УДК 624.131.526+532.546

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф. М. Кадыров, А. В. Костерин, Э. В. Скворцов

Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия
E-mails: farhad1987@mail.ru, Alexander.Kosterin@kpfu.ru, Eduard.Scvortsov@mail.ru

В предположении, что выполняется гипотеза Терцаги, в общем случае решена плоская задача консолидации для упругого полупространства, находящегося под воздействием мгновенно приложенной произвольной вертикальной нагрузки.

Ключевые слова: теория фильтрационной консолидации, упругое полупространство, нагрузка, давление.

DOI: 10.15372/PMTF20160615

Введение. Создание и развитие теории фильтрационной консолидации связано с работами К. Терцаги [1], Н. Н. Герсеванова [2], В. А. Флорина [3–5] и др. Общая математическая модель консолидации и аналитические методы ее исследования предложены в [6, 7], оригинальный метод решения задач консолидации принадлежит авторам работы [8]. В [8–10] рассматривались тестовые двумерные задачи консолидации. Осадка поверхности упругого насыщенного полупространства, деформированного осесимметричной нагрузкой, с использованием модели Био исследовалась в [11].

Целью настоящей работы является получение решения плоской задачи консолидации для упругого полупространства, находящегося под воздействием мгновенно приложенной вертикальной нагрузки.

1. Основные соотношения. Математическая модель фильтрационной консолидации насыщенной пористой среды, находящейся под воздействием нагрузки, включает уравнение движения фаз, уравнения неразрывности (баланса масс), закон фильтрации, реологические соотношения для пористого скелета, граничные и начальные условия.

В пренебрежении инерционными членами суммарное уравнение движения фаз имеет вид [12]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + [m\rho_1 + (1-m)\rho_2]F_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где x_i — декартовы координаты; σ_{ij}^f — эффективные напряжения в скелете [12]; p — давление жидкости; m — пористость скелета; ρ_1, ρ_2 — плотности жидкой и твердой фаз соответственно; F_i — плотность внешних массовых сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00333а).

Суммарные напряжения в скелете состоят из напряжений в твердой фазе (эффективных напряжений) и давления жидкости [12, 13]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — дельта-символ Кронекера.

Вводя статические напряжения и напряжения, возникающие при воздействии нагрузки, гидростатическое давление и давление жидкости, внешние массовые силы и архимедову силу, с учетом выполнения закона статики из (1) получаем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{f'}}{\partial x_j} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + [\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)(1 - m')]F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}^{f''}}{\partial x_j} - \frac{\partial p''}{\partial x_i} - (\rho_2 - \rho_1)m'' F_i = 0$$

(штрих соответствует статической компоненте, два штриха — компоненте, описывающей процесс консолидации).

В пренебрежении изменением пористости среды в процессе консолидации получаем (штрихи опущены)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Уравнения баланса массы для жидкой и твердой фаз запишем в виде

$$\frac{\partial\,(m\rho_1)}{\partial t} + \operatorname{div}\,(m\rho_1 \boldsymbol{V}) = 0, \qquad \frac{\partial\,((1-m)\rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div}\,((1-m)\rho_2 \dot{\boldsymbol{U}}) = 0,$$

где $\boldsymbol{V}$, $\dot{\boldsymbol{U}}$ — среднефазовые макроскорости жидкой и твердой фаз; U — перемещения скелета; точка означает дифференцирование по времени.

В предположении малости отклонений от стационарных состояний используем уравнения баланса масс в линейном приближении [12]

$$\frac{1}{\rho_1^0}\,\frac{\partial\,(m\rho_1)}{\partial t} + \operatorname{div}\,(m\boldsymbol{V}) = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_2^0}\,\frac{\partial\,((1-m)\rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div}\,((1-m)\dot{\boldsymbol{U}}) = 0.$$

Пусть $\boldsymbol{q} = m(\boldsymbol{V} - \dot{\boldsymbol{U}})$ — скорость фильтрации, $\theta = \operatorname{div} \boldsymbol{U}$ — объемная деформация скелета. В результате сложения уравнений баланса масс получаем

$$\frac{1}{\rho_1^0}\,\frac{\partial\,(m\rho_1)}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2^0}\,\frac{\partial\,((1-m)\rho_2)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} + \dot{\theta} = 0.$$

Введем шаровой тензор эффективных напряжений (среднее значение нормальных напряжений)

$$-p^f = \sigma_{kk}^f/3. \tag{2}$$

Рассмотрим случай фильтрации слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде. В этом случае производные по давлению можно считать постоянными [14]:

$$\frac{d\rho_1}{dp} = K_{\rho_1}^{-1}\rho_1^0, \qquad \frac{d\rho_2}{dp} = K_{\rho_2}^{-1}\rho_2^0, \qquad \frac{d\rho_2}{dp^f} = \tilde{K}_{\rho_2}^{-1}\rho_2^0.$$

Закон баланса массы для среды запишем в виде

$$\alpha_1\,\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_2\,\frac{\partial p^f}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} + \dot{\theta} = 0, \tag{3}$$

где $\alpha_1 = mK_{\rho_1}^{-1} + (1-m)K_{\rho_2}^{-1}$; $\alpha_2 = (1-m)\tilde{K}_{\rho_2}^{-1}$, закон фильтрации примем в линейном виде:

$$\boldsymbol{q} = -\frac{k}{\mu_0}\,\nabla p \tag{4}$$

(k — проницаемость скелета; μ_0 — вязкость жидкости).

Реологическое соотношение для пористого скелета зависит только от эффективных напряжений (закон упругости) [12]:

$$\sigma_{ij}^f = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{5}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе пористого скелета; ε_{ij} — деформации скелета.

В случае плоской деформации имеем

$$\varepsilon_{22} = 0, \qquad \sigma_{22}^f = \nu(\sigma_{11}^f + \sigma_{33}^f),$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Закон Гука, связывающий напряжения и деформации, запишем в виде [13, 15]

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\,[(1-\nu^2)\sigma_{11}^f - \nu(1+\nu)\sigma_{33}^f], \qquad \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\,[(1-\nu^2)\sigma_{33}^f - \nu(1+\nu)\sigma_{11}^f],$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G}\,\sigma_{13} = \frac{2(1+\nu)}{E}\,\sigma_{13},$$

где E — модуль Юнга (модуль упругости); G — модуль сдвига.

Используя формулы (2), (4) и выражая величину $\dot{\theta}$ через эффективные напряжения, из уравнения (3) получаем

$$\alpha_1\,\frac{\partial p}{\partial t} - (1+\nu)\Big(\frac{\alpha_2}{3} - \frac{1-2\nu}{E}\Big)\frac{\partial\,(\sigma_{11}^f + \sigma_{33}^f)}{\partial t} - \frac{k}{\mu_0}\,\Delta p = 0. \tag{6}$$

2. Постановка начальных условий. Пусть в момент времени $t = 0$ к подошве фундамента мгновенно прикладывается вертикальная нагрузка (см. рисунок):

$$\Pi = \Pi(x_1), \qquad -b \leqslant x_1 \leqslant a.$$

В момент времени $t = 0$ консолидация не развита, и объемные деформации скелета сохраняются [16]:

$$\theta^0(x_1, x_3, 0) = 0. \tag{7}$$

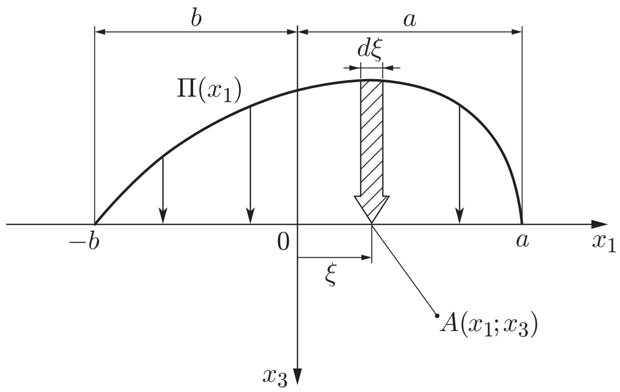

Схема приложения произвольной вертикальной нагрузки

С учетом (5), (7) уравнение начального импульса, реологическое соотношение и выражение для объемной деформации скелета в момент приложения нагрузки принимают вид [17, 18]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{f0}}{\partial x_j} - \frac{\partial p^0}{\partial x_i} = 0, \qquad \sigma_{ij}^{f0} = 2\mu\varepsilon_{ij}^0, \qquad \frac{\partial U_i^0}{\partial x_i} = 0. \tag{8}$$

Из уравнений (8) получаем уравнение, связывающее перемещения скелета и давление жидкости [17]:

$$G\Delta \boldsymbol{U}^0 - \nabla p^0 = 0. \tag{9}$$

Полагая скелет несжимаемым и применяя оператор дивергенции, из уравнения (9) получаем

$$\Delta p^0 = 0. \tag{10}$$

Следовательно, давление в среде в момент времени $t = 0$ является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

В момент времени $t = 0$ приложенная к поверхности нагрузка полностью передается жидкости [2]:

$$p^0(x_1, 0) = \Pi(x_1), \quad -b \leqslant x_1 \leqslant a, \qquad p^0(x_1, 0) = 0, \quad x_1 < -b, \quad x_1 > a. \tag{11}$$

Решение задачи (10), (11) для начального распределения давления имеет вид [19]

$$p^0(x_1, x_3) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{a} \frac{x_3\Pi(\xi)\,d\xi}{(x_1-\xi)^2 + x_3^2}. \tag{12}$$

3. Задача фильтрационной консолидации. Рассмотрим процесс консолидации во времени, принимая гипотезу Терцаги [1, 14], согласно которой суммарное напряженное состояние в системе жидкость — порода не зависит от времени. Тогда в любой момент времени суммарные напряжения в скелете имеют вид [15]

$$\sigma_{11} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-b}^{a} \frac{x_3\Pi(\xi)(x_1-\xi)^2\,d\xi}{[(x_1-\xi)^2 + x_3^2]^2}, \qquad \sigma_{33} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-b}^{a} \frac{x_3^3\Pi(\xi)\,d\xi}{[(x_1-\xi)^2 + x_3^2]^2},$$
$$\sigma_{13} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-b}^{a} \frac{x_3^2\Pi(\xi)(x_1-\xi)\,d\xi}{[(x_1-\xi)^2 + x_3^2]^2}. \tag{13}$$

Давление жидкости компенсируется эффективными напряжениями:

$$\sigma_{ij}(x_1, x_3) = \sigma_{ij}^f(x_1, x_3, t) - p(x_1, x_3, t)\delta_{ij}, \tag{14}$$

или

$$\frac{\partial\,(\sigma_{ij}^f - p\delta_{ij})}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, давление уменьшается, эффективные напряжения увеличиваются до тех пор, пока вся нагрузка не будет передана на скелет.

Поскольку в соответствии с принятой гипотезой выполняются соотношения

$$\frac{\partial \sigma_{11}^f}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{33}^f}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t},$$

уравнение (6) упрощается и сводится к автономному уравнению типа уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \Delta p,$$

где $\varkappa = k/(\alpha_3\mu_0)$; $\alpha_3 = \alpha_1 - 2(1+\nu)(\alpha_2/3 - (1-2\nu)/E)$. При этом коэффициент $\varkappa$ зависит от производных эффективных напряжений по времени. Граничные условия для пористого скелета примем в виде

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^f - p = -\Pi(x_1), \quad \sigma_{13} = 0, \qquad -b \leqslant x_1 \leqslant a,$$
$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^f - p = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \qquad x_1 < -b, \quad x_1 > a.$$

Предположим, что нагрузка на границе прикладывается по типу "высокопроницаемый поршень" [12]:

$$p(x_1, 0, t) = 0.$$

Представим функцию давления в виде

$$p(x_1, x_3, t) = p^0(x_1, x_3) - p^1(x_1, x_3, t). \tag{15}$$

Здесь функция $p^1 = p^1(x_1, x_3, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p^1}{\partial t} = \varkappa \Delta p^1$$

с граничным условием

$$p^1(x_1, 0, t) = p^0(x_1, 0) = \Pi(x_1)$$

и начальным условием

$$p^1(x_1, x_3, 0) = 0.$$

Первая краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности в полупространстве разрешима однозначно [19]:

$$p^1(x_1, x_3, t) = \frac{1}{4\pi\varkappa} \int\limits_0^t \int\limits_{-b}^a \frac{x_3 \Pi(\xi)}{(t-\tau)^2} \exp\Big(-\frac{(x_1-\xi)^2 + x_3^2}{4\varkappa(t-\tau)}\Big)\, d\xi\, d\tau$$

или

$$p^1(x_1, x_3, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-b}^a \frac{x_3 \Pi(\xi)}{(x_1-\xi)^2 + x_3^2} \exp\Big(-\frac{(x_1-\xi)^2 + x_3^2}{4\varkappa t}\Big)\, d\xi. \tag{16}$$

Из соотношений (12), (15), (16) находим давление $p = p(x_1, x_3, t)$, затем из (13), (14) — эффективные напряжения.

Введем обозначения

$$f(x_1, \xi, x_3, t) = \frac{1}{h(x_1, \xi, x_3)} \Big[1 - \exp\Big(-\frac{h(x_1, \xi, x_3)}{4\varkappa t}\Big)\Big]; \tag{17}$$

$$h(x_1, \xi, x_3) = (x_1 - \xi)^2 + x_3^2. \tag{18}$$

Тогда в соответствии с формулами (12)–(18) давление и эффективные напряжения представим в виде интегралов

$$p(x_1, x_3, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-b}^a x_3 \Pi(\xi) f(x_1, \xi, x_3, t)\, d\xi; \tag{19}$$

$$\sigma_{11}^f(x_1,x_3,t) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-b}^{a} x_3\Pi(\xi)\Big(\frac{(x_1-\xi)^2}{h^2(x_1,\xi,x_3)} - \frac{1}{2}\,f(x_1,\xi,x_3,t)\Big)\,d\xi,$$

$$\sigma_{33}^f(x_1,x_3,t) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-b}^{a} x_3\Pi(\xi)\Big(\frac{x_3^2}{h^2(x_1,\xi,x_3)} - \frac{1}{2}\,f(x_1,\xi,x_3,t)\Big)\,d\xi,$$

$$\sigma_{13}^f(x_1,x_3) = \sigma_{13}(x_1,x_3).$$

С использованием формулы (19) определим давление жидкости в процессе консолидации полупространства при различных нагрузках.

В случае силы, сосредоточенной в начале координат:

$$\Pi(x_1) = \Pi_0\delta(x_1)$$

($\delta(x_1)$ — дельта-функция), нагрузка на единицу длины (вдоль оси x_2) равна [20]

$$p(x_1,x_3,t) = \frac{\Pi_0 x_3}{\pi}\,f(x_1,0,x_3,t).$$

В случае нагрузки, равномерно распределенной на полубесконечной части границы $x_1 \geqslant 0$ [18]:

$$\Pi(x_1) = \begin{cases} \Pi_0, & x_1 \geqslant 0, \\ 0, & x_1 < 0, \end{cases}$$

формула (19) принимает вид [20]

$$p(x_1,x_3,t) = \Pi_0\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{x_1} x_3 f(0,\xi,x_3,t)\,d\xi + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\,\frac{x_3}{2(\varkappa t)^{1/2}}\Big).$$

В случае нагрузки, равномерно распределенной в полосе:

$$\Pi(x_1) = \Pi_0, \qquad |x_1| \leqslant a,$$

согласно [20] имеем

$$p(x_1,x_3,t) = \frac{\Pi_0}{\pi}\int\limits_{x_1-a}^{x_1+a} x_3 f(0,\xi,x_3,t)\,d\xi.$$

Данный результат совпадает с результатом, полученным в работе [9].

В случае нагрузки треугольной формы:

$$\Pi(x_1) = \begin{cases} \Pi_0(a-|x_1|)/a, & |x_1| \leqslant a, \\ 0, & |x_1| > a \end{cases}$$

имеем [21]

$$p(x_1,x_3,t) = \frac{\Pi_0 x_3}{\pi a}\int\limits_{-a}^{a} (a-|\xi|)f(x_1,\xi,x_3,t)\,d\xi.$$

Заключение. В предположении, что в момент приложения нагрузки во всем объеме грунта мгновенно устанавливается начальное распределение давления жидкости, а в любой момент времени $t \geqslant 0$ распределение суммарных напряжений в грунте не меняется, решена плоская задача консолидации для вертикальной нагрузки общего вида.

Показано, что давление жидкости компенсируется эффективными напряжениями. Таким образом, нормальные эффективные напряжения увеличиваются до тех пор, пока вся нагрузка не будет передана на скелет. Касательные напряжения в скелете возникают непосредственно после приложения нагрузки и остаются неизменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терцаги К.** Теория механики грунтов. М.: Госстройиздат, 1961.
2. **Герсеванов Н. М.** Собрание сочинений: В 2 т. М.: Стройвоенмориздат, 1948.
3. **Флорин В. А.** Основы механики грунтов: В 2 т. М.: Госстройиздат, 1959. Т. 1.
4. **Флорин В. А.** Основы механики грунтов: В 2 т. М.: Госстройиздат, 1961. Т. 2.
5. **Флорин В. А.** Теория уплотнения земляных масс. М.: Госстройиздат, 1948.
6. **Bio M. A.** General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials // J. Appl. Mech. 1956. V. 23, N 1. P. 91–96.
7. **Био М. А.** Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. 1963. № 6. С. 103–134.
8. **Mc Namee G., Gibson R. E.** Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1960. V. 13. P. 98–111.
9. **Партон В. З.** Одна задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред // Инж. журн. 1965. Т. 5, № 1. С. 176–180.
10. **Веригин Н. Н.** Консолидация грунта под гибким фундаментом (плоская задача) // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1961. № 5. С. 20–23.
11. **Партон В. З.** Осесимметричная задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 4. С. 785–788.
12. **Николаевский В. Н.** Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
13. **Цытович Н. А.** Механика грунтов. М.: Высш. шк., 1983.
14. **Баренблатт Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
15. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
16. **Егоров А. Г.** Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах / А. Г. Егоров, А. В. Костерин, Э. В. Скворцов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990.
17. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
18. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. М.: Мир, 1969. Т. 2.
19. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
20. **Кадыров Ф. М., Костерин А. В., Скворцов Э. В.** Плоская задача фильтрационной консолидации для упругого полупространства // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Тр. Междунар. науч. конф.: В 2 т., Стерлитамак, 26–30 июня 2013 г. Уфа: Ред.-издат. центр Башкир. гос. ун-та, 2013. Т. 2. С. 216–221.
21. **Кадыров Ф. М.** Плоская задача консолидации с разрывными начальными условиями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 155, кн. 3. С. 63–70.

Поступила в редакцию 10/IX 2014 г.,
в окончательном варианте — 24/IX 2015 г.