной флюоресценции: так же, как в [9], возбуждаются молекулы в одном сечении, однако в дальнейшем анализируется не доплеровский сдвиг, а сигнал флюоресценции, измерить который значительно проще. Показано, что при определенных условиях поле скорости оказывается однозначно связанным с пространственным распределением возбужденных молекул. В свою очередь это распределение может быть найдено по измерениям интегральной интенсивности флюоресценции. Метод опробован в численном эксперименте.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩЕГО СКОРОСТЬ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ВОЗБУЖДЕННЫХ МОЛЕКУЛ

Пусть скорость исследуемого стационарного потока (для определенности будем рассматривать поток газа) имеет единственную компоненту $v_z \equiv v(x, y, z)$. Далее в обозначении скорости индекс опущен. Предлагается следующий метод определения поля $v(x, y, z)$.

Пусть в начале рассматриваемого участка потока ($z = 0$) в тонком слое dz молекулы каким-либо образом, например лазерным ножом, переводятся в возбужденное состояние за пренебрежимо малое время. Примем этот момент в качестве начального. Пусть n_0 — концентрация возбужденных молекул в начальный момент времени. Рассмотрим небольшой объем жидкости ΔV , находящийся при $t = 0$ в окрестности точки $(x_0, y_0, 0)$. В последующие моменты времени он перемещается вдоль линии тока, которая согласно условию параллельна оси z . Будем полагать, что скорость диффузии молекул много меньше скорости их коллективного движения в потоке, а скорость потока, в свою очередь, много меньше скорости звука, т. е. газ можно считать несжимаемым. При таких предположениях уменьшение числа возбужденных молекул в объеме ΔV в процессе его движения происходит главным образом за счет их релаксации в основное состояние. Если газ достаточно разреженный, то основным механизмом релаксации является спонтанное излучение. Тогда можно записать следующее соотношение:

$$N(x_0, y_0, z) = n_0 \Delta V \exp(-\alpha t), \quad (1)$$

где α — константа, характеризующая скорость релаксации молекул в основное состояние. Время t в уравнении (1) можно выразить через текущую координату объема ΔV и скорость потока, которая в силу его стационарности зависит только от положения точки на линии тока:

$$t = \int_0^z \frac{dz'}{v(x_0, y_0, z')}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) и выполнив простые преобразования, получим

$$\int_0^z \frac{dz'}{v(x_0, y_0, z')} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{n_0 \Delta V}{N(x_0, y_0, z)}. \quad (3)$$

Переходя в (3) к пределу $\Delta V \rightarrow 0$, под знаком логарифма имеем отношение концентрации возбужденных молекул в начальный момент времени в плоскости $z = 0$ к их концентрации $n(x_0, y_0, z)$ в точке (x_0, y_0, z) в момент времени, определяемый формулой (2). С учетом этого, дифференцируя уравнение (3) по z , получим

$$v(x_0, y_0, z) = -2\alpha n(x_0, y_0, z) \left(\frac{\partial n(x_0, y_0, z)}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Выражение (4) описывает скорость одномерного движения газа на линии тока $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ МОЛЕКУЛ МЕТОДОМ ТОМОГРАФИИ

Зная концентрацию возбужденных молекул $n(x, y, z)$, из уравнения (4) можно найти скорость потока в каждой точке. Вообще говоря, в уравнении (4) концентрация $n(x, y, z)$ берется в различные моменты времени для различных координат z . Однако по предположению возбуждение производится в тонком слое, который будем считать плоскостью. В соответствии с рассматриваемой моделью потока эта поверхность в дальнейшем разрывается на отдельные участки, каждый из которых движется со своей скоростью вдоль линий тока (рис. 1). Поэтому в каждой точке излучение происходит только в один момент времени. Это позволяет не учитывать временную зависимость в (4) и искать концентрацию $n(x, y, z)$ как чисто пространственное распределение, несмотря на то что в действительности оно является динамическим.

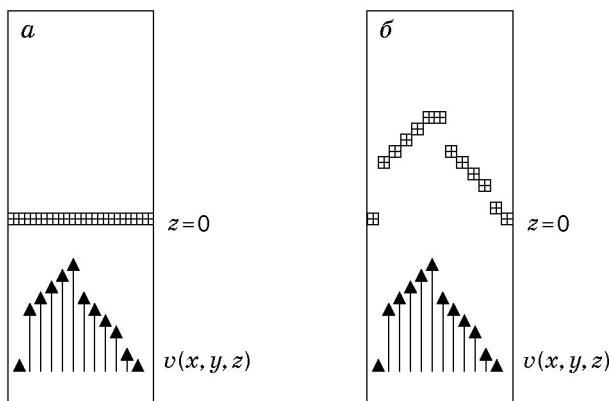


Рис. 1

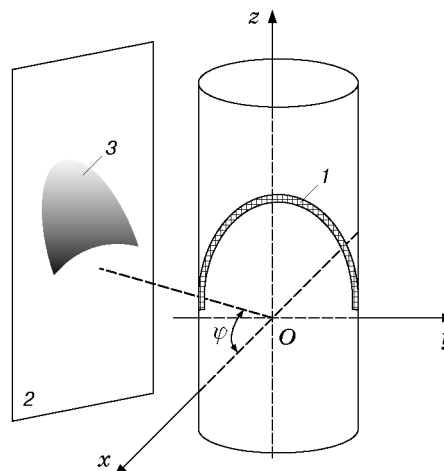


Рис. 2

Рис. 1. Распределение возбужденных молекул непосредственно после возбуждения (а) и в один из последующих моментов (б)

Рис. 2. Схема измерений:

1 — огибающая фронта движения в потоке возбужденных молекул, 2 — двумерный детектор, 3 — сигнал, регистрируемый детектором

Задача определения $n(x, y, z)$ может быть решена методами компьютерной томографии. Переход молекул в основное состояние порождает флюоресценцию, интенсивность которой пропорциональна их концентрации. На рис. 2 приведена схема измерений. Несколько двумерных детекторов, регистрирующих преимущественно излучение, падающее перпендикулярно их поверхности, расположены параллельно оси потока под различными азимутальными углами. Длина детекторов предполагается достаточной для того, чтобы получить данные во всем исследуемом объеме. По мере движения участков поверхности, принадлежащих в начальный момент плоскости $z = 0$, на детекторах фиксируются их “следы”, яркость которых в направлении вниз по потоку уменьшается с уменьшением числа возбужденных молекул.

Будем считать, что процессами поглощения и рассеяния излучения можно пренебречь. В рамках сделанных выше предположений сигнал, зарегистрированный в некоторой точке детектора, наклоненного под углом φ к оси x , можно представить в виде уравнения

$$f(p, z) = k \int_{S_1}^{S_2} n(s \cos \varphi + p \sin \varphi, s \sin \varphi + p \cos \varphi, z) ds. \tag{5}$$

Здесь p — координата на детекторе в направлении, перпендикулярном оси z ; S_1, S_2 — точки пересечения луча, вдоль которого ведется наблюдение, с границами потока; k — коэффициент, зависящий от условий конкретного эксперимента. Распределение интенсивности сигнала на поверхности детектора $f(p, z)$ называется двумерной проекцией.

Уравнения, подобные (5), лежат в основе эмиссионной томографии самосветящихся объектов [9, 10]. Пусть имеются проекционные данные f , полученные в результате измерений. Связь между f и исследуемым распределением (в данном случае распределением концентрации возбужденных молекул $n(x, y, z)$) описывается известным интегральным оператором. В рассматриваемом приближении лучевой томографии этот оператор задается соотношением (5), т. е. сигналу в каждой точке детектора ставится в соответствие

интеграл от $n(x, y, z)$ вдоль определенной прямой. Задача томографии состоит в нахождении неизвестной функции $n(x, y, z)$ по данным f . Для решения этой задачи в настоящее время разработано много алгоритмов (см., например, [11–13]).

Для проведения томографической реконструкции нужно выполнить достаточно большое количество измерений. Если данные объединяются в двумерные проекции, то последние должны быть зарегистрированы под несколькими углами относительно объекта. На практике на схему измерений часто накладываются ограничения, в том числе на количество ракурсов наблюдения. Это может быть связано со сложностью оборудования или с тем, что объект исследования труднодоступен (например, поток внутри трубы). При недостаточном количестве данных восстановление неизвестной функции обычно проводится с использованием алгебраических методов [11]. В результате дискретизации искомый вектор $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^J$ оказывается связанным с вектором измерений $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^I$ системой линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{n} = \mathbf{f}$. В приближении лучевой томографии элемент матрицы a_{ij} часто определяют как длину пересечения i -го луча с j -м вокселем. (Воксели — элементарные объемы, на которые разбивается область реконструкции при дискретизации.) Поэтому матрица A оказывается сильно разреженной. Для решения систем линейных алгебраических уравнений такого типа существуют специальные итерационные алгоритмы. В данной работе при проведении вычислительного эксперимента используется алгоритм ART (algebraic reconstruction technique). Согласно [11] $(k + 1)$ -й шаг в ART задается формулой

$$\mathbf{n}^{(k+1)} = \mathbf{n}^{(k)} + \lambda \frac{f_{i(k)} - (\mathbf{a}^{i(k)}, \mathbf{n}^{(k)})}{\|\mathbf{a}^{i(k)}\|} \mathbf{a}^{i(k)}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{a}^{i(k)}$ — i -я строка матрицы A ; λ — параметр релаксации; $i(k) = k(\bmod I) + 1$, т. е. строки матрицы перебираются циклически; (\cdot, \cdot) — скалярное произведение; $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbf{R}^J . В [11] показано, что процесс (6) сходится для любого начального приближения $\mathbf{n}^{(0)} \in \mathbf{R}^J$, если $0 < \lambda < 2$. Если, кроме того, приближение $\mathbf{n}^{(0)}$ принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{a}^{(i)}$, $i = 1, \dots, I$, то итерации сходятся к решению системы уравнений с минимальной нормой, если она совместна, и к обобщенному решению для несовместной системы.

Таким образом, в предлагаемой экспериментальной методике с использованием аппарата эмиссионной томографии возможно восстановление динамического распределения концентрации возбужденных молекул по данным измерения интегральной флуоресценции. В то же время, зная это распределение, можно рассчитать по формуле (4) поле скорости исследуемого одномерного стационарного потока.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

3.1. Описание моделей. Разработанный метод тестировался в ходе численного эксперимента. Первоначально задавалось распределение скорости $v(x, y, z)$:

$$v(x, y, z) = \frac{v_0}{\sqrt{z + z_0}} \left(1 - \frac{(x - X_c)^2}{a^2} - \frac{(y - Y_c)^2}{b^2} \right), \quad \frac{(x - X_c)^2}{a^2} + \frac{(y - Y_c)^2}{b^2} \leq 1, \quad z > 0. \quad (7)$$

При вычислениях использовались условные единицы, в которых параметры в уравнении (7) имели следующие значения: $v_0 = 1$, $z_0 = 2$, $a = 0,25$, $b = 0,7$, $X_c = -0,2$, $Y_c = 0,1$. Сечение поля скорости плоскостью $z = 0,2$ показано на рис. 3,а. Поскольку целью вычислительного эксперимента являлось исследование эффективности метода, вопрос о возможности реализации поля скорости (7) не рассматривался. Тем не менее формула (7) описывает основные особенности движения вязкого газа в вертикальной трубе эллиптического сечения в поле силы тяжести.

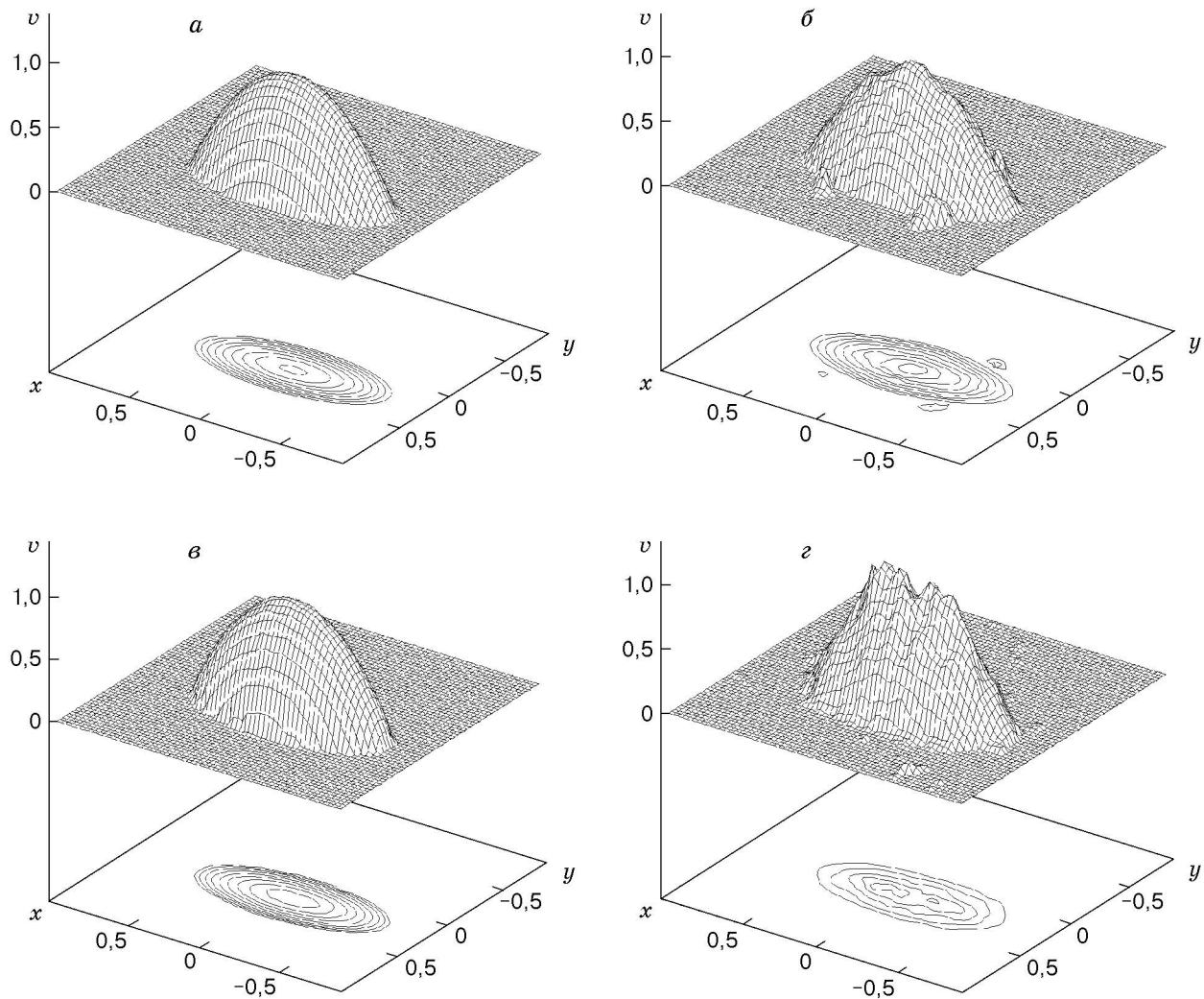


Рис. 3. Сечения поля скорости плоскостью $z = 0,2$:
 а — точная модель; б-г — результаты восстановления (б — $\alpha = 0,5$, число проекций $K = 5$, $\Delta = 0,176$; в — $\alpha = 0,5$, $K = 15$, $\Delta = 0,091$; г — $\alpha = 0,5$, $K = 6$, случайный шум в проекционных данных $\xi = 6 \%$, $\Delta = 0,272$)

По заданному распределению скорости вычислялась концентрация возбужденных молекул в различных точках потока. Для этого в уравнение (1) подставлялось выражение для времени (2) с использованием зависимости (7). В результате получено соотношение

$$n(x, y, z) = n_0 \exp \left(-\frac{2\alpha z^2}{v_0(\sqrt{z+z_0} - \sqrt{z_0})} \left(1 - \frac{(x - X_c)^2}{a^2} - \frac{(y - Y_c)^2}{b^2} \right)^{-1} \right),$$

$$(x - X_c)^2/a^2 + (y - Y_c)^2/b^2 \leq 1, \quad z > 0. \tag{8}$$

Затем вычислялись проекционные данные (5), при этом распределение концентрации возбужденных молекул соответствовало соотношению (8). Коэффициенты k и n_0 полагались равными единице. Таким образом моделировались показания детекторов. По этим данным с использованием алгоритма ART (6) реконструировалось распределение $n(x, y, z)$. Затем зависимость $n(x, y, z)$ подставлялась в уравнение (4), по которому рассчитывалось поле скорости.

Распределения (7), (8) вычислялись на сетке $129 \times 129 \times 129$ узлов, заданной в кубе с центром в начале координат и длиной ребра, равной двум условным единицам. Реконструкция производилась на такой же сетке. На двумерных проекциях (детекторах) задавалась сетка 129×129 , для каждого узла которой вычислялся интеграл (5).

Восстановленное указанным выше способом поле скорости сравнивалось с модельным, определенным уравнением (7). При этом нормированная среднеквадратичная ошибка Δ вычислялась по формуле

$$\Delta = \sqrt{\sum_{j=1}^J (v_j - v_j^r)^2} / \sqrt{\sum_{j=1}^J (v_j)^2}, \quad (9)$$

где v , v^r — модельное и восстановленное поля скоростей соответственно; суммирование проводится по узлам сетки в трехмерном пространстве. Точность томографической реконструкции концентрации возбужденных молекул также характеризовалась ошибкой Δ , определяемой аналогично (9).

3.2. Влияние параметра α на величину ошибки реконструкции. Длина участка потока, на котором может быть рассчитано поле скорости, зависит от времени пребывания молекул в возбужденном состоянии, характеризуемом параметром α . В условиях реального эксперимента его варьирование затруднено, поскольку он определяется видом флюоресцирующего вещества. Поэтому необходимо оценить длину участка L , на котором при заданном α возможно восстановление скорости с достаточной точностью. Оценка $L \sim U/\alpha$ является очень грубой. Более детально влияние α исследуется в ходе численного эксперимента.

С одной стороны, распределение $n(x, y, z)$ зависит от α , что может оказать влияние на точность решения задачи томографии по проекционным данным (5), с другой — α входит в уравнение (4), в котором скорость выражена через концентрацию возбужденных молекул. Вклады этих эффектов в среднеквадратичную ошибку изучались независимо и совместно. Для удобства в проведенной серии расчетов фиксировалась величина L (так как она определяется размером модели) и варьировалась величина α .

На рис. 4 кривыми 1, 2 показано влияние параметра α на ошибку Δ при вычислении $v(x, y, z)$ по соотношению (4). Распределение $n(x, y, z)$ не реконструируется по проекционным данным (5), а вычисляется непосредственно по уравнению (8). Другими словами, кривые 1, 2 показывают точность решения уравнения (3) с использованием формулы (4). Производная в (4) бралась численно, поскольку в реальных экспериментах аналитическое выражение для $n(x, y, z)$, вообще говоря, неизвестно. Численное определение производной является некорректно поставленной задачей. Поэтому в случае искажения функции $n(x, y, z)$ случайными шумами (см. ниже) она сглаживалась одномерным медианным фильтром по переменной z . Различие кривых 1 и 2 состоит в том, что при построении последней на массив данных $n(x, y, z)$ накладывался трехпроцентный шум. Из рис. 4 следует, что наличие шума существенно снижает точность восстановления поля скорости, особенно при больших значениях α .

Кривая 3 на рис. 4 соответствует полному решению задачи. По уравнению (8) вычислялась концентрация возбужденных молекул $n(x, y, z)$ при заданном значении параметра α . Согласно (5) определялись шесть проекций под углами $\varphi = 0, 30, 60, 90, 120, 150^\circ$. По этим данным с использованием алгоритма (6) производилась томографическая реконструкция, результат которой подставлялся в формулу (4). Расчеты показали, что точность томографической реконструкции функции $n(x, y, z)$ по идеальным (т. е. не искаженным случайными шумами) проекционным данным лишь незначительно уменьшается при увеличении α . Таким образом, в данном случае снижение точности восстановления

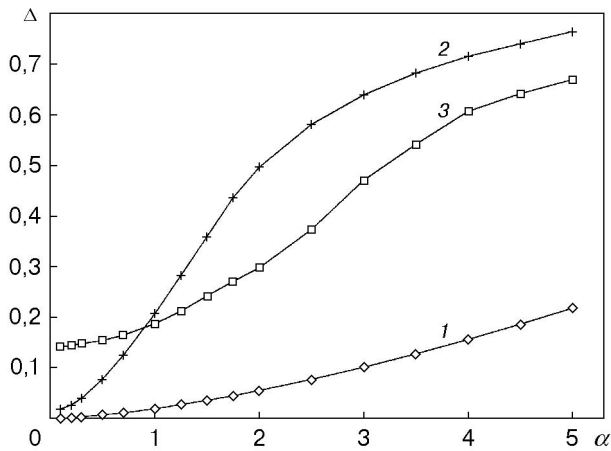


Рис. 4

Рис. 4. Зависимости ошибки Δ от параметра α :

1 — решение уравнения (3) с использованием (4), (8); 2 — то же при $\xi = 3\%$; 3 — полное решение задачи с использованием шести проекций

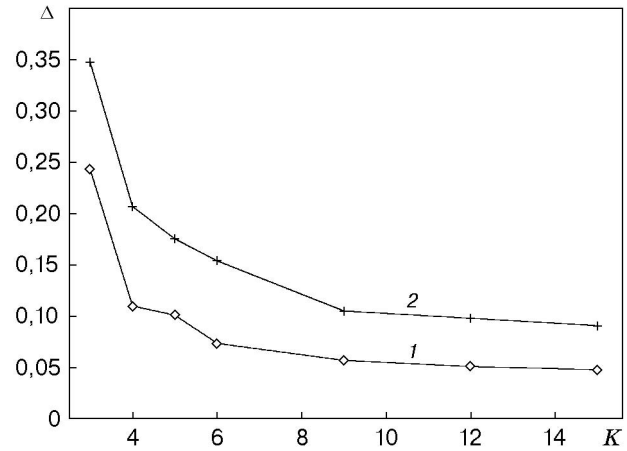


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости ошибки Δ от числа проекций K при $\alpha = 0,5$:

1 — ошибка реконструкции распределения $n(x, y, z)$, 2 — ошибка восстановления поля скорости по реконструированной функции $n(x, y, z)$

поля скорости с ростом α обусловлено в основном невысокой точностью решения уравнения (3).

3.3. Зависимость ошибки от числа двумерных проекций. В общем случае точность томографической реконструкции зависит от количества проекционных данных, в рассматриваемой постановке — от числа двумерных проекций K . Соответственно ошибка при восстановлении поля скорости также зависит от числа ракурсов наблюдения.

На рис. 5 представлены зависимости Δ от числа проекций K . Проекции распределялись равномерно по углу φ в интервале от 0 до 180° . Вычисления проводились при $\alpha = 0,5$. Кривой 1 показана зависимость ошибки томографической реконструкции распределения $n(x, y, z)$ от числа проекций K , полученная с использованием алгоритма (6). Кривой 2 показана ошибка восстановления поля скорости с использованием уравнения (4) по реконструированным распределениям возбужденных молекул. Видно, что при $K > 9$ точность решения задачи увеличивается незначительно. Это обусловлено характерным для алгебраических методов томографической реконструкции (в том числе для алгоритма ART) эффектом насыщения по числу ракурсов наблюдения.

Качественно точность восстановления поля скорости при различном числе ракурсов наблюдения можно оценить по рис. 3, б, в, где показаны сечения плоскостью $z = 0,2$.

3.4. Случайные шумы в проекционных данных. Как отмечено в подп. 3.2, наличие искажений в распределении $n(x, y, z)$ приводит к значительному ухудшению точности восстановления поля скорости. В рассматриваемой постановке функция $n(x, y, z)$ искажается артефактами томографической реконструкции, обусловленными, в частности, малым числом проекций, а также случайными шумами, которые на практике всегда присутствуют в проекционных данных. Ниже влияние шумов рассматривается более подробно.

Шум моделировался как гауссов со средним, равным нулю. Отношение ξ дисперсии шума к максимальному значению сигнала для каждой проекции было постоянным. В случае зашумленных данных при решении задачи применялись процедуры регуляризации. При томографической реконструкции распределения возбужденных молекул $n(x, y, z)$ в

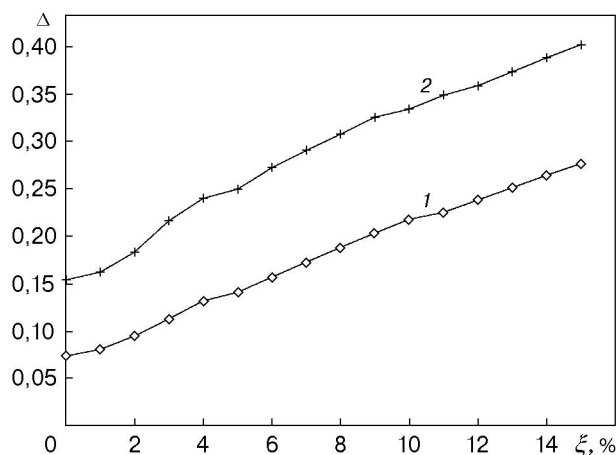


Рис. 6. Зависимости ошибки Δ от уровня шумов ξ при $\alpha = 0,5$, $K = 6$ (обозначения те же, что на рис. 5)

алгоритме ART использовался сглаживающий адаптивный частотный фильтр [12]. При восстановлении поля скорости по уравнению (4) функция $n(x, y, z)$ сглаживалась одномерным медианным фильтром по переменной z . В зависимости от интенсивности шумов длина фильтра варьировалась в диапазоне от трех до девяти точек.

На рис. 6 приведены зависимости $\Delta(\xi)$. Отметим различие кривых 2 на рис. 4, 6. В первом случае искажалась сама функция $n(x, y, z)$, рассчитанная по уравнению (8). Во втором случае шум накладывался на проекционные данные (5), по которым затем реконструировалась зависимость $n(x, y, z)$. Из рис. 6 следует, что при использовании процедур регуляризации томографическая реконструкция распределения $n(x, y, z)$ и восстановленное поле скорости $v(x, y, z)$ достаточно устойчивы к шумам в пределах исследованного диапазона.

На рис. 3,2 показано сечение плоскостью $z = 0,2$ поля скорости, восстановленного при наличии шумов в исходных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый метод определения поля скорости одномерного стационарного потока достаточно просто реализуется в эксперименте, поскольку не требует сложных спектроскопических и интерференционных измерений. Достоинством метода является также возможность определения скорости на всей длине исследуемого участка. В проведенном численном эксперименте отмечена достаточно высокая точность восстановления распределения скорости. При достаточно большом времени жизни молекул в возбужденном состоянии для пяти-шести ракурсов наблюдения среднеквадратичная ошибка не превышает 20 %.

Недостатком метода является то, что в изложенном виде он может применяться только к ограниченному классу потоков. Однако в перспективе область его применимости может быть распространена, в частности, на нестационарные потоки. При этом распределение возбужденных молекул по-прежнему будет находиться путем решения задачи эмиссионной томографии, но его связь с полем скорости будет определяться более сложным уравнением, чем (4).

Автор выражает благодарность В. В. Пикалову за обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубнищев Ю. Н., Ринкевичюс Б. С.** Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982.
2. **Ринкевичюс Б. С.** Лазерная диагностика потоков. М.: Изд-во Моск. энергет. ин-та, 1990.
3. **Басаргин И. В., Мишин Г. И., Явор И. П.** Спектральные методы исследований в баллистическом эксперименте // Оптические методы исследований в баллистическом эксперименте: Сб. науч. тр. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1979. С. 114–129.
4. **Adrian R. J., Orloff K. L.** Laser anemometer signals: visibility characteristics and applications to particle sizing // Appl. Optics. 1977. V. 16, N 3. P. 677–684.
5. **Дубнищев Ю. Н.** Влияние размеров рассеивающих частиц на сигнал в лазерных измерителях скорости с зондирующим интерференционным полем // Квантовая электрон. 1995. Т. 22, № 12. С. 1262–1266.
6. **Гречихин В. А., Ринкевичюс Б. С.** Цифровые методы обработки сигналов в лазерной анемометрии и виброметрии // Автометрия. 1999. № 1. С. 59–67.
7. **Boiko V. M., Pickalov V. V., Poplavski S. V., Chugunova N. V.** Determination of the gas parameters in nonrelaxing two-phase flow on dynamics of admixture particles // Proc. of the 10th Intern. conf. on the methods aerophys. res., Novosibirsk, 9–15 July 2000. Novosibirsk: Publ. House of SB RAS, 2000. Pt 1. P. 31–36.
8. **Оптические методы исследования потоков:** Тр. VI Междунар. науч.-техн. конф., Москва, 27–29 июня 2001 г. М.: Изд-во Моск. энергет. ин-та, 2001.
9. **Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.** Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.
10. **Пикалов В. В., Мельникова Т. С.** Томография плазмы. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995.
11. **Хермен Г. Т.** Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
12. **Лихачев А. В., Пикалов В. В.** Частотная фильтрация в алгебраических алгоритмах трехмерной томографии // Автометрия. 1995. № 4. С. 83–89.
13. **Лихачев А. В., Пикалов В. В.** Синтезированный алгоритм трехмерной томографии // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 73–85.

*Поступила в редакцию 7/V 2002 г.,
в окончательном варианте — 29/VII 2002 г.*
