

достаточно больших интенсивностях облучения для разных металлов могут существенно различаться и иметь один максимум у тыльной свободной поверхности или два локальных максимума: у передней свободной поверхности и у тыльной поверхности. Наиболее вероятная зона разрушения, связанная с местоположением наибольших растягивающих напряжений, в зависимости от материала, толщины нагретого слоя и интенсивности облучения может располагаться как у передней, так и у тыльной поверхности образца. Предложенный алгоритм позволяет при заданных параметрах облучения определить зону возможного разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
2. Балашов А. П., Селезнев С. Б., Когай Л. Н. Влияние условий ввода энергии на механические повреждения твердых тел различных классов мощными импульсными пучками электронов (обзор) // Физика и химия обработки материалов.— 1982.— № 2.
3. Миркин Л. И. Физические основы обработки материалов лучами лазера.— М.: Изд-во МГУ, 1975.
4. Рауш. Влияние времени нагрева на волны напряжений, вызванные тепловым воздействием // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика.— 1969.— Т. 36, № 2.
5. Коротких Ю. Г., Рузанов А. И. Исследование динамического разрушения упруго-пластических тел при силовых и тепловых воздействиях // ПМ.— 1978.— Т. 14, № 7.
6. Ахмадеев Н. Х., Сорокина Е. П., Яушев К. К. Откольное разрушение алюминиевых пластин при импульсном тепловом прогреве // ФГВ.— 1983.— № 5.
7. Галиев Ш. У., Жураховский С. В. Разрушение многослойных пластин в термовязкоупругопластических волнах // Пробл. прочности.— 1984.— № 11.
8. Аврасин Э. Т., Кессельман В. С., Фролов А. Б. Расчет механических напряжений, возникающих в металлах при действии лазерного импульса // Физика и химия обработки материалов.— 1985.— № 1.
9. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
10. Жарков В. И., Калинин В. А. Уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах.— М.: Наука, 1968.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.
12. Жураховский С. В. Разрушение материала в термовязкоупругопластических волнах // Пробл. прочности.— 1985.— № 7.

Поступила 26/VI 1986 г.

УДК 624.131 + 539.215

РЕЛАКСАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е. И. Роменский
(Новосибирск)

Особенность деформирования пористых сред — пластические деформации объема. Для их описания существуют разнообразные модели, использующие, в частности, понятие пористости, обзор которых содержится в [1]. Для пластических сдвиговых деформаций при быстропотекающих процессах оказалось эффективным использовать нелинейную модель Максвелла [2].

В данной работе предлагается пластические деформации объема также учитывать в рамках релаксационной модели. Сформулированы релаксационные уравнения упругопластических деформаций с пластическими деформациями объема и сдвига. Приведен пример, иллюстрирующий выбор интерполяционных формул уравнения состояния и времени объемной релаксации. Предложенная модель качественно описывает эффект аномального увеличения амплитуды отраженной волны, экспериментально обнаруженной (см., например, [3]).

Предположим, что рассматриваемая среда не испытывает касательных деформаций, а тензор напряжений в ней сводится к давлению. В этом случае деформации в среде определяются только изменением плотности ρ , которая при заданном поле скоростей u_i находится из уравнения

неразрывности

$$(1) \quad \partial \rho / \partial t + u_{\alpha} \partial \rho / \partial x_{\alpha} + \rho \partial u_{\alpha} / \partial x_{\alpha} = 0.$$

Как известно [4], плотность при отсутствии касательных деформаций связана с главными значениями тензора логарифмических деформаций Генки h_i соотношением $\rho = \rho_0 \exp(-h_1 - h_2 - h_3)$ (ρ_0 — начальная плотность среды). Если в среде происходят только объемные деформации, то $h_1 = h_2 = h_3$ и мерой деформации является $\ln(\rho/\rho_0)$ — логарифм сжатия.

Предположим, что скорость изменения деформации объема разбивается на эффективную упругую и пластическую части:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 h_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 h_i^e + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 h_i^p.$$

Здесь и далее $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$. При этом сжатие ρ/ρ_0 разбивается на произведение упругого $\rho/\rho_* = \exp(-h_1^e - h_2^e - h_3^e)$ и пластического $\rho_*/\rho_0 = \exp(-h_1^p - h_2^p - h_3^p)$ сжатий: $(\rho/\rho_0) = (\rho/\rho_*)(\rho_*/\rho_0)$.

Таким образом, (1) сводится к уравнению

$$(2) \quad \frac{d \ln(\rho_*/\rho)}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{d \ln(\rho_0/\rho_*)}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \psi.$$

Предположим, что внутренняя энергия среды зависит от эффективных упругих деформаций h_i^e (индекс e далее будем опускать) и от энтропии. В данном случае эта зависимость имеет вид $E(h_1, h_2, h_3, S) = E(\rho_*/\rho, S)$. Используя термодинамическое тождество [4]

$$dE = E_{h_i} dh_i + E_S dS = - \frac{\bar{p}}{\rho_*} \frac{\partial E}{\partial \ln(\rho/\rho_*)} d(h_1 + h_2 + h_3) + E_S dS,$$

для напряжений получим

$$(3) \quad \sigma_i - \bar{p} \frac{\partial E}{\partial h_i} = \rho \frac{\partial E}{\partial \ln(\rho_*/\rho)} = -p.$$

Температура, как обычно, вычисляется по формуле $T = \partial E / \partial S$.

Для внутренней энергии выполнено уравнение

$$(4) \quad \rho \partial E / \partial t + \rho u_{\alpha} \partial E / \partial x_{\alpha} + \rho \partial u_i / \partial x_i = 0,$$

которое следует из закона сохранения энергии.

Обозначим теперь $\xi = \ln(\rho_*/\rho)$, тогда уравнение (2) запишем как

$$(5) \quad d\xi/dt = \partial u_i / \partial x_i - \psi,$$

а формула (3) примет вид

$$(6) \quad p = -\rho E_{\xi}.$$

Теперь из уравнения (4) получим

$$0 = \rho E_{\xi} \frac{d\xi}{dt} + \rho E_S \frac{dS}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \rho E_{\xi} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \rho E_{\xi} \psi + \rho E_S \frac{dS}{dt} - \rho E_{\xi} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}.$$

Отсюда следует уравнение для энтропии

$$(7) \quad E_S dS/dt = E_{\xi} \psi.$$

Для замыкания модели необходимо определить скорость пластических деформаций объема ψ , для этого используем релаксационную модель. Предположим, что $\psi = \xi/\tau_V = [\ln(\rho_*/\rho)]/\tau_V = (h_1 + h_2 + h_3)/\tau_V$.

Таким образом, уравнение (5) для эффективных упругих деформаций объема примет вид

$$(8) \quad d\xi/dt = \partial u_i / \partial x_i - \xi/\tau_V.$$

в уравнение (7) для энтропии

$$(9) \quad E_S dS/dt = \xi E_{\xi} / \tau_V.$$

В силу второго закона термодинамики необходимо выполнение неравенства ($E_S = T > 0$, $\tau_V > 0$) $\xi E_{\xi} \geq 0$.

Естественно предполагать, что время релаксации τ_V является функцией параметров состояния среды, что позволяет, как будет далее видно, с достаточной точностью описать экспериментальные данные.

Дополняя уравнения, выписанные выше, уравнением для импульса, получим систему для описания среды с неупругим изменением объема:

$$(10) \quad \rho du_i/dt + \partial p / \partial x_i = 0, \quad d\xi/dt - \partial u_i / \partial x_i = -\xi / \tau_V, \\ \rho dE/dt + p \partial u_i / \partial x_i = 0, \quad d\rho/dt + \rho \partial u_i / \partial x_i = 0 \quad (p = -\rho E_{\xi}).$$

Следствием системы (10) является уравнение для энтропии (9). Если в среде происходят неупругие деформации как объема, так и сдвига, необходимо использовать совместно релаксационную модель, описанную выше, и релаксационную модель для сдвиговых деформаций [2].

Приведем систему уравнений с двумя релаксационными процессами пластических деформаций. Для простоты рассмотрим вариант, когда деформации происходят вдоль трех главных осей. Случай с ненулевыми касательными деформациями несложно обобщить, используя, например, [2]. Предполагая, что тензор деформаций диагонален так же, как и тензор напряжений, получим систему

$$\rho \frac{du_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{dh_i}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{h_i - (h_1 + h_2 + h_3)/3}{\tau_{\sigma}} - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{\tau_V}, \\ \rho \frac{dE}{dt} - \sum_{i=1}^3 \sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

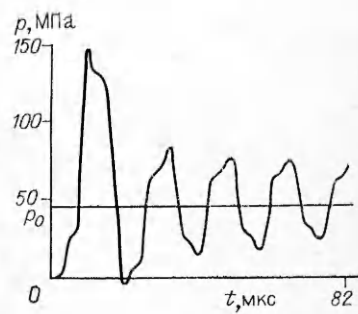
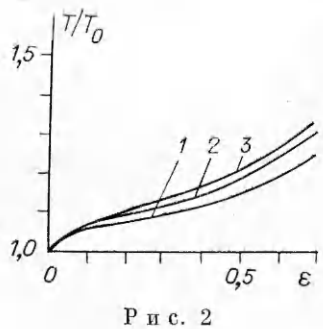
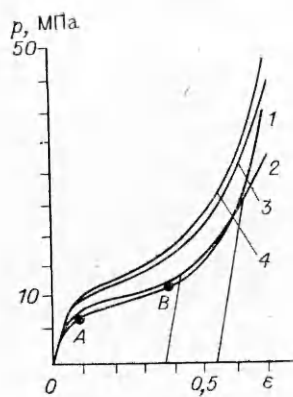
Здесь $E(h_1, h_2, h_3, S)$ — плотность внутренней энергии; $\sigma_i = \rho E_{h_i}$ — тензор напряжений; h_i — тензор деформаций Генки (главные значения); τ_V — время релаксации объемных деформаций; τ_{σ} — время релаксации касательных деформаций. Следствие этой системы — уравнение для энтропии

$$E_S \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\tau_{\sigma}} \sum_{i=1}^3 E_{h_i} \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right) + \frac{1}{3\tau_V} (E_{h_1} + E_{h_2} + E_{h_3}) \times \\ \times (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{\tau_{\sigma}} \sum_{i=1}^3 \left(E_{h_i} - \frac{E_{h_1} + E_{h_2} + E_{h_3}}{3} \right) \left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right) + \\ + \frac{1}{3\tau_V} (E_{h_1} + E_{h_2} + E_{h_3}) (h_1 + h_2 + h_3) = Q.$$

Внутренняя энергия $E(h_1, h_2, h_3, S)$ должна выбираться таким образом, чтобы выполнялось неравенство $Q \geq 0$. Еще раз подчеркнем, что для удовлетворительного описания экспериментальных данных необходимо считать, что времена релаксации τ_V и τ_{σ} зависят от параметров состояния среды.

Перейдем к примеру определения интерполяционных формул для τ_V . Для этого сформулируем задачу о всестороннем сжатии элемента среды с постоянной скоростью деформации. Предположим, что элемент среды испытывает всестороннее сжатие (растяжение) с постоянной скоростью деформации $\dot{\varepsilon} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3$ и при этом давление однородно распределено по рассматриваемому элементу. В рамках этих предположений система (10) сводится к

$$(11) \quad \frac{d\xi}{dt} = \dot{\varepsilon} - \frac{\xi}{\tau_V}, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{\xi E_{\xi}}{E_S \tau_V}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\dot{\varepsilon}.$$



Р и с. 1

Р и с. 2

Р и с. 3

Уравнение состояния выберем в виде

$$(12) \quad E = \frac{K_0}{\alpha(\alpha+1)} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^\alpha - 1 \right] + c_V T_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^\gamma e^{S/c_V} - 1 \right] + \left(\frac{K_0}{\alpha+1} + \gamma c_V T_0 \right) \left(\frac{\rho_*}{\rho} - 1 \right).$$

Вычисленные по этому уравнению состояния давление и температура находятся по формулам

$$p = \rho^2 E_\rho = \frac{\rho_* K_0}{\alpha+1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] + \rho_* \gamma c_V T_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\gamma+1} e^{S/c_V} - 1 \right],$$

$$T = E_S = T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^\gamma e^{S/c_V}.$$

Здесь K_0 (квадрат скорости звука), c_V (удельная теплоемкость при постоянном объеме) должны определяться при условиях упругого поведения среды, когда релаксационные процессы не играют роли; константы α и γ — интерполяционные показатели нелинейности среды; T_0 — начальная температура.

Рассмотрим пример, на котором проиллюстрируем методику подбора интерполяционной формулы для времени объемной релаксации. Эта формула не является универсальной и при необходимости может быть видоизменена. Возьмем материал с диаграммой $p(\epsilon)$, где $\epsilon = \ln(\rho_0/\rho)$, характерной для уплотняющихся пористых материалов и изображенной на рис. 1 (кривая 1). Время объемной релаксации τ_V зададим интерполяционной формулой

$$(13) \quad \tau_V = \tau_V^0 \left| \frac{p}{p_0} \right|^{-m} \exp \left(\theta \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right) \right).$$

Соображения, лежащие в основе выбора этой формулы, таковы: множитель $|p/p_0|^{-m}$ отвечает за существование «полочки» пластической деформации AB на диаграмме $p(\epsilon)$ (на этом участке τ_V мало); множитель $\exp(\theta((\rho/\rho_0)^n - 1))$ — за увеличение времени релаксации при больших сжатиях (материал становится все более упругим — время релаксации увеличивается).

Система (11) интегрировалась численно. Были взяты следующие значения констант: $\rho_0 = 0,32$ г/см³, $K_0 = 0,47 \cdot 10^{10}$ см²/с², $c_V = 0,35 \times 10^7$ см²/(с²·град), $T_0 = 300$ К, $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\tau_V^0 = 1$ с, $p_0 = 7,52$ МПа, $m = 30$, $\theta = 13$, $n = 2,2$.

На рис. 1 приведены графики $p(\epsilon)$ при скоростях деформации $\dot{\epsilon} = -10^{-2}, 10^2, 10^3$ с⁻¹ (кривые 2—4), а также графики $p(\epsilon)$, отвечающие разгрузке материала со скоростью деформации $\dot{\epsilon} = 10^{-2}$ с⁻¹ из двух точек на диаграмме нагружения со скоростью деформации $\dot{\epsilon} = -10^{-2}$ с⁻¹.

На рис. 2 даны графики $T(\epsilon)$, соответствующие нагружению с теми же скоростями деформации. Как видно, линия $p(\epsilon)$ при $\dot{\epsilon} = -10^{-2} \text{ с}^{-1}$ удовлетворительно описывает диаграмму, заданную кривой 1. Варьируя константы уравнения состояния и времени релаксации, можно добиться более точного совпадения.

Опишем результаты численных расчетов, в которых обнаруживается аномальное увеличение амплитуды отраженной волны от жесткой стенки. Суть данного эффекта заключается в следующем: при воздействии стационарной ударной волны на слой пористого материала, лежащего на жесткой поверхности, отраженная от этой поверхности волна имеет амплитуду, существенно большую, чем амплитуда входящей волны (газодинамическая теория предсказывает примерное удвоение амплитуды отраженной волны). Экспериментальное описание этого эффекта содержится, например, в [3].

Задача решалась для слоя толщиной 3 см, лежащего на жестком основании. Использовался одномерный вариант системы (10) с уравнением состояния (12) и времени релаксации (13). В качестве граничных условий задавались значение давления $p = 45 \text{ МПа}$ при $x = 3 \text{ см}$ и нулевая скорость $u = 0$ при $x = 0$. Для решения использовалась разностная схема С. К. Годунова [5].

Результаты расчета показали, что в данной модели волна сжатия расщепляется на упругий предвестник и пластическую волну. На рис. 3 приведена зависимость давления от времени на жесткой стенке при $x = 0$. Видно, что максимальная амплитуда отраженной волны более чем в 3 раза превосходит давление, действующее снаружи на слой материала. Дальнейшее колебательное поведение давления на жесткой стенке качественно совпадает с экспериментальными данными, приведенными в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Херрманн В. Определяющие уравнения уплотняющихся пористых материалов // Проблемы теории пластичности. — М.: Мир, 1976.
2. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1978.
3. Гвоздева Л. Г., Фаресов Ю. М., Фокеев В. П. Взаимодействие воздушных ударных волн с пористыми сжимаемыми материалами // ПМТФ. — 1985. — № 3.
4. Роменский Е. И. Динамические трехмерные уравнения упругопластической модели Х. А. Рахматулина // ПМТФ. — 1979. — № 2.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.

Поступила 7/VII 1987 г.

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УЗКИХ ОБЛАСТЕЙ

А. Н. Бурмистров
(Жуковский)

Задача о давлении штампа на упругое полупространство — это классическая задача теории упругости. Ее решение — необходимая составная часть расчета многих объектов машино- и приборостроения. Распределение давления в контакте находится в результате решения двумерного интегрального уравнения первого рода с полярным ядром.

В данной работе предложен асимптотический метод для узких областей контакта, позволяющий свести указанное уравнение к системе двух одномерных интегральных уравнений. Одно из них связывает распределение давления в поперечном направлении с поперечной формой упругого перемещения, второе — уравнение относительно неизвестной нагрузки в сечении. Асимптотический подход позволяет обосновать эвристический метод плоских сечений [1].

Получены аналитические решения для двух задач: контакт штампа с эллиптической зависимостью ширины; контакт полубесконечного штампа при постоянной нагрузке в каждом сечении. В случае эллиптического штампа с плоским основанием про-