

УДК 532.5:536

## Математическое моделирование режимов плавления в квадратной полости с локальным источником энергии\*

Н.С. Бондарева<sup>1</sup>, М.А. Шермет<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный университет

<sup>2</sup>Томский политехнический университет

E-mail: Michael-sher@yandex.ru

Проведен численный анализ нестационарных режимов плавления материала внутри замкнутой полости при наличии локального источника энергии. Математическая модель, сформулированная в безразмерных преобразованных переменных “функция тока–завихренность–температура”, реализована численно методом конечных разностей. Детально изучено влияние чисел Рэлея  $4 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^7$  и Стефана  $2,21 \leq Ste \leq 5,53$ , на распределения скорости, температуры и локального числа Нуссельта вдоль поверхности источника энергии в различные моменты времени. Установлены нестационарные эффекты рассматриваемого процесса, проявляющиеся при высоких значениях числа Рэлея.

**Ключевые слова:** плавление, естественная конвекция, теплопроводность, приближение Буссинеска, ламинарный режим, численное моделирование.

В последнее время материалы с изменяемым фазовым состоянием (парафины, жирные кислоты, солевые растворы) находят широкое применение в энергетических отраслях промышленности [1]. Эти вещества, как правило, имеют относительно невысокую температуру плавления, высокую скрытую энергию плавления и высокую теплоемкость. Поглощение и выделение энергии за счет фазовых превращений используется при охлаждении электроники, в солнечных энергетических накопителях, системах терморегулирования в зданиях, что объясняется свойством таких материалов поглощать и высвобождать большое количество энергии, сохраняя при этом температуру почти неизменной и осуществляя при этом фазовый переход.

На данный момент опубликовано небольшое количество работ, посвященных исследованию нестационарных режимов естественной конвекции в областях, заполненных материалами с изменяемым фазовым состоянием [1–11]. Так, например, результаты экспериментального исследования плавления чистого галлия внутри параллелепипеда с двумя изотермическими противоположными вертикальными гранями и адиабатическими остальными стенками представлены в работе [2]. Авторам удалось проследить эволюцию фронта плавления и установить корреляционные соотношения для коэффициента

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-31137 мол\_а) и Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-6942.2015.8).

теплообмена. Следует отметить, что эта работа часто используется в качестве эталона при разработке вычислительных кодов для моделирования конвективного теплопереноса с фазовыми превращениями [3–8]. Численное моделирование режима плавления материала с изменяемым фазовым состоянием (*n*-октадекан) внутри прямоугольной полости с изотермической нижней стенкой и теплоизолированными остальными границами проводилось в работе [3]. В результате на основе метода конечных элементов были получены распределения скорости и температуры, отражающие эволюцию процесса плавления, а также установлены термогидродинамические структуры, иллюстрирующие влияние числа Рэлея. Исследование процесса плавления твердого галлия в замкнутой прямоугольной полости при наличии изотермической стенки синусоидальной формы представлено в работе [4]. Моделирование проводилось на основе метода контрольного объема с использованием неструктурированной сетки и энтальпийно-пористого подхода выделения фронта плавления. Было установлено повышение интенсивности плавления при увеличении амплитуды криволинейной границы вследствие роста поверхности контакта между изотермической границей и плавящимся материалом. Следует отметить, что использование волнообразных поверхностей в замкнутых технических системах позволяет значительно интенсифицировать процесс теплопереноса [5]. Анализ стационарных режимов естественной конвекции при наличии фазовых превращений в замкнутой дифференциально обогреваемой квадратной полости [6] показал существенную зависимость масштабов и интенсивности внутреннего конвективного течения, а также формы фазовой границы от чисел Рэлея, Прандтля и Стефана. В частности было установлено, что увеличение числа Рэлея приводит к значительному искривлению границы фазового перехода.

Разработке эффективной системы охлаждения электронных устройств с применением материалов с изменяемым фазовым состоянием был посвящен ряд исследований [7–11]. Экспериментальное изучение условий охлаждения портативных электронных устройств на основе материалов с изменяемым фазовым состоянием, размещенных внутри зоны теплоотвода, проводилось в работах [7, 8]. В результате было установлено, что использование *n*-эйкозана внутри алюминиевой конструкции для теплоотвода позволяет стабилизировать температуру всей системы и увеличивает время эксплуатации устройства. Следует отметить, что последнее зависит от объема используемого материала с изменяемым фазовым состоянием и мощности источника тепловыделения. Анализ эффективности воздушной системы охлаждения для телекоммуникационных базовых станций с использованием материалов с изменяемым фазовым состоянием представлен в работе [9]. Охлаждение внутреннего пространства базовых станций осуществлялось за счет кондиционирования холодных воздушных масс окружающей среды, а избыточная энергия охлаждения аккумулировалась в контейнерах, заполненных материалом с изменяемым фазовым состоянием. При отключении системы кондиционирования помещения охлаждение осуществлялось за счет фазовых превращений внутри контейнеров. Было показано, что такая система позволяет существенно снизить объемы потребления электроэнергии, в некоторых районах до 67 %. Численное моделирование трехмерных нестационарных режимов охлаждения портативного электронного устройства с использованием материалов с изменяемым фазовым состоянием проводилось в работах [10, 11]. Было установлено, что разделение общего объема материала с изменяемым фазовым состоянием на несколько частей с помощью теплопроводных перегородок позволяет интенсифицировать режим охлаждения, а также стабилизировать температуру внутри самого устройства в течение длительного срока.

Представленный обзор показал, что опубликованные результаты отражают только влияние бесконечно тонких изотермических элементов, расположенных вдоль границ анализируемой области, на структуру течения и теплоперенос внутри полости в результате плавления рабочей среды. Известно, что наличие локальных изотермических элементов конечных размеров даже в случае термогравитационной конвекции воздушной

среды приводит к существенной модификации гидродинамических полей внутри полости и проявляется в изменении интенсивности теплоотвода от поверхности таких тепловыделяющих элементов [12]. Для детального изучения масштабов влияния локальных тепловыделяющих элементов на режимы плавления необходимо проводить дополнительные исследования.

Целью настоящей работы является численный анализ нестационарных режимов плавления материала с изменяемым фазовым состоянием внутри замкнутой полости с локальным источником энергии квадратной формы, расположенным на нижней границе, и вертикальными охлаждающими стенками. В отличие от представленных в обзоре работ в предлагаемом исследовании моделирование проводится с использованием преобразованных переменных «функция тока–завихренность–температура», что позволяет существенно сократить время вычислений за счет уменьшения числа решаемых уравнений.

### Математическая модель и метод решения

Рассматривается нестационарный процесс плавления материала внутри замкнутой квадратной полости при наличии изотермического источника с температурой  $T_h$  (рис. 1). Область решения содержит две вертикальные изотермические границы с температурами  $T_c$  ( $T_h > T_c$ ), остальные стенки являются адиабатическими. Подвод тепла в область осуществляется за счет источника квадратной формы, расположенного на нижней стенке и имеющего постоянную температуру выше температуры плавления материала. В начальный момент времени материал находится в твердом состоянии и имеет температуру, равную температуре плавления материала  $T_m$ . При проведении вычислительных экспериментов считается, что внутри рабочей среды теплоперенос осуществляется за счет механизмов теплопроводности и конвекции; расплав является ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска; режим течения расплава является ламинарным; вязкой диссипацией можно пренебречь; стенки полости являются непроницаемыми для расплава.

Процесс переноса массы, импульса и энергии описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции Обербека–Буссинеска в естественных переменных «скорость–давление–энтальпия» [11, 13]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_f). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение энергии записывается в энтальпийной форме:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

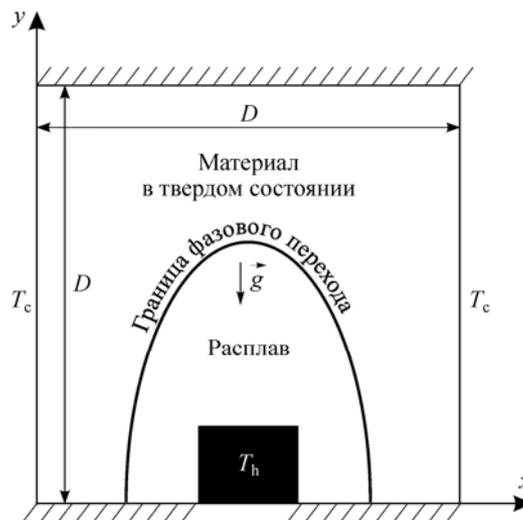


Рис. 1. Область решения задачи.

$$\text{где } h = \begin{cases} \rho_s C_s T, & T < T_m, \\ \rho_s C_s T_m + \rho_m L_m + \rho_m C_m (T - T_m), & T \geq T_m. \end{cases}$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения,  $x, y$  — координаты декартовой системы координат,  $\rho_s$  — плотность материала в твердом состоянии,  $\rho_m$  — плотность расплава,  $C_s$  — удельная теплоемкость материала в твердом состоянии,  $C_m$  — удельная теплоемкость расплава,  $u, v$  — составляющие вектора скорости в проекции на оси  $x, y$  соответственно,  $t$  — время,  $p$  — давление,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $h$  — энтальпия,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $L_m$  — скрытая теплота плавления.

Для устранения разрыва энтальпии как функции температуры на границе раздела сред было введено сглаживающее отображение [13, 14]:

$$\varphi = \begin{cases} 0, & T < T_m - \eta, \\ \frac{T - (T_m - \eta)}{2\eta}, & T_m - \eta \leq T \leq T_m + \eta, \\ 1, & T > T_m + \eta, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\eta$  — размер переходной зоны вблизи границы раздела фаз. Значение управляющего параметра  $\eta$  определялось на основе численных экспериментов [13, 14].

Введение сглаживающей функции (5) отражает наличие переходной зоны в окрестности межфазной границы и тем самым позволяет перейти от уравнения для энтальпии (4) к уравнению для температуры и не разделять области жидкой и твердой фаз, решая полученное уравнение энергии методом сквозного счета [11, 13, 14].

С целью сокращения вычислительного времени при решении рассматриваемой задачи в качестве искомых гидродинамических функций вводятся функция тока  $\psi$   $\left( u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$  и завихренность скорости  $\omega$   $\left( \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . Следует отметить, что введение этих функций позволяет исключить из рассмотрения поле давления и тем самым уменьшить количество решаемых уравнений вследствие тождественного выполнения уравнения неразрывности (1).

Численная реализация процесса плавления проводилась в безразмерных переменных. В качестве масштабов расстояния, скорости, времени, температуры, функции тока и завихренности были выбраны  $D, \sqrt{g\beta(T_h - T_m)D}, \sqrt{D/[g\beta(T_h - T_m)]}, (T_h - T_m), \sqrt{g\beta(T_h - T_m)D^3}, \sqrt{g\beta(T_h - T_m)}/D$  соответственно. Безразмерные переменные имели вид:

$$\begin{aligned} X = x/D, Y = y/D, U = u/\sqrt{g\beta(T_h - T_m)D}, V = v/\sqrt{g\beta(T_h - T_m)D}, \\ \tau = t\sqrt{g\beta(T_h - T_m)}/D, \Theta = (T - T_m)/(T_h - T_m), \Psi = \psi/\sqrt{g\beta(T_h - T_m)D^3}, \\ \Omega = \omega\sqrt{D/[g\beta(T_h - T_m)]}, \end{aligned}$$

где  $D$  — размер полости (рис. 1),  $X, Y$  — безразмерные координаты, соответствующие координатам  $x, y$ ;  $U, V$  — безразмерные скорости, соответствующие скоростям  $u, v$ ;  $\tau$  — безразмерное время,  $\Theta$  — безразмерная температура,  $\Psi$  — безразмерный аналог функции тока,  $\Omega$  — безразмерный аналог завихренности скорости.

С учетом введенных сглаживающей функции (5), функции тока и завихренности, а также безразмерных переменных, определяющие уравнения (1)–(4) примут следующий вид [11, 13–15]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi) \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right] + \text{Ste} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right] = \\ = \frac{\xi(\varphi)}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $\text{Ra} = g\beta(T_h - T_m)D^3/\nu a_m$  — число Рэлея,  $\text{Pr} = \nu/a_m$  — число Прандтля,  $\text{Ste} = L_m/C_m(T_h - T_m)$  — число Стефана,  $a_m$  — коэффициент теплопроводности расплава,  $\zeta(\varphi) = \frac{\rho_s C_s}{\rho_m C_m} + \varphi \left( 1 - \frac{\rho_s C_s}{\rho_m C_m} \right)$  и  $\xi(\varphi) = \frac{\lambda_s}{\lambda_m} + \varphi \left( 1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_m} \right)$  — вспомогательные функции.

Следует отметить, что вспомогательные функции  $\zeta(\varphi)$  и  $\xi(\varphi)$  появляются в уравнении (8) вследствие перехода от уравнения энергии в энтальпийной форме к уравнению энергии, записанному через температуру. Использование энтальпийной формы уравнения энергии позволяет применять метод сквозного счета для определения поля температуры. Более подробно такой подход изложен в работах [13, 14].

Начальные и граничные условия для сформулированной системы дифференциальных уравнений в частных производных (6)–(8) имеют следующий вид.

Начальное условие:

$$\Psi(X, Y, 0) = \Omega(X, Y, 0) = \Theta(X, Y, 0) = 0.$$

Граничные условия:

– на границах  $X=0$  и  $X=1$  поддерживается постоянная температура охлаждения  $\Theta = \Theta_c = -0,3$ ; в случае расплавления материала вплоть до границ  $X=0$  и  $X=1$  для функции тока и завихренности рассматривались стандартные граничные условия:  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = -\partial^2 \Psi / \partial X^2$ ;

– на горизонтальных стенках рассматривались условия теплоизоляции  $\partial \Theta / \partial Y = 0$ ; в случае расплавления материала вплоть до этих границ для функции тока и завихренности рассматривались условия вида:  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = -\partial^2 \Psi / \partial Y^2$ ;

– на межфазной границе:  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = -\left( \partial^2 \Psi / \partial X^2 + \partial^2 \Psi / \partial Y^2 \right)$ ;

– на поверхности источника энергии:  $\Theta = \Theta_h = 1$ ,  $\Psi = 0$ ,  $\Omega = -\left( \partial^2 \Psi / \partial X^2 + \partial^2 \Psi / \partial Y^2 \right)$ .

Необходимо отметить, что в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) безразмерная температура во всей области равнялась 0. При  $\tau > 0$  мгновенно на вертикальных стенках полости устанавливалась температура  $\Theta_c = -0,3$ , а на поверхности источника энергии температура  $\Theta_h = 1$ , что и являлось причиной теплопереноса внутри полости.

Сформулированная краевая задача (6)–(8) с соответствующими начальными и граничными условиями решалась методом конечных разностей [12, 15–18] на равномерной

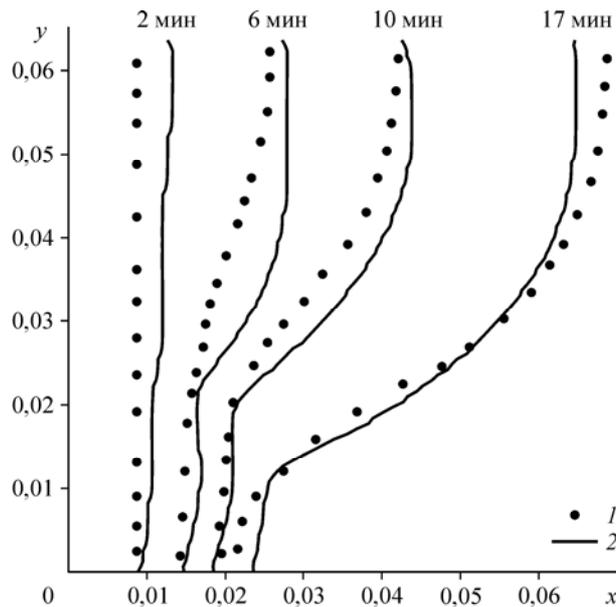


Рис. 2. Положение фронта плавления в различные моменты времени в сравнении с экспериментальными данными [2].  
1 — экспериментальные данные [2], 2 — расчет.

структурированной сетке размерности  $200 \times 200$ . Для дискретизации конвективных слагаемых в уравнении дисперсии завихренности (6) и уравнении энергии (8) использовалась монотонная схема Самарского второго порядка точности [18], а диффузионные слагаемые во всех уравнениях аппроксимировались на основе центральных разностей. Разностное уравнение Пуассона для функции тока (7) было решено методом последовательной верхней релаксации. Аппроксимация уравнений дисперсии завихренности и энергии была проведена с использованием локально-одномерной схемы Самарского. Полученные разностные уравнения разрешались методом прогонки.

Разработанный метод решения был протестирован на модельных задачах [2, 3]. На рис. 2 видно достаточно близкое расположение фронта плавления, полученного численным методом, с экспериментальными данными [2]. Следует отметить, что наблюдаемые отклонения в положении границы фазового перехода на начальном временном этапе обусловлены трехмерным характером задачи, а также некоторой анизотропией свойств чистого галлия, который использовался в эксперименте [2]. Более подробное описание данной тестовой задачи представлено в работе [16].

Рисунок 3 иллюстрирует хорошее совпадение профилей локального безразмерного теплового потока на нижней изотермической стенке в зависимости от времени с численными данными [3]. Моменты времени, представленные на рис. 3*b*, идентичны моментам времени для рис. 3*a*.

Результаты, представленные на рис. 2 и 3, наглядно показывают, что используемый численный алгоритм решения приводит к достаточно хорошему согласованию с экспериментальными и численными данными других авторов.

### Результаты численного моделирования

В качестве материала с изменяемым фазовым состоянием был рассмотрен *n*-октадекан со следующими характеристиками:  $\rho_m = 746 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_s = 814 \text{ кг/м}^3$ ,  $\beta = 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ ,  $\mu = 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ ,  $\lambda_m = 0,157 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ,  $\lambda_s = 0,39 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ,  $T_m = 301 \text{ К}$ ,  $L_m = 2,41 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ ,  $C_m = 2200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $C_s = 1900 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ . Численные

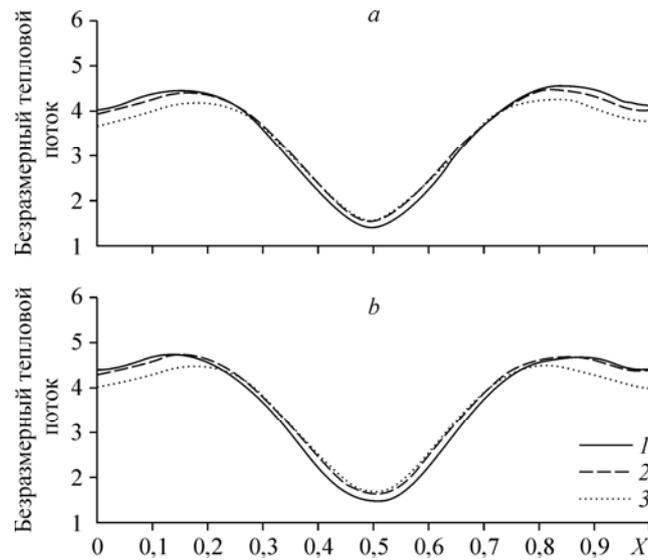


Рис. 3. Распределения локального числа Нуссельта на нижней стенке в различные моменты времени. Данные работы [3] (a) и настоящей работы (b);  $\tau = 709$  (1), 851 (2), 1064 (3).

исследования проведены при следующих значениях определяющих параметров:  $4 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^7$ ,  $2,21 \leq Ste \leq 5,53$ ,  $Pr = 48,36$ , что обусловлено анализом влияния размера полости и температурного напора на структуру течения и теплоперенос. Размер полости варьировался в диапазоне от 1 до 5 сантиметров, а температурный напор изменялся от 10 до 50 °С.

Как было отмечено выше, помимо кондуктивного механизма теплоперенос внутри рассматриваемой области осуществляется за счет формирования конвективных течений, возникающих в расплавленном материале. Циркуляция расплава способствовала ускоренному плавлению и более интенсивному переносу энергии от источника.

На рис. 4 представлены изолинии функции тока  $\Psi$  и температуры  $\Theta$  при  $Ra = 4 \cdot 10^5$ ,  $Ste = 5,53$  в различные моменты времени. Граница фазового перехода на рисунках изображена сплошной линией в распределениях линий тока и изотермой  $\Theta = 0$  в распределениях

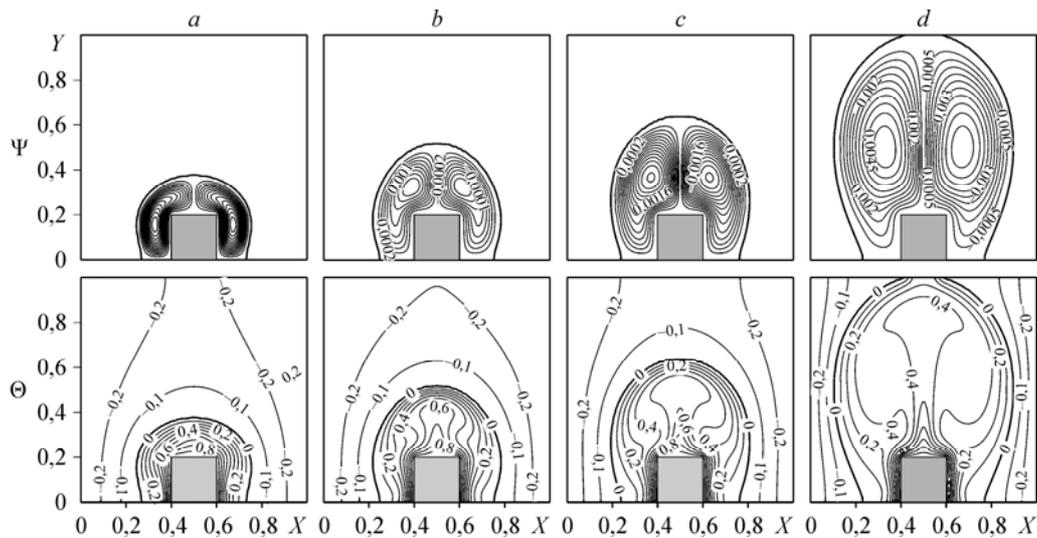


Рис. 4. Линии тока  $\Psi$  и изотермы  $\Theta$  при  $Ra = 4 \cdot 10^5$  и  $Ste = 5,53$ .  $\tau = 244,8$  (a), 489,6 (b), 734,4 (c), 1713,6 (d).

изолиний температуры. Следует отметить, что на начальном временном этапе при  $\tau \leq 244,8$  (рис. 4а) определяющим механизмом теплопереноса в зоне расплава является теплопроводность, что подтверждается равномерным распределением изотерм в этой области. В последующие моменты времени формируется тепловой факел над источником энергии и, соответственно, происходит более интенсивное плавление материала в вертикальном направлении вследствие интенсификации конвективного механизма переноса энергии. При этом циркуляционное течение независимо от времени характеризуется двумя конвективными ячейками, отражающими наличие восходящего течения непосредственно над тепловыделяющим элементом и двух нисходящих течений вдоль границы фазового перехода. С ростом  $\tau$  происходит смещение ядер конвективных ячеек в вертикальном направлении, что объясняется интенсификацией течения внутри зоны расплава:  $|\Psi|_{\max}^{\tau=244,8} = 0,0007 < |\Psi|_{\max}^{\tau=489,6} = 0,0018 < |\Psi|_{\max}^{\tau=734,4} = 0,003 < |\Psi|_{\max}^{\tau=1713,6} = 0,0055$ .

К моменту времени  $\tau = 1713,6$  (рис. 4d) граница плавления достигает верхней адиабатической стенки при наличии выраженного теплового факела внутри расплава. Начиная с этого временного момента реализуется интенсивное плавление материала в поперечном направлении. Необходимо отметить, что при  $Y = 0$  продвижение фронта плавления в горизонтальном направлении в рассматриваемом временном диапазоне незначительно вследствие доминирования в области источника энергии кондуктивного механизма переноса тепла и достижения некоторого термического равновесия с тепловым потоком со стороны охлаждающих вертикальных стенок.

Детальные распределения температуры в сечениях  $X = 0,5$  и  $Y = 0,5$ , а также вертикальной компоненты скорости в сечении  $Y = 0,5$  представлены на рис. 5 и 6а.

Анализируя распределения температуры, можно отметить, что с ростом времени наиболее интенсивный прогрев, а соответственно и плавление происходят в центральной части полости. При этом непосредственно над источником энергии ( $0,2 < Y < 0,3$ ) заметно даже и понижение температуры при  $\tau = 1713,6$  по сравнению с начальным временным этапом  $\tau \leq 244,8$ , что обусловлено интенсивным конвективным течением и охлаждением нисходящих потоков расплава со стороны материала, находящегося в твердом состоянии. Такая тенденция наблюдается также и на большем удалении от тепловыделяющего элемента. Следует отметить снижение температуры в верхней части анализируемого объекта ( $Y > 0,8$ ) для двух моментов времени  $\tau = 244,8$  и  $\tau = 489,6$ , что связано с различными скоростями продвижения волны пониженной температуры со стороны вертикальных

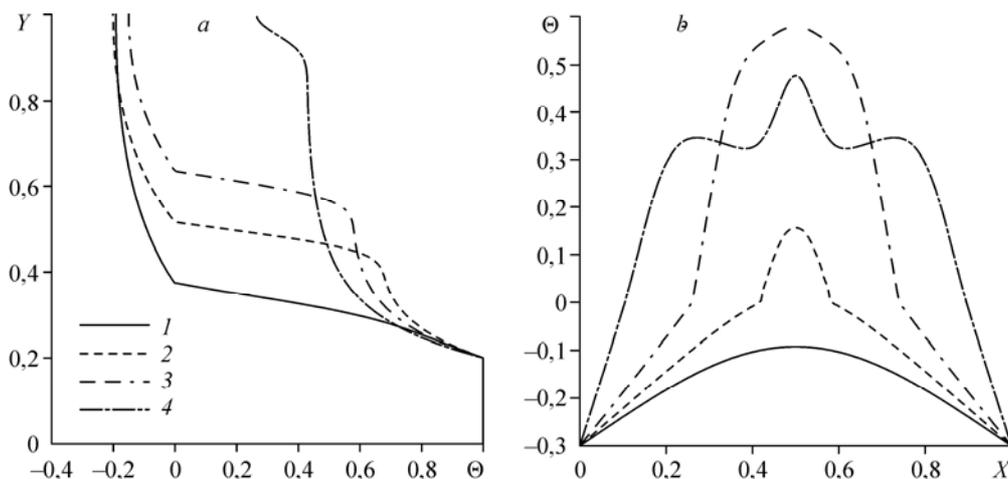


Рис. 5. Профили температуры  $\Theta$  в сечениях  $X = 0,5$  (а) и  $Y = 0,5$  (б) при  $Ra = 4 \cdot 10^5$  и  $Ste = 5,53$  в различные моменты времени.  $\tau = 244,8$  (1), 489,6 (2), 734,4 (3), 1713,6 (4).

стенок и плавления материала со стороны источника энергии. Отмеченная интенсификация конвективного механизма переноса энергии в верхней части полости, отражающаяся в снижении температуры вблизи источника, представлена на рис. 5*b*, где видно существенное снижение температуры в сечении  $Y = 0,5$  при увеличении безразмерного времени от  $\tau = 734,4$  до  $\tau = 1713,6$ . Симметричное распределение линий тока и изотерм (рис. 4, 5*b*) обусловлено симметрией граничных условий и умеренными значениями определяющих параметров (числа Рэлея и Стефана).

Профили вертикальной компоненты скорости в сечении  $Y = 0,5$  (рис. 6*a*) отражают как размеры зоны расплава, так и превалирование вертикального направления процесса плавления по сравнению с поперечным. Следует также отметить соизмеримость интенсивности нисходящих потоков с восходящим течением, что и является причиной снижения температуры даже в центральной части полости с ростом времени (рис. 5*b*).

Зависимость локального числа Нуссельта ( $Nu = |\partial\Theta/\partial\bar{n}|$ ) вдоль поверхности источника от времени представлена на рис. 6*b*. С ростом  $\tau$  наблюдается увеличение локального безразмерного коэффициента теплообмена. Снижение  $Nu$  на верхней стенке источника по сравнению с боковыми границами обусловлено формированием теплового факела, а соответственно более интенсивным прогревом в этой зоне, что приводит к снижению градиента температуры. Симметричное распределение всех определяемых параметров относительно оси  $X = 0,5$  отражается в совпадении значений средних чисел Нуссельта на вертикальных стенках источника энергии.

Увеличение температурного напора в 2,5 раза приводит к росту числа Рэлея и снижению числа Стефана, что проявляется в существенной модификации распределений изолиний функции тока и температуры (рис. 7). Следует отметить высокую интенсивность процесса плавления по сравнению с меньшим температурным напором, что подтверждается значительным продвижением фронта плавления. На начальном временном этапе при  $\tau \leq 77,4$  (рис. 7*a*) определяющим механизмом переноса энергии также является теплопроводность, при этом сформировавшаяся гидродинамическая структура не отличается от случая, представленного ранее на рис. 4*a*. Увеличение времени приводит к развитию двух температурных факелов вблизи угловых точек источника энергии, что отражается в появлении двух дополнительных рециркуляционных течений непосредственно

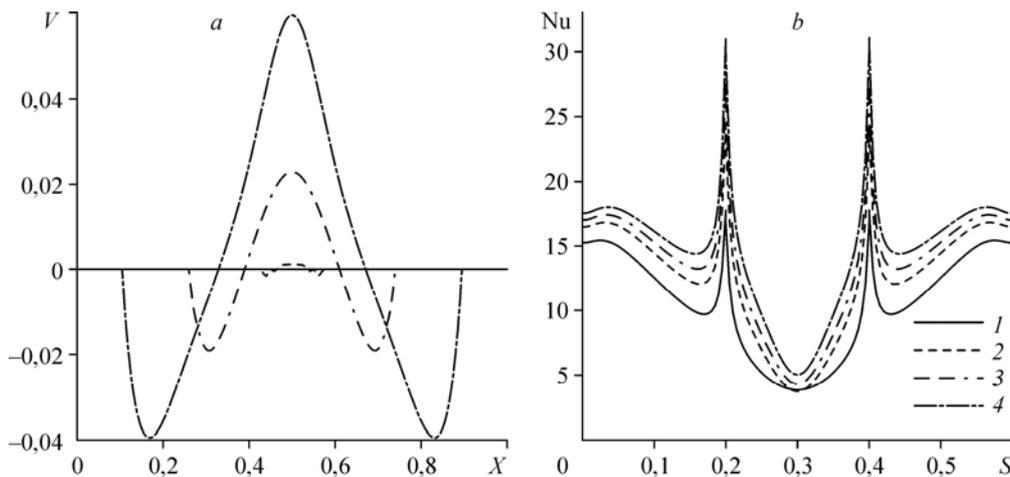
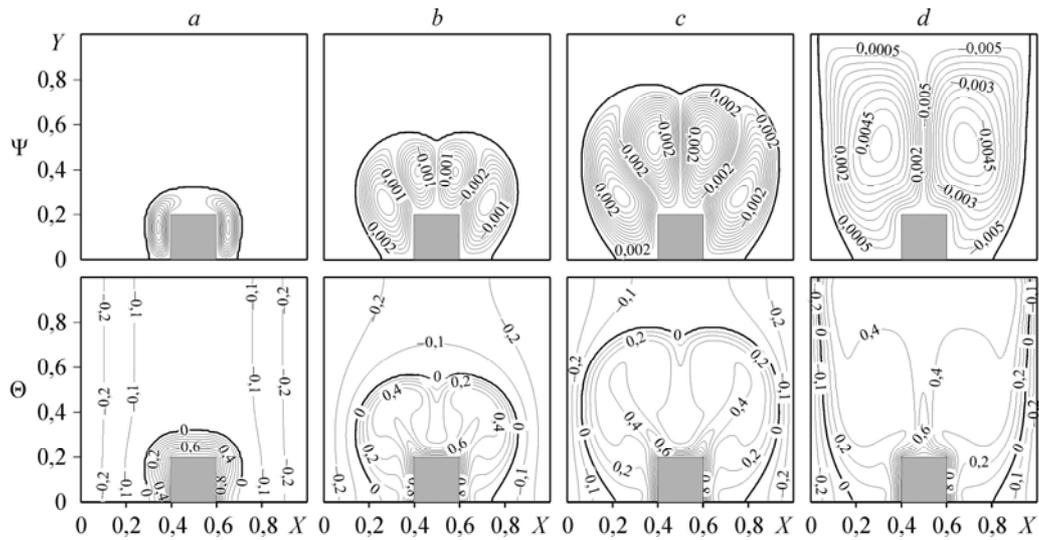


Рис. 6. Профили вертикальной компоненты скорости  $V$  в сечении  $Y = 0,5$  (а) и локального числа Нуссельта вдоль поверхности источника энергии (б) при  $Ra = 4 \cdot 10^5$  и  $Ste = 5,53$  в различные моменты времени.

Обозначения см. на рис. 5.



температуры в диапазоне от 0 до 0,2 также происходит в центральной части полости. При этом наблюдается значительное снижение  $\Theta$  сразу же над источником энергии с ростом времени, что связано с формированием центрального нисходящего потока расплава. Сложная структура полей температуры и скорости подтверждается профилями  $\Theta$  и  $V$  в сечении  $Y = 0,5$  (рис. 8*b* и 9*a*), где изображено положение двух тепловых факелов, объединившихся к моменту  $\tau = 1935$ . Следует также обратить внимание на незначительный поперечный прогрев материала при изменении  $\tau$  от 774 до 1935, что проявляется в существенном уменьшении поперечной скорости плавления материала (рис. 9*a*).

Наиболее значительные изменения локального числа Нуссельта на боковых стенках источника энергии происходят при изменении времени в промежутке от  $\tau = 77,4$  до  $\tau = 387$  (рис. 9*b*). При этом появление двух тепловых факелов и, соответственно, центрального нисходящего течения проявляется в увеличении числа Нуссельта на верхней поверхности нагревателя вследствие роста температурного градиента. Формирование одного центрального температурного факела приводит к снижению локального числа Нуссельта вдоль всей верхней стенки источника энергии.

Увеличение размера полости в 5 раз отражается в росте числа Рэлея при неизменности числа Стефана, что так же, как и при повышении температурного напора, проявляется в существенной модификации структуры течения и поля температуры (рис. 10). В этом случае число Рэлея внутри зоны расплава принимает значение  $5 \cdot 10^7$ , что предполагает формирование высокоинтенсивного конвективного течения. Следует отметить, что рост числа Рэлея не только приводит к изменению структуры течения внутри жидкой фазы, но и, как следствие, отражается на форме межфазовой границы. Течение существенно усложняется, при увеличении температурного напора наблюдается формирование двух тепловых факелов, которые со временем перемещаются к центру верхней стенки источника и сливаются. За счет появления двух тепловых факелов и дополнительных рециркуляционных течений над источником плавление равномерно происходит как в вертикальном направлении, так и в горизонтальном. С ростом зоны расплава температурный факел начинает колебаться и картина течения становится асимметричной. Такое изменение связано с преобладанием выталкивающей силы над внутренними силами трения, что и проявляется в формировании асимметричной картины течения и теплопереноса.

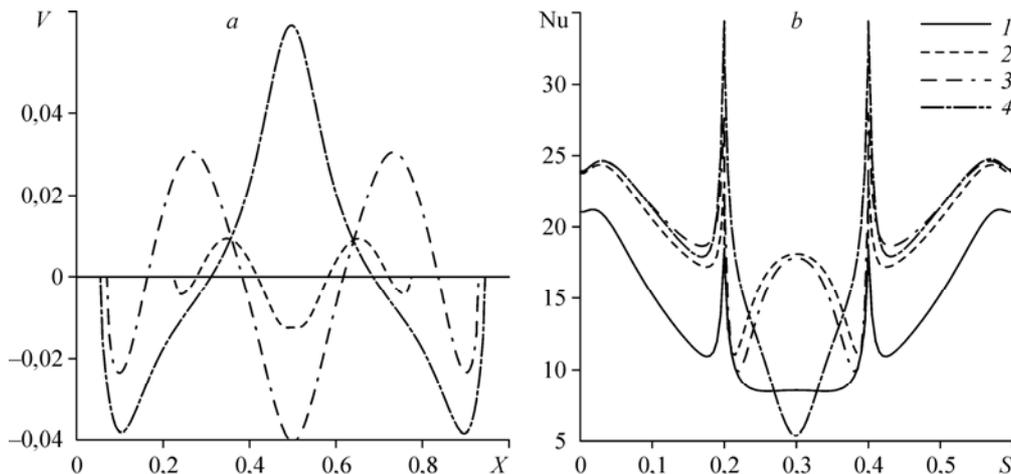


Рис. 9. Профили вертикальной компоненты скорости  $V$  в сечении  $Y = 0,5$  (а) и локального числа Нуссельта вдоль поверхности источника энергии (б) при  $Ra = 10^6$  и  $Ste = 2,21$  в различные моменты времени.

Обозначения см. на рис. 8.

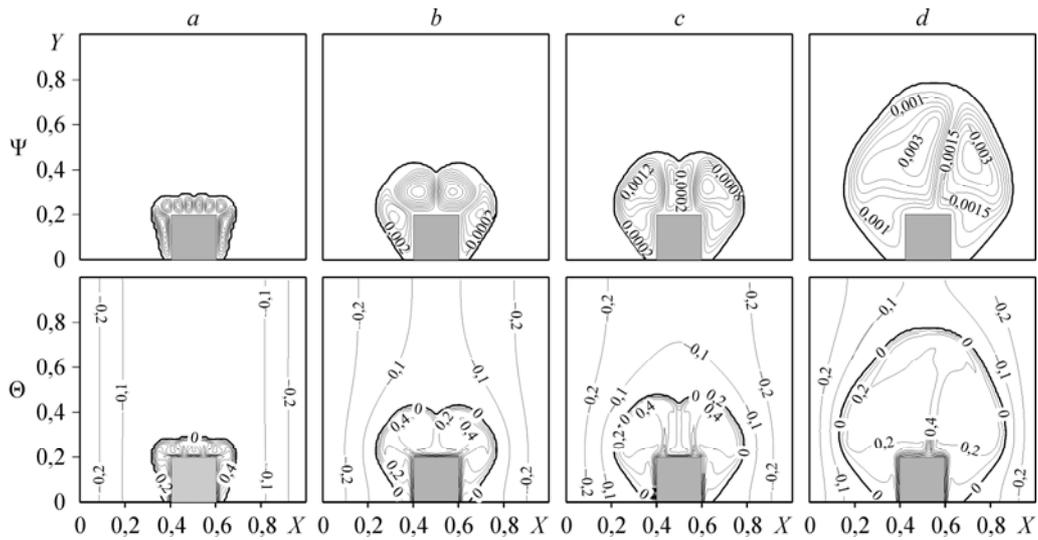


Рис. 10. Линии тока  $\Psi$  и изотермы  $\Theta$  при  $Ra = 5 \cdot 10^7$  и  $Ste = 5,53$ .  
 $\tau = 329,4$  (a), 1098 (b), 1427,4 (c), 3843 (d).

Детализация профилей температуры и скорости в средних сечениях  $X=0,5$  и  $Y=0,5$  анализируемого объекта представлена на рис. 11 и 12a. Наблюдаемые изменения полностью подтверждают описанные выше особенности, обусловленные существенным ростом величины подъемной силы. Появление двух температурных факелов и их эволюция в процессе плавления отражается в неравномерности распределений локального числа Нуссельта (рис. 12b).

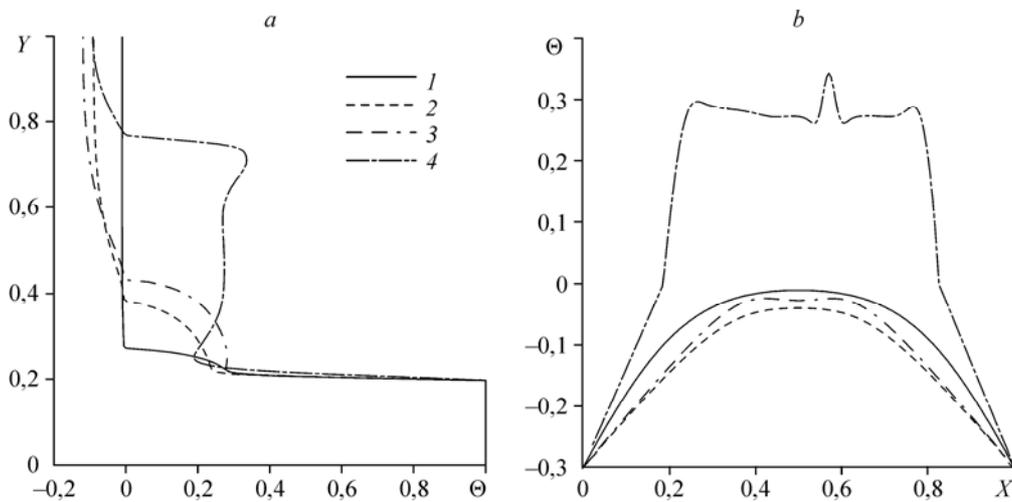


Рис. 11. Профили температуры  $\Theta$  в сечениях  $X=0,5$  (a) и  $Y=0,5$  (b) при  $Ra = 5 \cdot 10^7$  и  $Ste = 5,53$  в различные моменты времени.  
 $\tau = 329,4$  (1), 1098 (2), 1427,4 (3), 3843 (4).

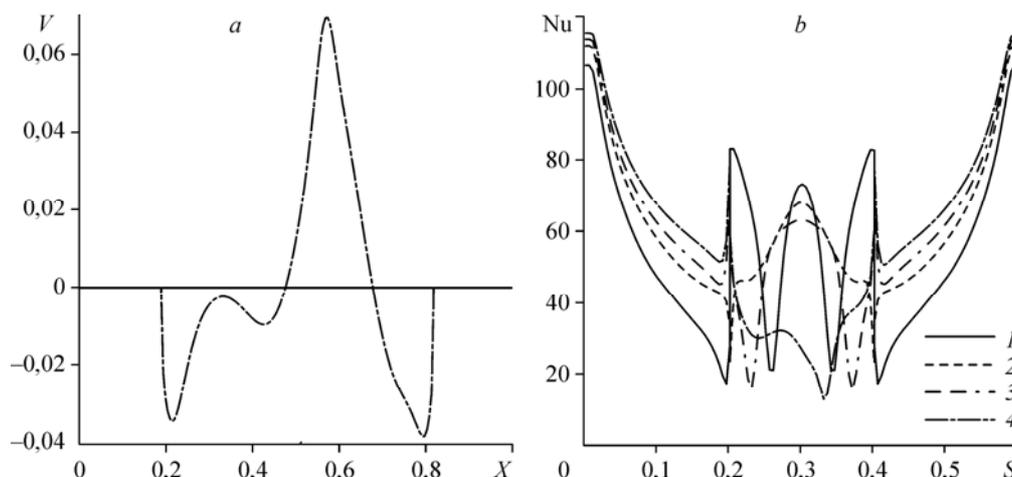


Рис. 12. Профили вертикальной компоненты скорости  $V$  в сечении  $Y = 0,5$  (a) и локального числа Нуссельта вдоль поверхности источника энергии (b) при  $Ra = 5 \cdot 10^7$  и  $Ste = 5,53$  в различные моменты времени.

Обозначения см. на рис. 11.

### Заключение

Численно решена нестационарная задача плавления материала внутри замкнутой квадратной полости с изотермическими вертикальными стенками при наличии локального источника энергии. Представлены распределения изолиний функции тока и температуры, профили температуры и скорости в средних сечениях области решения, а также профили локального числа Нуссельта вдоль поверхности источника энергии, отражающие влияние определяющих комплексов ( $4 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^7$ ,  $2,21 \leq Ste \leq 5,53$ ) на структуру течения и теплоперенос. Установлено, что увеличение числа Рэлея проявляется в существенном усложнении гидродинамики и теплопереноса процесса: наблюдается формирование двух температурных факелов, которые с ростом времени сливаются. Установлена возможность асимметрии в распределениях локальных структур при существенном доминировании выталкивающей силы над внутренними силами трения. Показано, что снижение локального числа Нуссельта на верхней стенке источника энергии обусловлено прогревом зоны расплава над нагревателем и, соответственно, уменьшением температурного градиента. В случае формирования двух температурных факелов между ними появляется центральное нисходящее течение, приводящее к локальному росту числа Нуссельта на верхней стенке тепловыделяющего элемента.

### Список литературы

1. Raoux S., Wutting M. Phase change materials. science and applications. Berlin: Springer, 2009. 446 p.
2. Gau C., Viskanta R. Melting and solidification of pure melting on a vertical wall // ASME J. of Heat Transfer. 1986. Vol. 108. P. 174–181.
3. Gong Z.-X., Mujumdar A.S. Flow and heat transfer in convection-dominated melting in a rectangular cavity heated from below // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1997. Vol. 41. P. 2573–2580.
4. Kousksou T., Mahdaoui M., Ahmed A., Msaad A.A. Melting over a wavy surface in a rectangular cavity heated from below // Energy. 2014. Vol. 64. P. 212–219.
5. Oztop H.F., Abu-Nada E., Varol Y., Chamkha A. Natural convection in wavy enclosures with volumetric heat sources // Int. J. of Thermal Sci. 2011. Vol. 50. P. 502–514.
6. Shyy W., Chen M.-H. Steady-state natural convection with phase change // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 1990. Vol. 33. P. 2545–2563.

7. **Tan F.L., Tso C.P.** Cooling of mobile electronic devices using phase change materials // *Applied Thermal Engng.* 2004. Vol. 24. P. 159–169.
8. **Fok S.C., Shen W., Tan F.L.** Cooling of portable hand-held electronic devices using phase change materials in finned heat sinks // *Int. J. of Thermal Sci.* 2010. Vol. 49. P. 109–117.
9. **Sun X., Zhang Q., Medina M.A., Liao S.** Performance of a free-air cooling system for telecommunications base stations using phase change materials (PCMs): in-situ tests // *Applied Energy.* 2015. Vol. 147. P. 325–334.
10. **Wang Y.-H., Yang Y.-T.** Three-dimensional transient cooling simulations of a portable electronic device using PCM (phase change materials) in multi-fin heat sink // *Energy.* 2011. Vol. 36. P. 5214–5224.
11. **Yang Y.-T., Wang Y.-H.** Numerical simulation of three-dimensional transient cooling application on a portable electronic device using phase change material // *Int. J. of Thermal Sci.* 2012. Vol. 51. P. 155–162.
12. **Мартюшев С.Г., Шеремет М.А.** Численный анализ конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой воздушной полости с локальным источником энергии // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2014. Т. 6, № 3. С. 383–396.
13. **Belhamadia Y., Kane A.S., Fortin A.** An enhanced mathematical model for phase change problems with natural convection // *Int. J. of Numerical Analysis and Modeling, Series B.* 2012. Vol. 2. P. 192–206.
14. **Численные** исследования естественно-конвективных течений затвердевающей жидкости / под науч. ред. докт. Физ.-мат. наук В. Ф. Стрижова // *Тр. ИБРАЭ РАН / под общей ред. чл.-кор. РАН Л.А. Большова.* Вып. 2. М.: Наука, 2007. 190 с.
15. **Bondareva N.S., Sheremet M.A.** Study of melting of a pure gallium under influence of magnetic field in a square cavity with a local heat source // *IOP Conf. Series: Materials Sci. and Engng.* 2015. Vol. 93. P. 012004-1–012004-6.
16. **Бондарева Н.С., Шеремет М.А.** Численное моделирование процесса плавления галлия в замкнутой прямоугольной полости // *Сб. науч. тр. XII Междунар. конф. студентов и молодых ученых “Перспективы развития фундаментальных наук”.* Томск: Изд-во ТПУ, 2015. С. 627–629.
17. **Martyushev S.G., Sheremet M.A.** Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in an air filled cavity with internal heat source // *Int. J. of Thermal Sci.* 2014. Vol. 76. P. 51–67.
18. **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.

*Статья поступила в редакцию 30 октября 2015 г.,  
после доработки — 29 ноября 2015 г.*