

УДК 539.37

АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ СХЛОПЫВАНИЯ ПОР

В. М. Садовский, О. В. Садовская

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск, Россия

E-mails: sadov@icm.krasn.ru, o_sadov@icm.krasn.ru

С использованием обобщенного реологического метода строится математическая модель малых деформаций пористой среды с открытыми порами. Изменение сопротивления материала внешним механическим воздействиям в момент схлопывания пор описывается с помощью условия прочности Мизеса — Шлейхера. При учете необратимой деформации наряду с классическими вариантами условия текучести Мизеса и Треска — Сен-Венана используется условие, моделирующее пластическую потерю устойчивости пористого скелета. В рамках построенной модели анализируется процесс распространения плоских продольных волн сжатия в однородной пористой среде, сопровождающийся пластической деформацией скелета и уплотнением материала. Разработан параллельный вычислительный алгоритм для исследования процессов упругопластического деформирования пористой среды под действием внешних динамических нагрузок. При тестировании алгоритма и программы выполнены расчеты распространения плоских продольных ударных волн сжатия и расширения цилиндрической полости в безграничной пористой среде. Проведено сравнение результатов расчетов с точными решениями, показавшее, что они хорошо согласуются.

Ключевые слова: пористая среда, схлопывание пор, упругий предвестник, пластическая ударная волна, метод сквозного счета, параллельный вычислительный алгоритм.

DOI: 10.15372/PMTF20160507

Введение. Математические модели пористых сред имеют приложения в аэрокосмической, судостроительной, автомобильной и нефтедобывающей отраслях, а также в геомеханике и геодинамике. Многие динамические процессы, происходящие в геоматериалах, насыщенных жидкостями, исследуются на основе классических уравнений Био [1]. Для учета дисперсии волн и диссипации энергии применяются более общие уравнения [2, 3]. Пластическая деформация и разрушение скелета под давлением поровой жидкости описываются физически нелинейными моделями [4, 5].

Если наличием жидкости или газа в порах можно пренебречь, то анализ напряженного состояния пористой среды становится более простым. В частности, это возможно при исследовании деформации пористых металлов (металлических пен) — новых искусственных материалов, которые находят широкое применение вследствие их малой плотности и хороших демпфирующих свойств [6]. Способность пористых металлов эффективно поглощать энергию в процессе пластической деформации позволяет использовать их при изготовлении бамперов автомобилей и элементов кузовов (так называемых сминаемых зон), а также

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Красноярского края (код проекта 16-41-240415).

© Садовский В. М., Садовская О. В., 2016

в технических устройствах в качестве разрушаемых предохранителей, которые рассеивают энергию динамического удара, предотвращая разрушение механической системы.

Эксперименты по одноосному растяжению-сжатию пористых металлов показывают, что при сжатии образцов после линейно-упругой начальной стадии деформирования реализуется стадия пластического течения, описываемая диаграммой с малым углом наклона [7, 8]. Для большинства материалов верхний и нижний пределы текучести различаются незначительно, для некоторых из них участок $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы, соответствующий пластическому течению при сжатии, является горизонтальным. По мере прохождения плато, протяженность которого зависит от пластичности металла и пористости, угол наклона кривой резко увеличивается. Происходит уплотнение материала: соприкосновение перемычек скелета приводит к увеличению жесткостных и прочностных характеристик материала.

Феноменологические параметры металлических пен с различной структурой получены экспериментально в [9, 10] и других работах. Численное моделирование квазистатического напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов из пористых металлов под действием заданных механических нагрузок на основе дискретно-структурного подхода с использованием метода конечных элементов проводилось в работах [10, 11]. В [12] при расчетах зон локализации деформаций применялась континуальная модель.

В [13] предложена математическая модель, учитывающая в рамках теории малых упругопластических деформаций скачкообразный характер изменения податливости материала при схлопывании пор. На основе этой модели построены точные решения, описывающие расширение сферической и цилиндрической полостей в безграничной пористой среде [14]. В настоящей работе обосновываются определяющие соотношения модели исходя из принципов необратимой термодинамики, строятся простейшие точные решения типа продольных ударных волн, рассматриваются проблемы алгоритмической и программной реализации модели на многопроцессорных вычислительных системах.

1. Математическая модель. Определяющие соотношения пористой среды при одноосном растяжении-сжатии строятся с использованием обобщенной реологической модели [15]. В соответствии с простейшей реологической схемой, представленной на рис. 1, поведение материала при растяжении и сжатии до момента схлопывания пор имитиру-

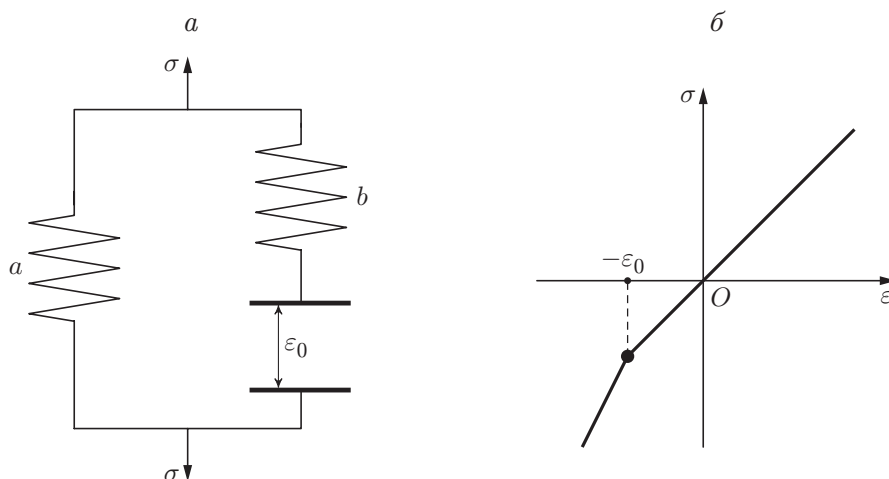


Рис. 1. Реологическая схема (а) и диаграмма (б) одноосного растяжения-сжатия упругой пористой среды

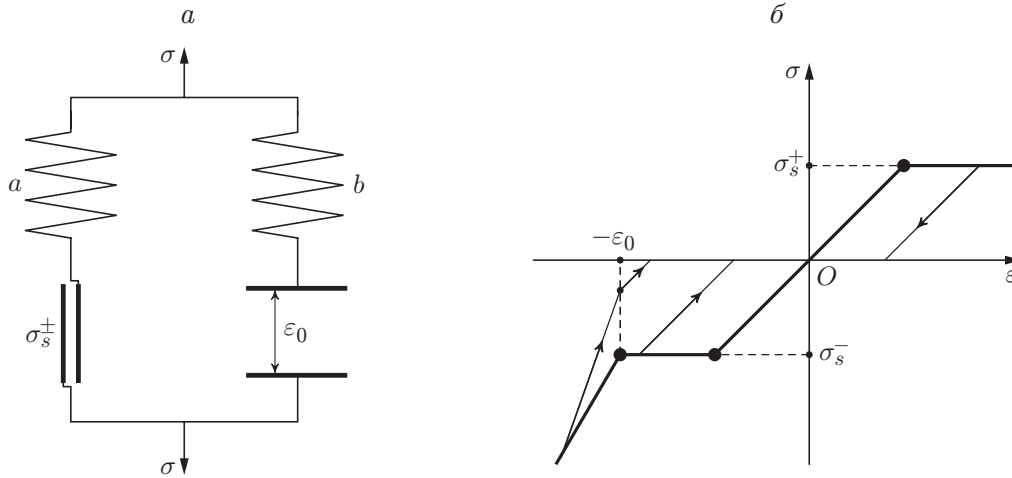


Рис. 2. Реологическая схема (а) и диаграмма (б) одноосного растяжения-сжатия упругопластической пористой среды: стрелки — направление перехода в разгруженное состояние

ется упругой пружиной с модулем податливости a , а увеличение жесткости после схлопывания — пружиной с модулем податливости b . Жесткий контакт в схеме обеспечивает переход среды в уплотненное состояние. Звенья представленной на рис. 1, б кривой одноосного растяжения-сжатия пересекаются в точке $\varepsilon = -\varepsilon_0$, соответствующей схлопыванию. Данная схема описывает процесс упругого деформирования, при котором не происходит диссипации механической энергии.

На рис. 2 приведена более общая реологическая схема, в которой учитываются пластические свойства пористой среды. Предполагается, что при растягивающем напряжении σ_s^+ материал переходит в состояние текучести, а при сжимающем напряжении $-\sigma_s^-$ происходит пластическая потеря устойчивости пористого скелета. Диаграмма одноосного деформирования представляет собой четырехзвенную ломаную. Переход в разгруженное состояние показан стрелками на рис. 2. Объемная удельная энергия, которая выделяется в виде тепла при сжатии среды до момента схлопывания пор, в этой модели определяется величиной $\sigma_s^- \varepsilon_0$.

Диаграмма на рис. 2 качественно согласуется с одноосными диаграммами, полученными в экспериментах по сжатию пористых металлов [7]. В пространственном напряженно-деформированном состоянии в соответствии с реологической схемой на рис. 2, а тензор полных напряжений σ представляется в виде суммы тензоров напряжений s в скелете и дополнительных напряжений σ^c , возникающих после схлопывания пор. Не учитывая вращательные степени свободы узлов сопряжений перемычек пористого скелета, будем считать эти тензоры симметричными. Податливость упругого материала характеризуется тензорами четвертого ранга a и b , удовлетворяющими условиям симметрии и положительной определенности.

Определяющие соотношения жесткого контакта формулируются в виде вариационного неравенства

$$(\tilde{\sigma} - \sigma^c) : (\varepsilon^c + \varepsilon^0) \leq 0, \quad \tilde{\sigma} \in K, \quad \sigma^c \in K. \tag{1.1}$$

Здесь $\varepsilon^c = \varepsilon - b : \sigma^c$ — тензор деформации порового пространства; ε — тензор полной деформации; ε^0 — заданный тензор пористости (для изотропного материала с хаотичным распределением пор $\varepsilon^0 = \theta_0 \delta / 3$, где θ_0 — пористость; δ — единичный тензор); K — выпуклый конус в пространстве напряжений, с помощью которого моделируется уплот-

нение среды; знаком “ \sim ” отмечены варьируемые величины; двоеточие означает двойную свертку тензоров. Далее в качестве конуса K в изотропном случае используется круговой конус Мизеса — Шлейхера: $K = \{\sigma: \tau(\sigma) \leq \kappa p(\sigma)\}$ (κ — феноменологический параметр дилатансии уплотненной среды; $p(\sigma) = -\sigma : \delta/3$ — гидростатическое давление; $\tau(\sigma)$ — интенсивность касательных напряжений, определяемая через девиатор тензора напряжений $\sigma' = \sigma + p(\sigma)\delta$ по формуле $\tau^2(\sigma) = \sigma' : \sigma'/2$).

С учетом введенных обозначений вариационное неравенство (1.1) преобразуется к следующему виду:

$$(\tilde{\sigma} - \sigma^c) : b : (\sigma^c - q - q^0) \geq 0, \quad \tilde{\sigma} \in K, \quad \sigma^c \in K. \quad (1.2)$$

Здесь q — тензор условных напряжений, который вычисляется через тензор ε по закону линейной теории упругости $b : q = \varepsilon$; q^0 — вспомогательный тензор: $b : q^0 = \varepsilon^0$. Если $q + q^0 \in K$, то $\sigma^c = q + q^0$, поскольку в этом случае вариация в неравенстве (1.2) произвольна. Если $q + q^0 \notin K$ и для любого $\tilde{\sigma} \in K$ справедливо неравенство $\tilde{\sigma} : b : (q + q^0) \leq 0$, которое означает, что сумма тензоров $\varepsilon + \varepsilon^0$ принадлежит сопряженному с K конусу $C = \{\varepsilon: \tilde{\sigma} : \varepsilon \leq 0 \forall \tilde{\sigma} \in K\}$ в пространстве деформаций, то, как следует из (1.2), $\sigma^c = 0$.

В соответствии с вариационным неравенством (1.2) тензор σ^c является проекцией $\sigma^c = \pi(q + q^0)$ суммы $q + q^0$ на конус K по евклидовой норме $|\sigma|_b = \sqrt{\sigma : b : \sigma}$. Рассмотренные выше два варианта задания q соответствуют частным случаям, когда проекция совпадает с исходным тензором или проекцией является вершина конуса. Возможен также третий вариант, когда проекция принадлежит конической поверхности. Такой вариант реализуется при одновременном выполнении двух условий: $q + q^0 \notin K$ и $\varepsilon + \varepsilon^0 \notin C$. Для изотропной среды тензор упругой податливости b характеризуется двумя независимыми параметрами: модулем объемного сжатия k_b и модулем сдвига μ_b . Формулы для вычисления проекции на коническую поверхность принимают вид [15]

$$p(\sigma^c) = \frac{\mu_b p(q) + \kappa k_b \tau(q)}{\mu_b + \kappa^2 k_b}, \quad (\sigma^c)' = \kappa p(q) \frac{q'}{\tau(q)}.$$

Конус C , сопряженный с конусом Мизеса — Шлейхера, определяется равенством $C = \{\varepsilon: \kappa \gamma(\varepsilon) \leq \theta(\varepsilon)\}$, где $\theta(\varepsilon) = \varepsilon : \delta$ — объемная деформация материала; $\gamma(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon' : \varepsilon'}$ — интенсивность сдвига; $\varepsilon' = \varepsilon - \theta(\varepsilon)\delta/3$ — девиатор тензора деформации. Условие $\varepsilon + \varepsilon^0 \in C$ соответствует разомкнутому контакту в реологической схеме, когда поры находятся в раскрытом состоянии. В процессе уплотнения среды выполняется предельное условие $\kappa \gamma(\varepsilon) = \theta_0 + \theta(\varepsilon)$, описывающее дилатансионное изменение объема материала за счет сдвиговой деформации.

Последовательное соединение упругой пружины и пластического шарнира согласно схеме, показанной на рис. 2, с аддитивным разложением деформации на сумму упругой и пластической составляющих соответствует модели упругопластического течения Прандтля — Рейсса, пространственные определяющие соотношения которой формулируются в виде вариационного неравенства (принципа максимума мощности диссипации)

$$(\tilde{s} - s) : \dot{\varepsilon}^p \leq 0, \quad \tilde{s} \in F, \quad s \in F. \quad (1.3)$$

Здесь $\varepsilon^p = \varepsilon - a : s$ — тензор пластических деформаций; F — выпуклое замкнутое множество в пространстве напряжений, ограниченное поверхностью текучести материала; точка над символом обозначает производную по времени. Множество F в зависимости от типа материала может быть задано с помощью условия пластичности Мизеса $F = \{\sigma: \tau(\sigma) \leq \tau_s\}$ или условия Треска — Сен-Венана $F = \{\sigma: \sigma_i - \sigma_j \leq \sigma_s\}$ (σ_i — главные напряжения; σ_s, τ_s — пределы текучести при одноосном сжатии и чистом сдвиге соответственно). Полагая, что деформация перемычек пористого скелета с удовлетворительной

Механические параметры пенистого алюминия

$\theta_0, \%$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$k_a, \text{ГПа}$	$\mu_a, \text{ГПа}$	$k_b, \text{ГПа}$	$\mu_b, \text{ГПа}$	$\tau_s, \text{МПа}$
0,1	2697	74,92	25,69	0,917	0,314	39,5
1,0	2673	71,58	24,54	4,256	1,459	37,8
5,0	2565	63,39	21,73	12,440	4,266	33,4

точностью описывается стержневой моделью, можно задать $F = \{\sigma: -\sigma_s^- \leq \sigma_i \leq \sigma_s^+\}$, где σ_s^+ — предел текучести при растяжении; σ_s^- — предел устойчивости при сжатии.

Определяющие соотношения (1.2), (1.3) совместно с уравнениями движения и кинематическими уравнениями для тензора деформаций $2\dot{\varepsilon} = \nabla v + \nabla v^*$ образуют замкнутую математическую модель динамического деформирования упругопластической пористой среды:

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{v} &= \nabla \cdot \sigma + f, & \sigma &= s + \pi(q + q^0), \\ (\tilde{s} - s) : (a : \dot{s} - \nabla v) &\geq 0 & (\tilde{s} \in F, s \in F), & \quad 2b : \dot{q} = \nabla v + \nabla v^*. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\rho_0 = \rho(1 - \theta_0)$ — плотность пористого материала; v — вектор скорости; f — вектор объемных сил; ∇ — оператор Гамильтона; звездочка обозначает сопряженный тензор.

Начальные данные для системы (1.4), соответствующие естественному (ненапряженному и недеформированному) состоянию среды, задаются следующим образом: $v|_{t=0} = 0$, $s|_{t=0} = q|_{t=0} = 0$. Параметры модели — механические характеристики пористого материала — задаются по результатам экспериментов. К числу таких параметров относятся тензоры модулей упругой податливости a и b , которые в изотропной среде определяются через модули сдвига μ_a, μ_b и модули объемного сжатия k_a, k_b , а также предел текучести среды τ_s , параметр дилатансии \varkappa и начальная пористость θ_0 . Для сильнопористых металлов некоторые параметры можно найти, проведя анализ экспериментальных данных [7, 9]. Если пористость материала мала, то их можно оценить, используя понятие эффективного сечения. В этом случае рассматривается кубическая ячейка периодичности, содержащая пору в виде сферической полости, и проводится пересчет напряжений на ее среднее сечение. В таблице приведены вычисленные таким способом параметры пенистого алюминия для трех вариантов пористости ($\theta_0 = 0,1; 1,0; 5,0 \%$).

2. Термодинамическая корректность модели. Покажем, что определяющие соотношения пористой среды удовлетворяют принципам термодинамики необратимых процессов. Пусть $T > 0$ — абсолютная температура частицы, W, η — объемные плотности внутренней энергии и энтропии, h — вектор притока тепла, H — интенсивность внутренних тепловых источников. В рамках геометрически линейного приближения первый принцип термодинамики, эквивалентный закону сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + W \right) = \nabla \cdot (\sigma \cdot v) + f \cdot v - \nabla \cdot h + H, \quad (2.1)$$

с учетом уравнений движения (1.4) сводится к уравнению притока тепла $\dot{W} = \sigma : \nabla v - \nabla \cdot h + H$. Второй принцип термодинамики, согласно которому скорость внутреннего производства энтропии $\dot{\eta}'$ за счет пластической деформации и необратимого изменения температурного поля неотрицательна, записывается в форме неравенства Клаузиуса — Дюгема:

$$\dot{\eta}' = \dot{\eta} + \nabla \cdot \left(\frac{h}{T} \right) - \frac{H}{T} \geq 0. \quad (2.2)$$

Систему термодинамических параметров состояния пористой среды составляют тензор упругой деформации $\varepsilon^e = a : s$, тензор полной деформации $\varepsilon = b : q$ и энтропия η . Внутренняя энергия W представляет собой функцию состояния, зависящую от этих параметров. Зависимость W от тензора ε^e обусловлена тем, что часть внутренней энергии материала запасается за счет упругой деформации пористого скелета, от ε зависит энергия контактного взаимодействия перемычек между порами, а величина η характеризует зависимость внутренней энергии от тепловых процессов. Для указанного выше набора параметров выполняется неравенство

$$\left(s - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e}\right) \cdot \dot{\varepsilon}^e + \left(\sigma^c - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right) \cdot \dot{\varepsilon} + \left(T - \frac{\partial W}{\partial \eta}\right) \dot{\eta} + s : \varepsilon^p - \frac{1}{T} \nabla T \cdot h \geq 0, \quad (2.3)$$

которое выводится из соотношений (2.1), (2.2) с учетом симметрии тензора напряжений и с использованием аддитивных разложений $\sigma = s + \sigma^c$, $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$. Из (2.3) в силу функциональной независимости термодинамических параметров следуют уравнения состояния и неравенство для внутренней диссипации энергии:

$$s = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon^e}, \quad \sigma^c = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}, \quad T = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad s : \varepsilon^p - \frac{1}{T} \nabla T \cdot h \geq 0. \quad (2.4)$$

Эти соотношения автоматически выполняются для модели (1.4), если зависимость внутренней энергии от параметров состояния задается в виде

$$W = \frac{1}{2} s : a : s + \frac{1}{2} \pi(q + q^0) : b : \pi(q + q^0) + W_0(\eta).$$

Действительно, так как проекция на выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле по норме, ассоциированной с тензором b , удовлетворяет уравнению $\pi(\sigma) : b : d\pi(\sigma) = \pi(\sigma) : b : d\sigma$ [15], то $dW = s : d\varepsilon^e + \pi(q + q^0) : d\varepsilon + W'_0(\eta) d\eta$. Поэтому уравнения (2.4) для тензоров напряжений s и $\sigma^c = \pi(q + q^0)$ тождественно удовлетворяются. Неравенство для внутренней диссипации энергии выполняется в силу неравенства (1.3) при $\bar{s} = 0$ и закона теплопроводности Фурье $h = -\kappa \cdot \nabla T$, где κ — симметричный положительно определенный тензор теплопроводности, который в изотропном случае является шаровым тензором: $\kappa = \kappa_0 \delta$; κ_0 — теплопроводность. Оставшееся уравнение для температуры принимает вид $T = W'_0(\eta)$.

Уравнение притока тепла позволяет определить температурное поле в пористой среде. В случае линейной зависимости тепловой энергии от температуры $W_0 = c_0 T$ (c_0 — приведенный коэффициент теплоемкости) оно сводится к уравнению теплопроводности

$$c_0 \dot{T} = \nabla \cdot (\kappa_0 \nabla T) + s : \dot{\varepsilon}^p + H. \quad (2.5)$$

Таким образом, математическая модель (1.4), дополненная уравнением (2.5), учитывающим влияние температуры, соответствует принципам неравновесной термодинамики.

3. Продольные ударные волны. Используя вариант модели с условием пластичности Треска — Сен-Венана без учета дилатансии в уплотненной изотропной пористой среде (в случае $\varkappa = 0$), построим точное решение задачи о распространении ударных волн, вызванных скачкообразным воздействием равномерно распределенного постоянного давления на границе пористого полупространства. В силу нелинейности определяющих соотношений структура такого решения (количество ударных волн, их тип и скорости) зависит от механических параметров материала.

Если дилатансия не учитывается, то тензор q в уравнениях (1.4) становится шаровым. Модель существенно упрощается, контактное взаимодействие перемычек пористого скелета после схлопывания пор описывается не тензорной, а скалярной величиной — приращением гидростатического давления. Такая модель описывает два сценария деформирования.

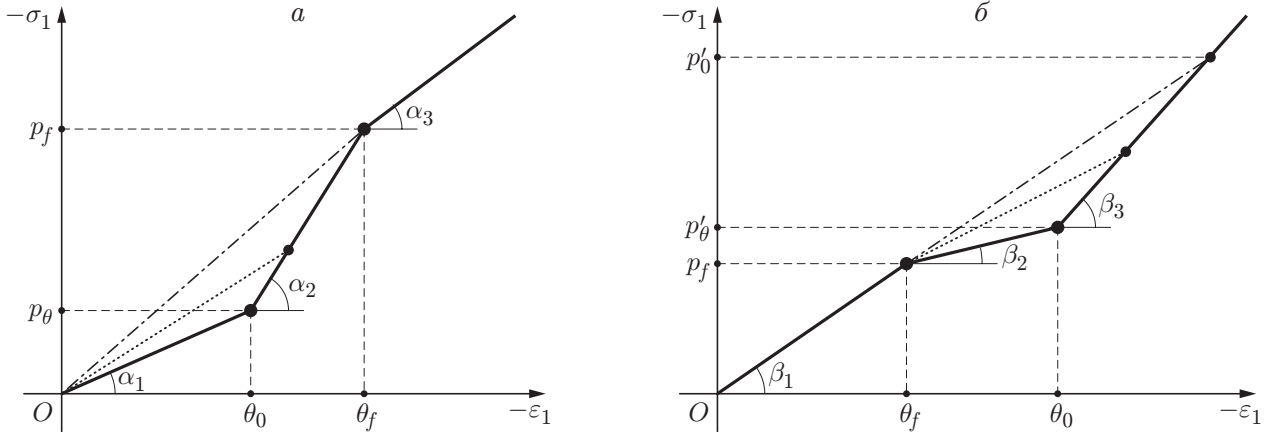


Рис. 3. Диаграммы ударно-волновых переходов:
a — малопористый материал (пунктирная линия — волна уплотнения, штрихпунктирная — волна, распространяющаяся со скоростью c_0), *б* — сильнопористый материал (пунктирная линия — волна пластического уплотнения, штрихпунктирная — волна, распространяющаяся со скоростью c'_0)

Для малопористых материалов с достаточно большим пределом текучести схлопывание пор под действием сжимающих напряжений происходит на стадии упругой деформации. Пластичность проявляется после уплотнения среды. В материалах с малым пределом текучести и большой пористостью переход в пластическое состояние предшествует переходу в уплотненное состояние.

Первый сценарий реализуется при $\theta_0 \leq \theta_f$ ($\theta_f = \tau_s/\mu_a$). На стадии упругой деформации напряжения определяются законом Гука: $\sigma_1 = (k_a + 4\mu_a/3)\varepsilon_1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = (k_a - 2\mu_a/3)\varepsilon_1$. Для уплотненной среды выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_1 < -\theta_0, \quad \sigma_1 = \left(k_a + k_b + \frac{4\mu_a}{3}\right)\varepsilon_1 + k_b\theta_0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \left(k_a + k_b - \frac{2\mu_a}{3}\right)\varepsilon_1 + k_b\theta_0. \quad (3.1)$$

На стадии пластического течения выполняются условие пластичности $\sigma_3 - \sigma_1 = 2\tau_s$ и закон упругого изменения объема $\sigma_1 + 2\sigma_3 = 3(k_a + k_b)\varepsilon_1 + 3k_b\theta_0$. Следовательно,

$$\sigma_1 = -4\tau_s/3 + (k_a + k_b)\varepsilon_1 + k_b\theta_0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 2\tau_s/3 + (k_a + k_b)\varepsilon_1 + k_b\theta_0. \quad (3.2)$$

Учитывая непрерывность перехода из упругого состояния, в котором напряжения вычисляются по формулам (3.1), в состояние, описываемое формулами (3.2), можно показать, что переход в пластическое состояние происходит при $\varepsilon_1 = -\tau_s/\mu_a$. Зависимость напряжения σ_1 от деформации ε_1 в процессе сжатия без разгрузки для этого сценария представлена на рис. 3, *a*. В соответствии с приведенными формулами для напряжений угловые коэффициенты звеньев показанной на рис. 3, *a* ломаной, равные $\alpha_1 = k_a + 4\mu_a/3$, $\alpha_2 = k_a + k_b + 4\mu_a/3$ и $\alpha_3 = k_a + k_b$, удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 < \alpha_2$ и $\alpha_2 > \alpha_3$.

Для ударной волны, движущейся со скоростью c в направлении оси x_1 перпендикулярно границе полупространства, выполняются уравнения

$$\rho_0 c (v_1^+ - v_1^-) + \sigma_1^+ - \sigma_1^- = 0, \quad c (\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-) + v_1^+ - v_1^- = 0, \quad \rho_0 c^2 = \frac{\sigma_1^+ - \sigma_1^-}{\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-}. \quad (3.3)$$

Здесь величины с верхним индексом “+” соответствуют состоянию за фронтом волны, величины с индексом “-” — состоянию перед фронтом. Из уравнений (3.3) следует, что если давление $\sigma_1 = -p_0$, действующее на границе полупространства, меньше критического значения $p_\theta = (k_a + 4\mu_a/3)\theta_0$, то в среде распространяется продольная упругая волна со

скоростью $c_p^0 = \sqrt{(k_a + 4\mu_a/3)/\rho_0}$, характерной для неуплотненной пористой среды. Если $p_\theta < p_0 \leq p_f$, где $p_f = 4\tau_s/3 + (k_a + k_b)\tau_s/\mu_a - k_b\theta_0$ — давление, при котором происходит переход в пластическое состояние, то скорость волны вычисляется по формуле

$$\left(\frac{c_\theta}{c_p}\right)^2 = \frac{p_0}{p_0 + k_b\theta_0}, \quad c_p = \sqrt{\frac{k_a + k_b + 4\mu_a/3}{\rho_0}}.$$

С этой скоростью распространяется упругая волна уплотнения, на которой происходит схлопывание пор. Перед ее фронтом напряжения равны нулю, а за фронтом они вычисляются по формулам (3.1). На рис. 3,а волне уплотнения соответствует пунктирная линия, угловой коэффициент которой в силу (3.3) равен $\rho_0 c_\theta^2$.

При $p_0 > p_f$ возникает двухволновая конфигурация. Впереди движется волна уплотнения со скоростью c_0 , соответствующей предельному для упругого состояния напряжению $\sigma_1 = -p_f$, а за ней — пластическая ударная волна в уплотненной среде со скоростью $c_f = \sqrt{(k_a + k_b)/\rho_0}$. Скорости волн, значения деформации и скорости частиц по обе стороны фронтов определяются из уравнений (3.3) через соответствующие напряжения.

Второй сценарий реализуется при $\theta_0 > \theta_f$. Стадия упругой деформации в процессе сжатия сменяется стадией пластического течения пористого скелета с напряжениями $\sigma_1 = -4\tau_s/3 + k_a\varepsilon_1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 2\tau_s/3 + k_a\varepsilon_1$. Затем происходит уплотнение среды. Напряжения в уплотненной среде вычисляются по формулам (3.2), полученным из условия пластичности и уравнения упругого изменения объема. Зависимость нормального напряжения от деформации в случае этого сценария показана на рис. 3,б. Угловые коэффициенты звеньев ломаной $\beta_1 = k_a + 4\mu_a/3$, $\beta_2 = k_a$ и $\beta_3 = k_a + k_b$ удовлетворяют неравенствам $\beta_1 > \beta_2$ и $\beta_2 < \beta_3$.

В зависимости от величины давления на границе полупространства возможны четыре варианта решения уравнений (3.3). В первом из них при $p_0 \leq p'_f$ ($p'_f = (4/3 + k_a/\mu_a)\tau_s$ — предельное упругое давление) от границы внутрь области распространяется продольная упругая волна со скоростью c_p^0 . Во втором варианте при $p'_f < p_0 \leq p'_\theta$ ($p'_\theta = k_a\theta_0 + 4\tau_s/3$ — давление, при котором происходит схлопывание пор) реализуется двухволновая конфигурация, состоящая из упругого предвестника со скоростью c_p^0 , за фронтом которого напряжения соответствуют пределу упругости ($\sigma_1 = -p'_f$), и пластической ударной волны. Скорость этой волны $c_f^0 = \sqrt{k_a/\rho_0}$ и состояние за фронтом определяются с помощью уравнений (3.3).

В третьем варианте при $p_0 > p'_\theta$ вместо пластической ударной волны за упругим предвестником движется волна пластического уплотнения, скорость которой определяется уравнением

$$\left(\frac{c'_\theta}{c_f}\right)^2 = \frac{p_0 - p'_f}{p_0 - p'_f + k_b(\theta_0 - \tau_s/\mu_a)}.$$

Волне пластического уплотнения соответствует пунктирная линия на рис. 3,б. За ее фронтом деформация среды ε_1 и скорость частиц v_1 могут быть вычислены через заданное напряжение $\sigma_1 = -p_0$ из уравнений (3.2), (3.3). Четвертый вариант реализуется только в случае сильнопористой среды, когда выполняется условие $k_b > 4\mu_a/3$. В этом случае при $p_0 = p'_0$, где

$$p'_0 = \left(k_b + \frac{4}{3}\mu_a\right) \frac{3k_b\theta_0 - 4\tau_s}{3k_b - 4\mu_a},$$

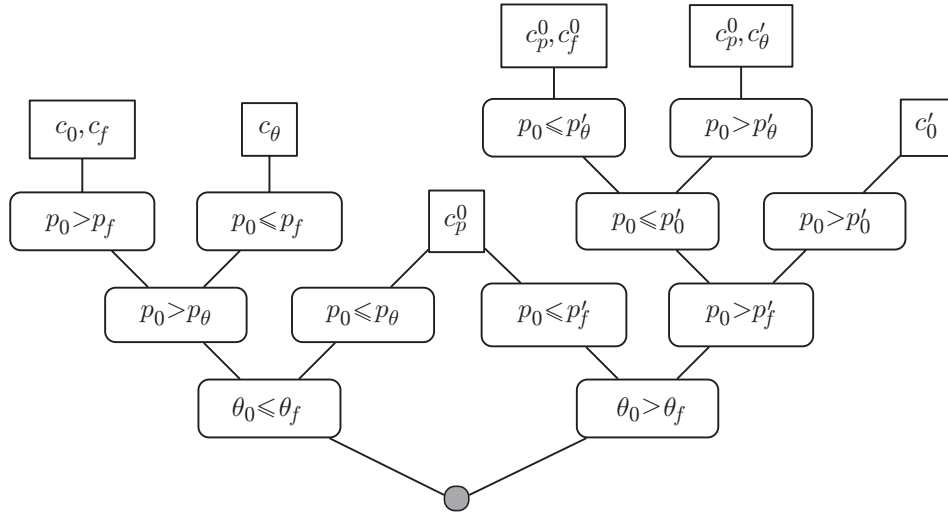


Рис. 4. Дерево решений

волна пластического уплотнения догоняет упругий предвестник. При $p_0 > p'_0$ вместо двух волн возникает единственная волна, движущаяся со скоростью c'_0 :

$$\left(\frac{c'_0}{c_f}\right)^2 = \frac{p_0}{p_0 + k_b\theta_0 - 4\tau_s/3}.$$

На ее фронте ненапряженное состояние пористой среды мгновенно переходит в пластически уплотненное состояние, соответствующее заданному давлению. Данная волна показана штрихпунктирной линией на рис. 3,б.

Дерево решений приведено на рис. 4 в виде графа, в вершинах которого указаны скорости одной или двух волн в зависимости от варианта решения.

4. Вычислительный алгоритм. В декартовой системе координат соотношения (1.4) принимают следующий вид:

$$\rho_0 \dot{v}_i = (s_{ij} + \pi_{ij}(q + q^0))_{,j} + f_i, \quad (\tilde{s}_{ij} - s_{ij})(a_{ijkl} \dot{s}_{kl} - v_{i,j}) \geq 0 \quad (\tilde{s} \in F, \quad s \in F),$$

$$2b_{ijkl} \dot{q}_{kl} = v_{i,j} + v_{j,i}.$$

Здесь индексы после запятой обозначают частные производные по пространственным переменным; по повторяющимся индексам проводится суммирование. При построении алгоритма эти соотношения целесообразно представить в матричной форме в виде вариационного неравенства

$$(\tilde{V} - V)' \left(A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{k=1}^n B^k \frac{\partial V}{\partial x_k} - G \right) \geq 0, \quad \tilde{V} \in F, \quad V \in F, \quad (4.1)$$

где штрих означает транспонирование вектора; n — пространственная размерность модели; G — вектор объемных сил; U, V — вектор-функции, составленные из проекций вектора скорости и компонент тензоров напряжений. В трехмерном случае

$$U = (v_1, v_2, v_3, s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{23}, s_{13}, s_{12}, q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{23}, q_{13}, q_{12})',$$

$$V = (v_1, v_2, v_3, s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{23}, s_{13}, s_{12}, \pi_{11}, \pi_{22}, \pi_{33}, \pi_{23}, \pi_{13}, \pi_{12})'.$$

Матрицы-коэффициенты дифференциального оператора в неравенстве (4.1) содержат феноменологические параметры пористого материала. Эти матрицы симметричны, кроме того, матрица A положительно определена.

Явный по времени алгоритм численной реализации вариационного неравенства (4.1) строится с помощью метода расщепления по физическим процессам: сначала на каждом временном слое решается задача деформирования упругой пористой среды, затем полученное решение корректируется, для того чтобы учесть пластические свойства. При решении упругой задачи

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^n B^k \frac{\partial V}{\partial x_k} + G \quad (4.2)$$

используется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным. Одномерные системы уравнений на этапах расщепления решаются с помощью явной монотонной ENO-схемы типа “предиктор-корректор” с кусочно-линейными распределениями скоростей и напряжений в ячейках, построенной по принципам сеточно-характеристических методов.

При учете пластичности неравенство (4.1) аппроксимируется на интервале $(t, t + \Delta t)$ в каждой ячейке пространственной сетки и приводится к виду

$$(\tilde{V} - V)'A(U - \bar{U}) \geq 0, \quad \tilde{V} \in F, \quad V \in F, \quad (4.3)$$

где \bar{U} — решение упругой задачи (4.2) в момент времени $t + \Delta t$. Для неравенства (4.3) строится точное решение, которое вычисляется достаточно просто, поскольку ограничение $V \in F$ накладывается только на компоненты тензора s . В результате определяется решение на новом слое по времени.

Подробно алгоритм расщепления по пространственным переменным при решении аналогичных задач на структурированных криволинейных сетках описан в работе [15].

5. Программная реализация. Вычислительный алгоритм реализован в виде комплекса параллельных программ, предназначенных для анализа процессов упругопластического деформирования пористых сред под действием внешних динамических нагрузок на многопроцессорных вычислительных системах с кластерной архитектурой. Программный комплекс позволяет проводить расчеты распространения волн, вызванных внешними механическими воздействиями, в среде, составленной из произвольного числа разнородных блоков с криволинейными границами. Распараллеливание вычислений проводится на этапе расщепления задачи по пространственным переменным.

Для тестирования алгоритма и программ в одномерной постановке решалась серия задач о распространении плоских продольных волн в полупространстве. Сравнение результатов численных расчетов и точных решений показало, что они хорошо согласуются. На рис. 5 приведены эпюры нормального напряжения σ_1 при значениях пористости $\theta_0 = 0,1; 1,0; 5,0$ %. Результаты получены для пенистого алюминия с тремя вариантами параметров (см. таблицу) на достаточно мелкой сетке с 500 узлами. На более грубых сетках пластические волны существенно сглаживаются, однако положения фронтов, как и на мелкой сетке, воспроизводятся с высокой точностью. Давление p_0 на границе полупространства в этих вариантах задавалось таким образом, чтобы материал по мере прохождения волн переходил в уплотненное пластическое состояние. В данном случае скорости волн существенно зависят от напряженного состояния среды по обе стороны фронта. Таким образом, используемые тесты позволяют объективно оценить эффективность вычислительного алгоритма.

Кроме того, при тестировании использовалось точное решение осесимметричной задачи о расширении цилиндрической области в безграничной пористой среде [14]. В расчетах задавалось условие медленного (квазистатического) нагружения давлением на границе полости от нуля до заданного значения p_0 . Сравнивались характерные радиусы пластических зон и зон схлопывания пор. Оказалось, что, выполняя численные расчеты, можно

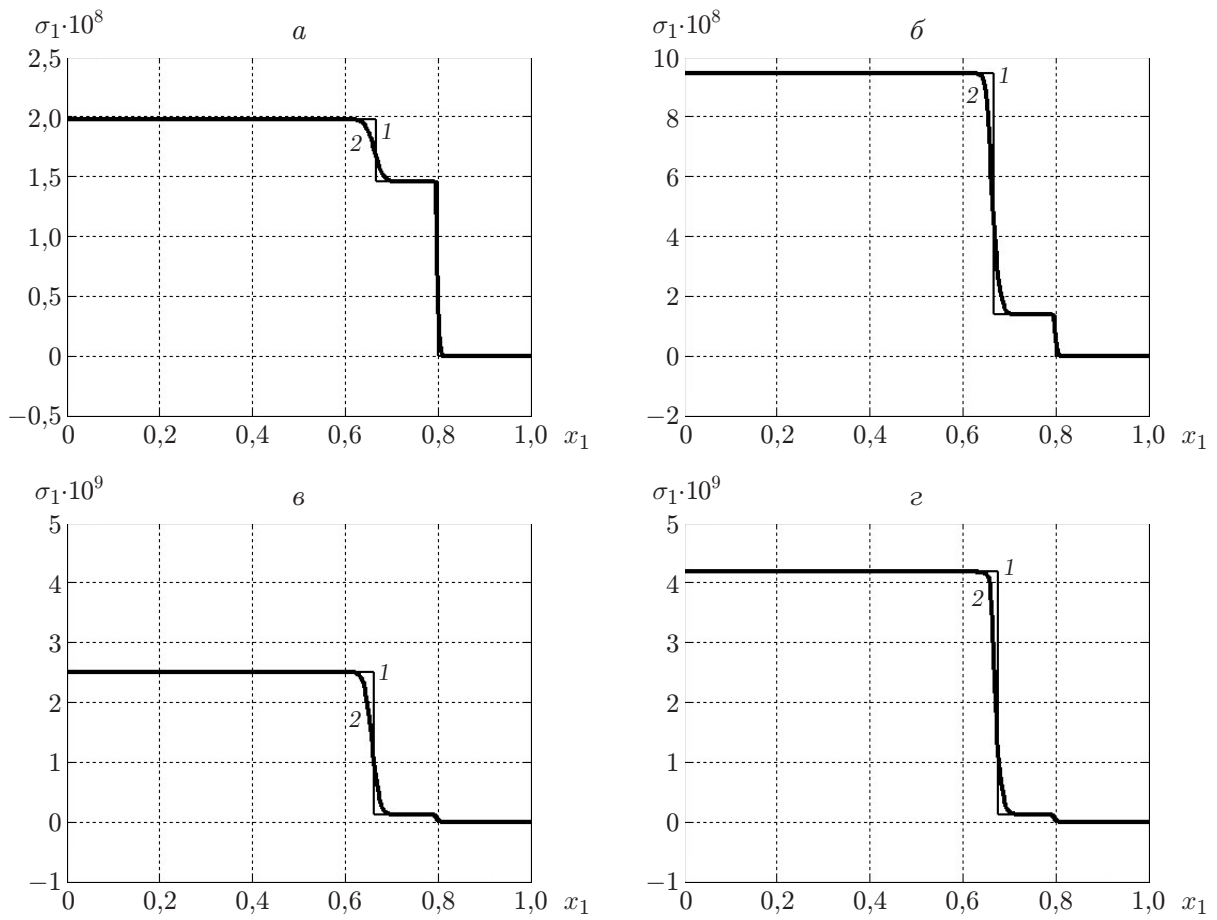


Рис. 5. Эпюры нормального напряжения:
a — $\theta_0 = 0,1 \%$, $p_0 = 5\tau_s$, *б* — $\theta_0 = 1 \%$, $p_0 = 25\tau_s$, *в* — $\theta_0 = 5 \%$, $p_0 = 75\tau_s$, *г* — $\theta_0 = 5 \%$, $p_0 = 125\tau_s$; 1 — точное решение, 2 — результаты численных расчетов

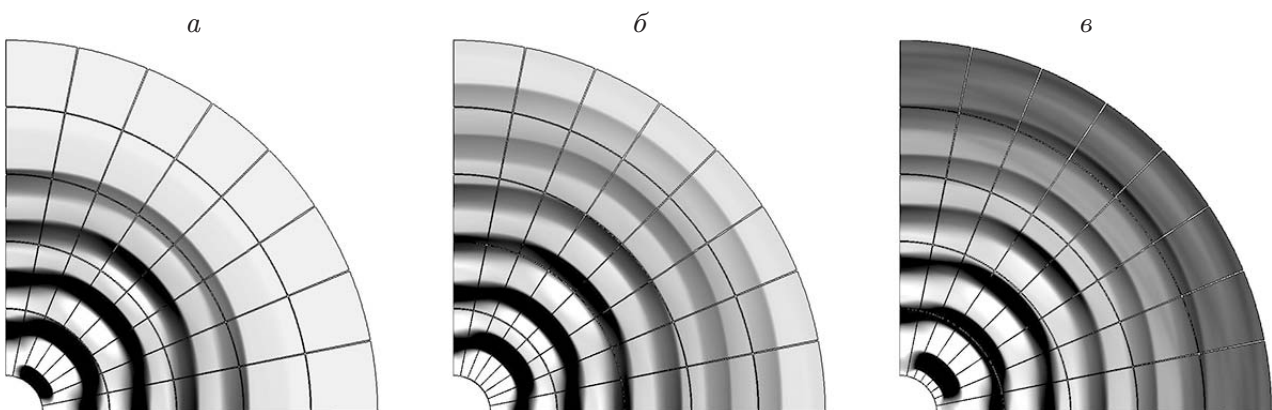


Рис. 6. Изолинии объемной деформации в различные моменты времени при периодическом нагружении:
a — $t = 107$ мкс, *б* — $t = 150$ мкс, *в* — $t = 215$ мкс; темные области — области, в которых происходит схлопывание пор, светлые — области наибольшего объемного расширения, серые — области, в которых деформация изменяется в диапазоне от $-1,5$ до $0,1 \%$; тонкие линии — границы областей, в которых решения получены с использованием различных процессоров

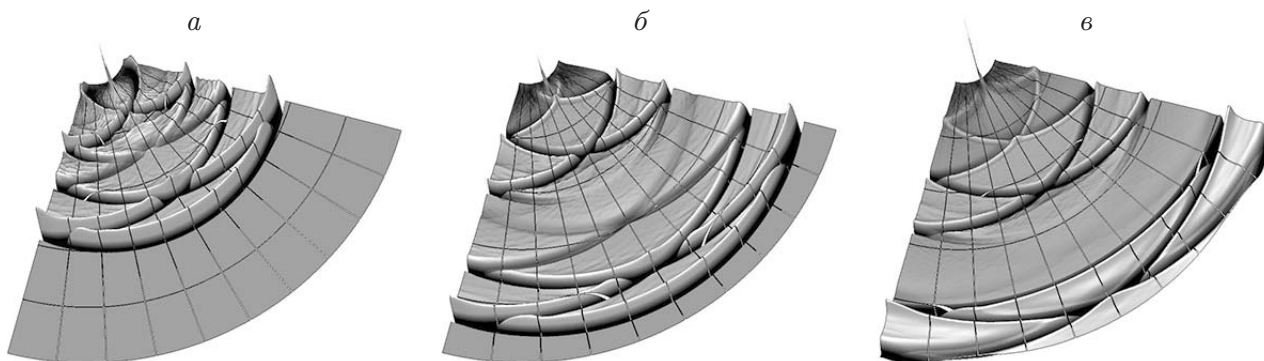


Рис. 7. Поля радиального напряжения (задача Лэмба) в различные моменты времени:

a — $t = 86$ мкс, b — $t = 129$ мкс, v — $t = 172$ мкс; темные области — области с наибольшим сжимающим напряжением, светлые — области с наибольшим растягивающим напряжением, серые — области, в которых напряжение изменяется в диапазоне от $-0,01$ до $0,01$ МПа; тонкие линии — границы областей, в которых решения получены с использованием различных процессоров

достоверно определять границы характерных зон включая зоны неполной и полной пластичности, а также границы зон схлопывания пор при активном нагружении и разгрузке.

На рис. 6 представлены результаты решения задачи о расширении толстостенной трубы под действием локализованного периодически повторяющегося П-образного импульса давления. На внешней поверхности трубы отсутствуют перемещения, боковые границы расчетной области (кольцевого сектора) являются линиями симметрии. Расчеты выполнены для пенистого алюминия с пористостью $\theta_0 = 1\%$. Внутренний радиус трубы равен $0,1$ м, внешний радиус — 1 м. На рис. 6 показаны изолинии объемной деформации с момента, когда волна нагружения проходит через середину трубы, до момента, когда волна отражается от внешней границы. Разностная сетка имеет размеры 400×400 узлов. Расчеты проведены на 40 процессорах кластера.

На рис. 7 приведены результаты численного решения обобщенной задачи Лэмба о действии сосредоточенной импульсной нагрузки в средней точке на внутренней поверхности сектора. Показано поле радиального напряжения в различные моменты времени, на котором можно идентифицировать волновые фронты падающих продольных и поперечных волн, а также волн, отраженных от боковых границ — линий симметрии и от внешней поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. Low frequency range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28, N 2. P. 168–178.
2. **Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И.** Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 1. С. 99–110.
3. **Carcione J. M.** Viscoelastic effective rheologies for modelling wave propagation in porous media // Geophys. Prospect. 1998. V. 46, iss. 3. P. 249–270.
4. **Зубков В. В., Кошелев В. Ф., Линьков А. М.** Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2007. № 1. С. 45–63.

5. **Lukyanov A. A., Chugunov N. V., Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V.** Modelling of irreversible deformation near the tip of a crack in a porous domain containing oil and gas // Proc. of the 14th Europ. conf. on the mathematics of oil recovery, Sicily (Italy), Sept. 8–11, 2014. Houten: EAGE, 2014. P. 1–11.
6. **Gibson L. J.** Cellular solids: structure and properties / L. J. Gibson, M. F. Ashby. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
7. **Banhart J., Baumeister J.** Deformation characteristics of metal foams // J. Materials Sci. 1998. V. 33, iss. 6. P. 1431–1440.
8. **Stobener K., Lehmus D., Avalle M., et al.** Aluminum foam-polymer hybrid structures (APM aluminum foam) in compression testing // Intern. J. Solids Structures. 2008. V. 45, iss. 21. P. 5627–5641.
9. **Schaedler T. A., Jacobsen A. J., Torrents A., et al.** Ultralight metallic microlattices // Science. 2011. V. 334, N 6058. P. 962–965.
10. **Badiche X., Forest S., Guibert T., et al.** Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: Application of the mechanics of cellular solids and of porous materials // Materials Sci. Engng. Ser. A. 2000. V. 289, N 1/2. P. 276–288.
11. **Simone A. E., Gibson L. J.** The effects of solid distribution on the stiffness of metallic foams // Acta Materialia. 1998. V. 46, iss. 6. P. 2139–2150.
12. **Forest S., Blazy J.-S., Chastel Y., Moussy F.** Continuum modeling of strain localization phenomena in metallic foams // J. Materials Sci. 2005. V. 40, iss. 22. P. 5903–5910.
13. **Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V.** Phenomenological modeling of deformation of porous and cellular materials taking into account the increase in stiffness because of the collapse of pores // Proc. of the 4th Intern. conf. on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering, Kos Island (Greece), June 12–14, 2013. Athens: Nat. Tech. Univ. of Athens, 2013. P. 4277–4286.
14. **Садовский В. М., Садовская О. В., Лукьянов А. А.** Радиальное расширение сферической и цилиндрической полостей в безграничной пористой среде // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 4. С. 160–173.
15. **Садовская О. В.** Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. М.: Физматлит, 2008.

Поступила в редакцию 13/IX 2016 г.
