

## ХАРАКТЕРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА И СРЕДЫ, ВКЛЮЧАЯ КОЭФФИЦИЕНТ ПОРИСТОСТИ, ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЯДЕРНО-ГЕОФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

**А.И. Хисамутдинов**

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,  
630090, Новосибирск, просп. Академика Котляго, 3, Россия*

Важной и проблемной сейчас компонентой ядерно-геофизических технологий является компьютерная инверсия данных измерений на основе уравнения переноса частиц. В работе развиты подход и итерационные методы для этой инверсии, которые применимы к многим проблемам восстановления параметров пластов, включая их элементный состав, по данным соответствующих видов каротажа. В рамках подхода выделяются «характерные» элементы, взаимодействия, траектории и используются принцип суперпозиции для процессов переноса и линейные априорные ограничения на неизвестные. В сравнении с предыдущими публикациями автора в настоящей фигурирует более широкий тип данных измерений, в том числе отношения показаний детекторов и нормированные измерения. Итерационные методы конкретизированы для задач восстановления коэффициента пористости и плотности по данным соответственно нейтрон-нейтронного и гамма-гамма логов. Для первой из них приводятся результаты численных экспериментов.

*Ядерно-геофизические технологии, уравнение переноса, компьютерная инверсия данных измерений, восстановление параметров, итерационные методы, пористость, плотность и элементный состав.*

## CHARACTERISTIC INTERACTIONS AND EVALUATION OF THE PARAMETERS OF THE TRANSPORT EQUATION AND FORMATION, INCLUDING POROSITY, FROM DATA OF MEASUREMENTS OF SOME NUCLEAR GEOPHYSICAL METHODS

**A.I. Khisamutdinov**

An important but problematic component of nuclear geophysical technologies is computer inversion of measurement data based on the equation of particle transport. In this paper, we propose an approach and iterative methods for this inversion that are applicable to many problems of evaluation formation characteristics, including elemental composition, from data of corresponding logging methods. This approach is based on defining characteristic elements, interactions, and trajectories and using the superposition principle for transport processes, and linear a priori constraints on unknowns are used. In comparison with the previous publications of the author, this paper deals with a broader type of measurement data, including the reading ratio of detectors and normalized measurements. The iterative methods are specified for problems of determining the porosity and density from data of neutron–neutron and gamma–gamma logs, respectively. For the first of them, the results of numerical experiments are presented.

*Nuclear geophysical technologies, transport equation, computer inversion of measurement data, parameter evaluation, iterative methods, porosity, density and elemental composition*

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе речь идет о постановке обратных задач уравнения переноса и численных методах их решения, о восстановлении параметров коэффициентов этого уравнения по данным измерений функционалов от потоков частиц и об определении соответствующих параметров горной породы, используя ядерно-геофизические технологии. Основное внимание уделяется построению метода типа «простая итерация», а именно развитию подхода и метода «последовательные приближения по характерным взаимодействиям», сформулированного автором ранее в работах [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], на новый более общий случай. В этом новом случае допускается рассмотрение составных данных измерений, являющихся, в частности, некоторой функцией или комбинацией первичных. Именно последние сопоставляются линейным функционалам от потоков частиц. Проблема конструирования математической или компьютерной инверсии является актуальной как для многих проблем переноса частиц, так и других разделов науки, и итерационные методы — один из путей ее решения [Турчин и др., 1970; Иванов и др., 1978; Лаврентьев и др., 1980; Тихонов, Арсенин, 1986; Морозов, 1987; Марчук, 1989; Кабанихин, 2009].

Для уравнения переноса в различных областях его приложения изучают разного типа обратные задачи [Турчин и др., 1970; Марчук и др., 1976; Гермогенова, 1985; Антюфеев, Назаралиев, 1988; Марчук, 1989; McCormick, 1992]. Методы «последовательные приближения по характерным взаимодействиям» (ППХВ) развивались в связи с ядерно-геофизическими технологиями: нейтрон-активационным каротажем, рентгенофлуоресцентным анализом, импульсным нейтрон-гамма каротажем [Хисамутдинов, Бланков, 1989; Хисамутдинов, Минбаев, 1995; Khisamutdinov, 1999; Хисамутдинов, Федорин, 2003; Khisamutdinov, Phedorin, 2009]. Для ядерно-геофизических применений типичны высокая размерность, зависимость сечений взаимодействий от энергий, многоэлементный состав сред. Все это создает трудности для анализа и решения не только обратных, но и прямых задач.

При геофизическом исследовании скважин, как правило, восстанавливают параметры горной породы и ее флюидов, параметры скважинных флюидов и некоторые другие [Филиппов, 1973; Резванов, 1982; Хисамутдинов и др., 1985]. Аналогично, речь идет о восстановлении параметров горной породы и при различных лабораторных ядерно-геофизических методах или исследовании поверхностных слоев других планет. В условиях, когда сложна строгая математическая интерпретация, существуют и получают развитие приближенные подходы к проблеме интерпретации данных. Исторически одним из первых являлся подход на основе приближенного рассмотрения процессов переноса уравнениями диффузионного типа. Длина замедления, диффузионная длина, время жизни — вот характерные интегральные параметры горных пород, подлежащие восстановлению. Конечно, эти параметры являлись промежуточными на пути к истинным петрофизическим, к содержаниям элементов, минералов, оксидов и т.д. Иногда для инверсии используют синтетический подход, в котором объединяют какие-либо приближения к процессу переноса и зависимости показаний от параметров, полученные как экспериментально, так и посредством вычислений методами Монте-Карло [Gilchrist et al., 1999; Mickael et al., 1999]. Иного типа приближенный подход к инверсии, имеющий непосредственное отношение к импульсному нейтрон-гамма каротажу, развивался во многих работах, включая публикации [Hertzog, 1980; Grau, Schweitzer, 1989]. В этом подходе энергетический спектр  $\gamma$ -квантов приближается линейной комбинацией стандартных многоэлементных спектров, полученных лабораторными измерениями. Коэффициенты линейной комбинации (yields) подлежат определению. Они являются величинами, аналогичными коэффициентам регрессии в линейных моделях математической статистики, в задачах множественной линейной регрессии [Де Гроот, 1974]. Они являются промежуточными параметрами; поэтому далее отношения различных коэффициентов линейной комбинации связываются с отношениями соответствующих концентраций элементов-стандартов. Функциональная зависимость между отношениями концентраций и коэффициентов (yields) получается эмпирически на основе лабораторных измерений. Достоинство подхода — возможность приближенно оценивать состав горной породы в реальном времени движения каротажного прибора. В отличие от вышеизложенного в нашем подходе мы основываемся на точном уравнении переноса. Более того, поскольку в известном смысле оно вторично по отношению к определенному типу марковским скачкообразным процессам и цепям Маркова, то используем также этот факт. Проблема нахождения параметров коэффициентов уравнения переноса эквивалентна задаче об определении этих же параметров, входящих в те или иные распределения указанных марковских процесса или цепи. Возможна трактовка рассматриваемого здесь как задач восстановления параметров соответствующих марковских процесса или цепи по некоторым заданным измерениям, включая измерения тех или иных математических ожиданий, т.е. мы можем трактовать изучаемое как некоторые проблемы математической статистики. И мы используем эту эквивалентность, а именно, прежде всего, свойство аддитивности, производя необходимые разбиения в пространстве траекторий частиц, выделяя подмножества характерных траекторий и представляя математические ожидания как сумму соответствующих слагаемых.

Важным частным случаем рассматриваемой проблемы является задача о построении численного метода для восстановления коэффициента пористости  $k_p$  горной породы по данным измерений компенсационного нейтрон-нейтронного каротажа,  $0 < k_p < 1$ . Мы ориентируемся на штатный случай: прибор размещается в скважине, пересекающей пласт, содержит источник и два детектора, ближний и дальний, которые регистрируют нейтроны в области тепловых энергий. Хорошо известно, что при определенных условиях отношение  $d$  показаний ближнего и дальнего детекторов является непрерывной монотонно возрастающей функцией  $k_p$ . И именно это свойство используют, определяя значение  $k_p$  посредством заранее заготовленных палеток и процедуры поправок [Аллен и др., 1970; Алексеев и др., 1978]. В настоящей работе построен итерационный метод, адаптируя который к данной конкретной задаче, восстанавливаем величину  $k_p$ , исходя из заданного значения отношения  $d$ . Разумеется, мы идеализируем реальную ситуацию, считая, что за исключением  $k_p$  все параметры пласта известны. Эта задача лишь часть более полной, в которой следует восстанавливать совокупность параметров по данным измерений соответствующего комплекса методов. В качестве поясняющего примера укажем работу [Khisamutdinov, 1999], в ней комплексировались нейтрон-нейтронный и нейтрон-активационный каротажи.

В предшествующих работах [Хисамутдинов, 2009; и др.] метод ППХВ был построен и применялся для случаев, когда данные измерений сопоставлялись линейным функционалам. В настоящей — данные измерений, как уже говорилось, рассматриваются в общем случае как составные и, в частности, сопоставляются соответствующим функциям от линейных функционалов фазового потока. Мы разовьем подход и метод, выделяя, как и ранее, во-первых, характерные взаимодействия, множества траекторий и, во-вторых, используя свойство линейности процессов переноса и свойство аддитивности математических ожиданий по пространству траекторий частиц и вводя матрицу характерных взаимодействий. В численных экспериментах, представленных в данной работе, фигурирует достаточно реалистичная задача. Отметим, что на каждом итерационном шаге с помощью методов Монте-Карло решаются сопутствующие прямые задачи.

Предложенный подход может быть применен ко многим проблемам [Хисамутдинов, 2009, с. 28], в частности, используя модификацию к еще одной известной — «о восстановлении плотности пласта по данным измерений гамма-гамма каротажа».

## ОБОЗНАЧЕНИЯ, МОДЕЛЬ СРЕДЫ И СЕЧЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

### Терминология, уравнения переноса

Пусть [Кейз, Цвайфель, 1972; Хисамутдинов и др., 1985]  $(X) = R^3 \otimes (S_1) \otimes [0, \infty)$  — фазовое пространство координат, направлений и энергий, где  $(S_1)$  — сфера радиуса 1, и  $x \equiv (r, \Omega, E) \in X$ . Как  $v = v(E)$  обозначаем скорости частиц,  $v = |v|\Omega$ . Всюду далее, где возможно, сохраняем обозначения из работ [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], а также группируем изучаемые задачи в форме проблем 1 и 2 или задач 1 и 2.

Обозначим:

$(V_G)$  — пространственная область, в которой рассматривается перенос частиц,  $(V_G) \subset R^3$ ; в случае, в котором  $(V_G)$  не совпадает со всем пространством и является лишь его частью, мы предполагаем, что эта область выпуклая и что ее граница  $(\partial V_G)$  является кусочно-гладкой, такой, что нормаль к ней существует почти всюду;

$$(G) = (V_G) \otimes (S_1) \otimes [0, \infty), (G) \subset (X);$$

$(V)$  — подобласть в  $(V_G)$ , вещественный состав которой подлежит определению;  $(V) \subset (V_G)$ ;

$q_{in}(t, x), q_0(t, x)$  — плотности заданных источников частиц соответственно в проблемах 1 и 2; предполагается, что по пространственной переменной  $r$  эти плотности отличны от 0 лишь в некоторых ограниченных подобластях в  $(V_G)$ ;

$\varphi_{in}(t, x)$  и  $\varphi(t, x)$  — фазовые плотности частиц соответственно начального и конечного типов в задаче 1; в задаче 2  $\varphi(t, x)$  есть фазовая плотность частиц;  $\Phi_{in}(t, x) \equiv |v|\varphi_{in}(t, x)$ ,  $\Phi(t, x) \equiv |v|\varphi(t, x)$  — плотности (скалярных) потоков частиц;

$\Sigma_{in}^+(x)$  и  $\Sigma(x)$ ,  $\hat{S}_{in}^+$  и  $\hat{S}^+$  — полные макроскопические сечения взаимодействий и линейные интегральные операторы рассеяния соответственно для частиц начального и конечного (основного) типов в проблеме 1; в проблеме 2  $\Sigma(x)$  и  $\hat{S}^+$  есть соответственно полное макроскопическое сечение взаимодействия и линейный интегральный оператор рассеяния;

$\hat{Q}^+$  — линейный интегральный оператор в проблеме 1, описывающий появление (рождение) частиц основного типа в результате взаимодействия частиц начального типа со средой,  $q(t, x) \equiv [\hat{Q}^+ \Phi_{in}^+](t, x)$  — плотности источников частиц основного типа в проблеме 1;

$I_i \equiv \iint |v|\varphi(t, x) \cdot \mathbf{E}_i(t, x) dt dx, i = 1, \dots, N_M$  — заданные линейные функционалы от  $\Phi(\cdot) = |v|\varphi(\cdot)$ ,  $N_M < \infty$ ;  $\mathbf{E}_i(\cdot, \cdot)$  — весовые функции, характеризующие прибор.

Сразу условимся, что если область интегрирования не указывается, то уже было сказано выше, то она совпадает со всей областью интегрирования. Для операторов  $\hat{S}_{in}^+, \hat{S}^+$  и  $\hat{Q}^+$  пространственная переменная  $r \in R^3$  является параметром; через  $\hat{S}_{in}^+, \hat{S}^+$  и  $\hat{Q}^+$  обозначим интегральные операторы, сопряженные соответственно к  $\hat{S}_{in}^+, \hat{S}^+$  и  $\hat{Q}^+$ . Каждая пара операторов задается соответствующим ядром, а именно посредством макроскопических дифференциальных сечений взаимодействий:  $S_{in}^+(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | r)$ ,  $S(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | r)$  и посредством функции  $Q(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | r)$ . Считаем, что все три ядра являются обобщенными плотностями по второй паре переменных  $(\Omega', E')$  и измеримыми функциями по первой паре  $(\Omega, E)$ . Мы рассматриваем случай неразмножающих сред в  $(G)$  и считаем, что  $\int q_{in}(t, x) dx dt = 1$ ,  $\int q_0(t, x) dx dt = 1, \forall x \in (G) \quad 0 \leq \Sigma_{in}^+(x) < C_{\Sigma^+}, \quad 0 \leq \Sigma(x) < C_{\Sigma}, \quad C_{\Sigma^+} < \infty$ , а также  $[\hat{Q}^+ \cdot 1](x) < C_{\hat{Q}^+} < \infty$ . Заметим, что макроскопические интегральные сечения рассеяний  $[\hat{S}_{in}^+ \cdot 1](x)$  и  $[\hat{S}^+ \cdot 1](x)$  являются слагаемыми полных сечений  $\Sigma_{in}^+(x)$  и  $\Sigma(x)$  соответственно. В проблеме 1 при рождении частицы конечного типа частица-

родитель либо поглощается, либо выживает (рассеивается), изменяя энергию и направление. Макроскопические сечения этих взаимодействий являются частями (слагаемыми) сечений  $\Sigma_{in}(\cdot)$  и  $[\hat{S}_{in} \cdot 1](\cdot)$  соответственно. Например, рождение  $\gamma$ -кванта возможно как при неупругом рассеянии нейтрона, так и при радиационном захвате (поглощении) последнего.

В обеих проблемах перенос частиц рассматривается в области  $(G)$  в интервале времен  $[0, +\infty)$ ;  $(t, x) \in [0, +\infty) \otimes (G)$ . В задаче 1 система уравнений переноса в интегродифференциальной форме есть

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} + (v, \nabla \Phi_{in}) + \Sigma_{in} \Phi_{in} = \hat{S}_{in}^+ \Phi_{in} + q_{in}, & \Phi_{in} \equiv |v| \varphi_{in}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v, \nabla \Phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^+ \Phi + \hat{Q}^+ \Phi_{in}, & \Phi \equiv |v| \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Интегродифференциальное уравнение для задачи 2 есть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (v, \nabla \Phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^+ \Phi + q_0, \quad \Phi \equiv |v| \varphi. \quad (2)$$

В обеих проблемах считаются заданными начальные условия. Причем в задаче 1 считаем начальную фазовую плотность  $\varphi(t, x)|_{t=0}$  тождественно равной нулю. Если  $(G)$  не совпадает с  $(X)$ , то в обеих задачах, т. е. для (1) и (2) на границе  $(\partial V_G)$  считаются поставленными стандартные нулевые граничные условия (отсутствия потока частиц извне). В случае неограниченной среды рассматриваются решения уравнений переноса, стремящиеся к 0 при  $|r| \rightarrow \infty$ . В проблемах 1 и 2 мы рассматриваем обобщенные решения соответствующих задач системы (1) и уравнения (2), которые даются интегральной формой для системы (1) и уравнения (2). В случае, если  $(V_G)$  не совпадает с  $R^3$ , с целью учета граничных условий для интегральной формы уравнений считается, что пространственная среда вне  $(V_G)$  заполнена абсолютно поглощающим веществом, макроскопическое сечение которого также не превышает постоянной  $C_\Sigma$ . Наконец, предполагается, что вероятность события не менее чем  $j_0$  последовательных рассеяний частицы является величиной, строго отделенной от 1 п.н. (почти наверное); здесь  $j_0$  есть некоторое заданное натуральное число. Говоря «частица», имеем в виду таковые как в проблеме 2, так и любую из двух типов в проблеме 1. При данных предположениях поставленные задачи для (1) и (2) разрешимы единственным образом, и соответствующие решения могут быть записаны в форме ряда Неймана. Мы рассматриваем все фазовые плотности, принадлежащие множеству обобщенных плотностей конечных мер. Интегральные уравнения, о которых говорилось выше, записаны в тех же обозначениях, что и в работах [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], поэтому здесь мы их не приводим.

Все весовые функции  $E$  в настоящей работе считаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями и такими, что все линейные функционалы  $I$  существуют и однозначно определены. Предполагаем, что носители плотностей  $q_{in}$  в проблеме 1 и  $q_0$  в проблеме 2 не пересекаются с носителями функций  $E$ . Наряду с функционалами  $I$ , которые являются также соответствующими средними по траекториям частиц, считаем заданной некоторую последовательность  $\{z_i\}_{i=1}^{N_M}$  непрерывных функций от искомых параметров. Предполагаем, что  $\forall i$  модули этих функций являются отделенными от 0 и ограниченными сверху. Например, в качестве  $z$  могут фигурировать линейные функционалы от  $\Phi$  и какие-либо математические ожидания по траекториям частиц.

В настоящей работе мы интересуемся определением коэффициентов системы (1) и уравнения (2), а именно, сечений взаимодействий для  $x$  таких, что  $r \in (V)$ . Более точно, нам необходимо найти некоторую совокупность  $N$  параметров, которая определяет эти коэффициенты для  $r \in (V)$  по заданной совокупности  $\{d_i\}_{i=1}^{N_M}$   $N_M$  измерений, или наблюдений, значений последовательности  $\{J_1, \dots, J_{N_M}\}$  непрерывных функций от искомых параметров, где  $J_i = I_i/z_i$ ,  $i = \overline{1, N_M}$ ,  $N \leq N_M$ . Детально эти  $N$  параметров будут определены в следующем разделе. Обозначим  $(G_V) \equiv (V) \otimes (S_1) \otimes [0, +\infty)$ ,  $d$  и  $J$  — столбцы данных измерений и теоретических выражений (записей) для этих измерений как функций от параметров;  $d \equiv (d_1, \dots, d_{N_M})^T$ ,  $J \equiv (J_1, \dots, J_{N_M})^T$ . Обозначим также  $I \equiv (I_1, \dots, I_{N_M})^T$ ,  $z \equiv (z_1, \dots, z_{N_M})^T$ .

### Модель вещественного состава области $(V)$

С физической точки зрения мы интересуемся вещественным составом области  $(V)$ . Считается, что эта область составлена из некоторого конечного числа непересекающихся подобластей  $(V_i)$ ,  $i = 1, \dots, n_d$ ,  $n_d \geq 1$ . Рассмотрим сначала случай  $n_d = 1$ .

В случае  $n_d = 1$  предполагается, что  $(V)$  есть однородная среда и состоит из набора  $K$  компонент с объемными долями  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . В качестве компонент могут рассматриваться как минералы с

заданными химическими составами, так и отдельные химические элементы. Обозначим как  $\alpha$  столбец высоты  $K$ , элементами которого являются объемные доли  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)^T$ . Пусть

$$\Lambda \alpha = \lambda \quad (3)$$

где  $\Lambda$  —  $(K - N) \times K$  матрица, а  $\lambda$  — столбец высоты  $K - N$ , есть заданная система  $K - N$  линейных уравнений связи на компоненты  $\alpha$ ;  $K - N \geq 1$ . Пусть далее

$$\Lambda_{neq} \alpha < \lambda_{neq} \quad (4)$$

есть заданная система конечного числа  $K_{neq}$  линейных неравенств на компоненты  $\alpha$ , где  $\Lambda_{neq}$  и  $\lambda_{neq}$  — некоторые  $K_{neq} \times K$  матрица и столбец высоты  $K_{neq}$  соответственно. Считаем, что столбцы  $\alpha$  принадлежат области  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} \equiv \{\alpha : \alpha \in R^K, \Lambda_{neq} \alpha < \lambda_{neq}, \Lambda \alpha = \lambda\}, \mathbf{A} \subset R^K. \quad (5)$$

Как первое в системе (3) всегда фигурирует уравнение

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1. \quad (6)$$

В системе неравенств (4) в качестве первых всегда рассматриваем  $K$  неравенств

$$-\alpha_i < 0, \quad i = \overline{1, K}; \quad K \leq K_{neq}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что вследствие (6), (7)

$$\forall k \in \overline{1, K} : 0 < \alpha_k < 1.$$

Далее делаем вывод, что  $\mathbf{A}$  есть выпуклая ограниченная область,  $\mathbf{A} \subset (0, 1)^K \subset R^K$ .

Пусть  $\rho_j$ ,  $j = \overline{1, N_e}$  — числовые плотности (или объемные концентрации в  $1/m^3$ ) всех химических элементов, содержащихся в  $(V)$ . Величины  $\rho$  полностью определяются значениями столбца  $\alpha$ , являясь соответствующими линейными комбинациями его компонент  $\alpha_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Список химических элементов  $[1, \dots, N_e]$  мы разбиваем на два подсписка:  $[1, \dots, N]$  и  $[(N + 1), \dots, N_e]$ . В проблеме 1 подсписк 1 составляют все те элементы, на которых происходят взаимодействия, в процессе чего генерируются частицы конечного (второго) типа. В проблеме 2 подсписк 1 составляют элементы, на которых имеют место рассеяния заданного выделенного типа. В проблеме 2 допускаем, что один и тот же химический элемент, входя в две различные группы компонентов, может быть представлен своими соответствующими плотностями в обоих подсписках. Например, содержания атомов водорода во флюиде и в минеральном скелете формации (горной породы). В обеих проблемах о выделенных здесь взаимодействиях будет говориться как о характерных или главных (взаимодействиях). Будем обозначать как  $\rho$  столбец  $(\rho_1, \dots, \rho_N)^T$ , т. е. столбец из числовых плотностей элементов первой группы. Имеем, что  $\rho = Y \alpha$ , где  $Y$  — заданная  $N \times K$  матрица,  $\alpha \in \mathbf{A}$ .

Пусть  $U \equiv \{\rho : \rho = Y \alpha, \alpha \in \mathbf{A}\}$ . Введем отображение

$$Y_M : \mathbf{A} \rightarrow U, \quad \rho = Y_M(\alpha) = Y \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbf{A}; \quad U = Y_M(\mathbf{A}). \quad (8)$$

Предполагаем, что  $Y_M$  осуществляет взаимно-однозначное отображение  $\mathbf{A}$  на  $U$ . Считается, что все элементы  $Y_{ij}$  матрицы  $Y$  являются неотрицательными и что  $\forall i \in \overline{1, N} \quad \sum_{j=1}^K Y_{ij} > 0$ . Тем самым, поскольку  $\forall j \quad 0 < \alpha_j < 1$ , то  $\forall i \in \overline{1, N} \quad \rho_i = \sum_{j=1}^K Y_{ij} \alpha_j > 0$  и  $\rho_i < \sum_{j=1}^K Y_{ij}$ . Обозначим  $\Pi_U = \{\rho : \forall i \in \overline{1, N} \quad 0 < \rho_i < \sum_{j=1}^K Y_{ij}\}$ . Имеем, что  $U \subset \Pi_U \subset R^N$ . Множества  $U$  и  $\Pi_U$ , как и  $\mathbf{A}$ , являются выпуклыми ограниченными областями.

Будем обозначать как  $Y_M^{-1}$  отображение, обратное к  $Y_M$ ,

$$Y_M^{-1} : U \rightarrow \mathbf{A}, \quad \alpha = Y_M^{-1}(\rho).$$

Это обратное может быть записано в явной форме как

$$Y_M^{-1} : U \rightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \{\alpha : Y \alpha = \rho, \Lambda \alpha = \lambda, \rho \in U\}.$$

Составим  $K \times K$  матрицу  $B$ , в первых  $N$  строках которой располагаем матрицу  $Y$ , а в последних  $K - N$  строках — матрицу  $\Lambda$ . Составим также столбец  $(\rho; \lambda)$  высоты  $K$  такой, что

$$(\rho; \lambda)^T \equiv (\rho_1, \dots, \rho_N; \lambda_1, \dots, \lambda_{K-N}).$$

Отображение  $\Upsilon_M^{-1}$  как раз связано с решением системы линейных алгебраических уравнений

$$B\alpha = (\rho; \lambda), \quad \rho \in U; \quad (9)$$

в силу взаимно-однозначного соответствия между  $\mathbf{A}$  и  $U$

$$|B| \equiv \det \|B\| \neq 0. \quad (10)$$

Обратимся теперь к случаю  $n_d > 1$ . Он рассмотрен в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]; поэтому отсылая к ним и не детализируя, дадим здесь лишь моменты, необходимые для продолжения и понимания настоящей работы. В каждой подобласти  $(V_i) \subset (V)$  определяются все те величины, столбцы, матрицы, системы уравнений ограничений и области, что и в случае  $n_d = 1$ , снабжая их индексом  $i$  либо нижним, либо (для столбцов) верхним. Далее вводятся скаляры, области, столбцы и матрицы — все относящиеся к объединению  $(V)$ . Слагаемыми, компонентами и блоками этих объектов являются соответствующие объекты в каждой подобласти  $(V_i) \subset (V)$ ,  $i = \overline{1, n_d}$ . В принятых конструкциях, как и ранее для случая  $n_d = 1$ , считается, что соотношения (8) порождают взаимно-однозначные отображения  $\Upsilon_M : \mathbf{A} \rightarrow U$  и  $\Upsilon_M^{-1} : U \rightarrow \mathbf{A}$ , которые полностью согласуются со всеми соответствующими отображениями  $\Upsilon_{M_i}$  и  $\Upsilon_{M_i}^{-1}$ ,  $i = \overline{1, n_d}$ . Как и ранее, области  $\mathbf{A}$ ,  $U$  и  $\Pi_U$  являются выпуклыми ограниченными, область  $U$  содержит столбцы с положительными компонентами, а любой столбец  $\rho$  представляет элементы, на которых происходят характерные взаимодействия. Наконец, как  $B$  обозначаем матрицу, составленную из  $\Upsilon$  и  $\Lambda$ ; как и ранее для случая  $n_d = 1$ , для  $B$  справедливы (9) и (10).

### Структура коэффициентов уравнения переноса в области $(V)$

Конкретный вид коэффициентов уравнений переноса в (1) и (2), связанных с областью  $(V)$ , дан в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]. Ограничимся здесь лишь записью величин, относящихся к характерным взаимодействиям в случае  $n_d = 1$ . В проблеме 1 для  $x \in (G_V)$  считается, что

$$\widehat{Q}^+ = \widehat{Q}_0^+ + \widehat{Q}_b^+,$$

где  $\widehat{Q}_0^+$  есть некоторый заданный, известный и независимый от  $\rho$  или  $\alpha$  оператор; оператор  $\widehat{Q}_b^+$  считается тождественно равным нулю вне  $(V)$ , т. е. для  $x \notin (G_V)$ , и

$$\widehat{Q}_b^+ = \sum_{j=1}^N \rho_j \widehat{q}_j^+ \quad \forall x \in (G_V),$$

где  $\widehat{q}_j^+$ ,  $j = \overline{1, N}$ , — парциальные операторы, описывающие рождение частиц основного типа на 1 атом элемента  $j$ . Полагаем, что все  $\widehat{q}_j^+$ ,  $j = \overline{1, N}$ , являются тождественно-нулевыми операторами вне  $(V)$ .

В проблеме 2 считается, что в  $(V)$

$$\widehat{S}^+ = \widehat{S}_0^+ + \widehat{S}_b^+,$$

где  $\widehat{S}_b^+$  есть тождественно-нулевой оператор  $\forall x \notin (G_V)$ , т. е. вне  $(V)$ , и

$$\widehat{S}_b^+ = \sum_{j=1}^N \rho_j \widehat{b}_j^+ \quad \forall x \in (G_V),$$

где парциальные операторы  $\widehat{b}_j^+$ ,  $j = \overline{1, N}$ , описывают рассеяния выделенного характерного типа на 1 атом элемента  $j$ . В  $(V)$  оператор  $\widehat{S}_0^+$  отвечает всем остальным типам рассеяния.

Главная особенность в случае  $n_d > 1$  в том, что числовые плотности  $\rho$  становятся ступенчатыми функциями на  $(V)$ . Все парциальные сечения, фигурирующие выше, рассматриваются как ограниченные в соответствии со свойством ограниченности полных сечений. Отметим, что взаимодействия, описываемые операторами  $\widehat{Q}_b^+$  и  $\widehat{S}_b^+$ , играют в рассматриваемых проблемах особую роль. Мы говорим об этих взаимодействиях как о характерных. Можно трактовать, что остальные взаимодействия являются лишь сопутствующими и мешающими для определения рассматриваемых параметров. Далее, развивая терминологию, мы введем подмножества характерных траекторий и матрицу характерных взаимодействий.

## ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

### Предварительные замечания

В соответствии со свойствами сечений взаимодействий, источников и граничных условий решения прямых задач обеих рассматриваемых проблем существуют и единственны  $\forall \alpha \in \mathbf{A}$  и представляют-ся в форме сходящегося ряда Неймана [Хисамутдинов и др., 1985].

Столбцы  $z$ ,  $I$  и  $J$  являются столбцами-функциями от  $\alpha \in \mathbf{A}$ ; для последнего из них запишем

$$J: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{J}, \mathbf{J} \subset R^{N_M}, \quad (11)$$

где через  $\mathbf{J}$  обозначено множество значений столбца функций  $J$ . В некотором смысле исходную систему уравнений измерений для обеих изучаемых проблем восстановления параметров запишем в виде

$$J(\alpha) - d = 0 \text{ относительно неизвестных } \alpha \text{ (и } \rho). \quad (12)$$

Считаем, что отображение (11) является непрерывным и ограниченным. Композиция  $J \circ \Upsilon_M^{-1}$ , или сложная функция  $J(\Upsilon_M^{-1}(\cdot))$  от  $\rho \in U$ , отображает  $U$  на  $\mathbf{J}$ ,

$$J \circ \Upsilon_M^{-1}: U \rightarrow \mathbf{J} \quad (13)$$

Это последнее также является, как нетрудно видеть, непрерывным и ограниченным. Мы сформулируем далее обратные задачи для обеих наших проблем как задачи решения систем, следующих из (12), считая при этом, что

- (i) неизвестные  $\alpha$  принадлежат некоторой подобласти  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}$ ;  $\rho \in U_1$ ,  $U_1 = \Upsilon_M(\mathbf{A}_1)$ ;
- (ii) сужения отображений (11) на  $\mathbf{A}_1$  и (13) на  $U_1$  являются гомеоморфизмами;
- (iii)  $d \in J(\mathbf{A}_1) = J \circ \Upsilon_M^{-1}(U_1)$ .

В силу трех вышеданных предположений решения обеих обратных проблем существуют и единственны. Основной целью данной работы является построение численного метода для решения обратных задач в рамках поставленных двух проблем.

Введем квадратную диагональную матрицу-функцию  $Z$  порядка  $N_M$  с диагональными элементами  $Z_{ii} = z_i$ ,  $i = \overline{1, N_M}$ . Матрица  $Z$  является невырожденной на  $\mathbf{A}$ , пусть  $Z^{-1}$  — обратная к ней матрица-функция, определенная на  $\mathbf{A}$ . Как нетрудно видеть,  $J = Z^{-1}I$ . Поэтому система на  $\mathbf{A}$  записывается также в формах

$$Z^{-1}I - d = 0, \quad I - Zd = 0.$$

Методы ППХВ основываются на свойствах [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]

$$I_i = I_i^{(0)} + \sum_{j=1}^N I_{ij}, \quad i = \overline{1, N_M}, \quad (14)$$

$$I_{ij} / \rho_j = O(1) \text{ при } \rho_j \rightarrow 0, \quad i = \overline{1, N_M}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где слагаемые  $I_{ij}$  описывают вклады в функционалы  $I_i$  от  $j$ -го характерного взаимодействия; и в них фигурируют матрица характерных взаимодействий  $A$  и столбец  $I^{(0)} \equiv (I_1^{(0)}, \dots, I_{N_M}^{(0)})^T$  такие, что

$$A\rho_i \equiv \sum_{j=1}^N I_{ij}, \quad i = \overline{1, N_M}, \quad I = I^{(0)} + A\rho. \quad (16)$$

Разложение (14) является следствием разбиения пространства траекторий на подмножества характерных траекторий и остаточное подмножество. Свойство (15) вытекает из свойств случайного процесса переноса частиц и факта, что на каждой траектории  $j$ -го подмножества характерных траекторий содержится хотя бы одно  $j$ -е характерное взаимодействие,  $j = \overline{1, N}$ . Обозначив  $c_z \equiv Zd - I^{(0)}$ , перепишем (12) в виде

$$A\rho - c_z = 0 \text{ относительно неизвестных } \alpha \text{ и } \rho, \quad (17)$$

формально идентичном ранее рассмотренному в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]. Этот случай получается, если полагать  $Z$  равной единичной матрице  $E$ , т.е.  $c_{z|Z=E} \equiv c_E = c$ .

### Формулировка обратных задач

Теперь, исходя из (17), сформулируем, как и в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], обратные задачи для обеих проблем как задачи решения какой-либо из трех систем:

$$A(\alpha)\rho - c_z(\alpha) = 0, \quad (18)$$

$$\rho - \Upsilon\alpha = 0, \quad (\alpha, \rho) \in \mathbf{A}_1 \otimes U_1,$$

$$A(\alpha)\Upsilon\alpha - c_z(\alpha) = 0, \alpha \in \mathbf{A}_1, \quad (19)$$

$$A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)\rho - c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) = 0, \rho \in U_1, \quad (20)$$

при наличии, во-первых, ограничений в соответствии со списком (i)—(iii) предыдущего раздела и, во-вторых, нижеследующего условия на ранг матрицы  $A$ , а именно

$$RgA(\alpha) = N \quad \forall \alpha \in \mathbf{A}_1. \quad (21)$$

Будем говорить об этих системах как о системах уравнений для восстановления параметров, обозначая кратко SEPE (System of Equations for Parameters Evaluation). В применении к системе (20), как нетрудно видеть, (21) трансформируется в условие

$$RgA \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) = N \quad \forall \rho \in U_1. \quad (22)$$

Напомним, что

$$A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) \equiv A(\Upsilon_M^{-1}(\rho)), \quad c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho) \equiv c_z(\Upsilon_M^{-1}(\rho)).$$

Как и в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], мы ограничимся изучением методов решения систем (18) и (20). Сформулируем также эти задачи в хорошо известной вариационной форме, имея в виду построение итерационных процессов. Пусть  $W$  есть квадратная диагональная матрица порядка  $N_M$  с положительными диагональными элементами,  $W_{ii} > 0, i = 1, N_M$ ; пусть далее, как обычно,  $(\cdot, \cdot)$  — символ скалярного произведения. Постановки в названной форме записываем как

$$\inf((A\rho - c_z)^T, W(A\rho - c_z)), (\alpha, \rho) \in \mathbf{A}_1 \otimes U_1 \quad (23)$$

при условии  $\rho = \Upsilon\alpha$ ,

$$\inf((A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)\rho - c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho))^T, W(A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)\rho - c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho))), \quad (24)$$

$$\rho \in U_1;$$

предполагая, конечно, что выполняются все вышесказанные ограничения и условия.

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ SEPE

### Определение итерационных процессов

Для упрощения записи примем следующие обозначения:

$$A(\alpha_{|s}) = A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho_{|s}) \equiv A_{|s}, \quad c_z(\alpha_{|s}) = c_z \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho_{|s}) \equiv c_{z|s},$$

имея в виду, что  $\alpha_{|s} = \Upsilon_M^{-1}(\rho_{|s})$ . Обозначим также:  $\bar{U}$  — замыкание области  $\bar{U}$ ,  $U = U \cup \partial U$ , где  $\partial U$  есть граничное множество, граница  $U$ ; согласно определению  $\bar{U}$  есть замкнутая выпуклая ограниченная область, а граница  $\partial U$  отвечает конечному числу гиперплоскостей (конечному числу линейных равенств и неравенств).

Для задачи (24) (и (20)) определим последовательность приближений  $\{\rho_{|s}\}_{s=0}^{\infty}$  как регуляризованные решения нижеследующей задачи квадратичного программирования

$$\min((A_{|s-1}\rho'_{|s} - c_{|s-1})^T, W(A_{|s-1}\rho'_{|s} - c_{|s-1})), \rho'_{|s} \in \bar{U} \quad (25)$$

$$s = 1, 2, \dots; \rho_0 \in U;$$

полагаем  $\rho_{|s} = \rho'_{|s}$ , если  $\rho'_{|s} \in U$ ; если же решение (25)  $\rho'_{|s} \in \partial U$ , то в качестве  $\rho_{|s}$  берется как-либо точка в  $U$ , близкая  $\rho'_{|s}$ .

Мы предполагаем, что на точках итерационной последовательности

$$Rg(A \circ \Upsilon_M^{-1}(\rho)) = N, \quad (RgA(\cdot) = N) \quad (26)$$

и, следовательно,

$$|(A \circ \Upsilon_M^{-1})^T(A \circ \Upsilon_M^{-1})| \neq 0, \quad |A^T A| \neq 0. \quad (27)$$



При этих условиях квадратичная форма в (25) является положительно-определенной и существует единственное решение задачи (25). Начальное приближение  $\rho_0$  предполагаем таким, что каждая компонента  $c_{j_0}$  является неотрицательной величиной.

Рассмотрим теперь задачу (23) (и (18)). Предварительно введем открытую выпуклую ограниченную  $N$ -мерную область  $\Pi'_U$ , такую, что  $U \subset \Pi'_U \subset \Pi_U$ . Не исключено, что  $\Pi'_U = U$  или  $\Pi'_U = \Pi_U$ . Далее обозначим:  $\overline{\Pi'_U}$  и  $\overline{\mathbf{A}}$  — замыкания областей  $\Pi'_U$  и  $\mathbf{A}$  соответственно;  $\overline{\Pi'_U} = \Pi'_U \cup \partial\Pi'_U$  и  $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cup \partial\mathbf{A}$ , где  $\partial\Pi'_U$  и  $\partial\mathbf{A}$  есть граничные множества. Определим для задачи (23) (и (18)) последовательность приближений  $\{(\rho_s, \alpha_s)\}_{s=0}^{\infty}$ , рассматривая на каждом шаге  $s, s \geq 1$ , регуляризованные решения двух нижеследующих подзадач:

$$\min((A_{s-1}\rho' - c_{s-1})^T, W(A_{s-1}\rho' - c_{s-1})), \rho' \in \overline{\Pi'_U}, \alpha_0 \in \mathbf{A}; \quad (28)$$

если  $\rho' \in \Pi'_U$ , то полагаем  $\rho_s = \rho'$ ; если же решение (28)  $\rho' \in \partial\Pi'_U$ , то в качестве  $\rho_s$  берется как-либо точка в  $\Pi'_U$ , близкая  $\rho'$ ,

$$\min((B\alpha' - (\rho_s; \lambda))^T, (B\alpha' - (\rho_s; \lambda))), \alpha' \in \overline{\mathbf{A}}; \quad (29)$$

если  $\alpha' \in \mathbf{A}$ , то полагаем  $\alpha_s = \alpha'$ ; если же решение (29)  $\alpha' \in \partial\mathbf{A}$ , то в качестве  $\alpha_s$  берется как-либо точка в  $\mathbf{A}$ , близкая  $\alpha'$ . Начальное приближение  $\alpha_0$  считается заданным таким, что  $\forall i c_i(\alpha_0) \geq 0$ . Начальное  $\rho_0$  может не определяться. Говоря о подзадаче (29), отметим, что

$$|B^T B| \neq 0, \text{ поскольку } |B| \neq 0. \quad (30)$$

В задачах (23) и (24) допускается, что итерационный процесс может выходить на начальных шагах за пределы области, в которой находится решение. И аналогично условиям (26) и (27) в данной задаче предполагается, что на точках итерационной последовательности

$$RgA(\alpha) = N, (RgA(\cdot) = N) \quad (31)$$

и, следовательно,

$$|(A(\alpha)^T A(\alpha))| \neq 0, (|A^T A| \neq 0). \quad (32)$$

В силу условий (31) и (30) квадратичные формы в (28) и (29) соответственно являются положительно-определенными. Поэтому для обеих подзадач минимизации (28) и (29), которые относятся к проблемам квадратичного программирования, существуют единственные решения [Галеев, Тихомиров, 2000], и итерационный процесс всегда остается в области «физичности»  $\Pi'_U \otimes \mathbf{A}$ .

Мы предполагаем, что после некоторого конечного числа шагов итерационные процессы для исходных обратных задач (23) и (24) попадают в области определения решений  $\mathbf{A}_1 \otimes U_1$  и  $U_1$  соответственно и уже не выходят за их пределы.

В том случае, когда решения задач квадратичного программирования (25), (28) и (29) не находятся на границах соответствующих областей, они, как хорошо известно, являются решениями нижеследующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$A_{s-1}^T W(A_{s-1}\rho' - c_{s-1}) = 0, 1 \leq s, B\alpha' - (\rho_s; \lambda) = 0 \quad 1 \leq s.$$

В этом случае итерационные процессы для (18) и (20) не выходят за пределы  $U \otimes \mathbf{A}$  и  $U$  соответственно, и они могут быть выписаны в явной форме. Для  $\rho_s$  в обеих проблемах формально справедлива запись

$$\rho_s = (A_{s-1}^T W A_{s-1})^{-1} A_{s-1}^T W c_{s-1}, \quad 1 \leq s, \quad \rho_s \in U. \quad (33)$$

Для  $\alpha_s$  в задаче (18) имеет место формула

$$\alpha_s = B^{-1}(\rho_s; \lambda), \quad 1 \leq s, \quad \alpha_s \in \mathbf{A}. \quad (34)$$

В частном случае  $N_M = N$  выражение (33) упрощается. Здесь получаем

$$\rho_s = (A_{s-1})^{-1} c_{s-1}, \quad 1 \leq s, \quad \rho_s \in U. \quad (35)$$

В следующем разделе мы исследуем сходимость итерационного процесса  $\{\rho_s\}_{s=0}^{\infty}$  для задачи (20) именно в этом последнем случае  $N_M = N$ .

Произведем простое расширение сферы применения введенных итерационных процессов  $\{\rho_s\}_{s=0}^\infty$  и  $\{(\rho_s, \alpha_s)\}_{s=0}^\infty$  на дополнительный случай, когда области  $U$  и  $A$  являлись бы выпуклыми замкнутыми. В этом случае ситуация упрощается, поскольку границы  $\partial U$  и  $\partial A$  следует рассматривать уже заданными, а задачи квадратичного программирования (25) и (28), (29) непосредственно дают искомое решение из  $U$  и  $A$  соответственно. Итак,  $\forall s > 0$  последовательные приближения  $\rho_s$  и  $(\rho_s, \alpha_s)$  являются определенными. В параграфе о восстановлении коэффициента пористости как раз используем формулы и итерационный процесс данного дополнительного случая.

### Об условиях сходимости итерационного процесса (35)

Исследуем свойства итерационного процесса (35) в задаче (20) (и в (24)) в частном случае  $n_d = 1$  и  $N_M = N$ . Область  $(V)$  является однородной, и функциональная зависимость коэффициентов уравнений переноса от  $\rho$  в обеих проблемах (1) и (2) представлена в начальной части раздела «Структура коэффициентов уравнения переноса в области  $(V)$ ». Чтобы не усложнять рассмотрение, предположим дополнительно, что итерационный процесс не выходит за пределы  $U_1$ .

Обозначим как  $\check{\varphi}(\rho)$  вектор-функцию, или столбец функций,  $A^{-1}c_z(\Gamma_M^{-1}(\rho))$ ,

$$\check{\varphi}: U_1 \rightarrow R^N.$$

Тогда имеем SEPE в виде

$$\rho = \check{\varphi}(\rho), \quad \rho \in U_1, \quad (36)$$

а итерационный процесс записывается как

$$\rho_s = \check{\varphi}(\rho_{s-1}), \quad \forall s \geq 1, \quad \rho_i \in U_1. \quad (37)$$

Напомним, что для каждой из двух проблем решение  $\rho^*$  содержится в  $U_1$ ;  $\rho^* = \check{\varphi}(\rho^*)$ . Наша дальнейшая цель — получить условия того, что  $\check{\varphi}$  есть сжимающее отображение.

Столбец  $\check{\varphi}(\rho)$  является композицией функций; сложными функциями от  $\rho$  являются элементы матриц  $A$ ,  $A^{-1}$  и столбцов  $I^{(0)}$ ,  $z$ ,  $c_z$ . Дополнительно предполагаем, что все величины  $a_{ij}(\cdot)$  и  $I_i^{(0)}(\cdot)$ ,  $z_i(\cdot)$ ,  $i = 1, N$ ,  $j = 1, N$ , как сложные функции от  $\rho$ , являются непрерывно дифференцируемыми (функциями) в  $U_1$ . Касаясь данного предположения, заметим, что непрерывную дифференцируемость функций  $a_{ij}$  и  $I_i^{(0)}$  можно доказать, используя, например, представление этих функций в виде средних по траекториям частиц и включая зависимость от  $\rho$  в так называемые «веса», что типично в применениях методов Монте-Карло [Хисамутдинов и др., 1985], но в данной работе мы не будем проводить этого доказательства. С целью упрощения изложения не будем вводить и дополнительные обозначения для функций  $a_{ij}(\Gamma_M^{-1}(\rho))$ ,

$c_z(\Gamma_M^{-1}(\rho))$ ,  $z(\Gamma_M^{-1}(\rho))$  и  $I(\Gamma_M^{-1}(\rho))$ , а договоримся понимать в данном параграфе под символами  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial c_z}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \rho}$  и  $\frac{\partial I}{\partial \rho}$  частные производные  $\frac{\partial a_{ij}(\Gamma_M^{-1}(\rho))}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial c_z(\Gamma_M^{-1}(\rho))}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial z(\Gamma_M^{-1}(\rho))}{\partial \rho}$  и  $\frac{\partial I(\Gamma_M^{-1}(\rho))}{\partial \rho}$ .

Для изучения свойств  $\check{\varphi}$  введем предварительно две матрицы порядка  $N$ ,  $\Delta_z$  и  $\tilde{\Delta}_z$ , элементы которых  $\Delta_{z|ik}$  и  $\tilde{\Delta}_{z|ik}$  являются функциями на  $U_1$ . Итак,

$$\Delta_{z|ik}(\rho) = -\sum_{l=1}^N \frac{\partial a_{il}}{\partial \rho_k} \rho_l + \frac{\partial c_{z|i}}{\partial \rho_k},$$

$$\tilde{\Delta}_{z|ik}(\rho) = -\sum_{l=1}^N \frac{\partial a_{il}}{\partial \rho_k} \check{\varphi}_l(\rho) + \frac{\partial c_{z|i}}{\partial \rho_k},$$

при этом существенно, что  $\Delta_z(\rho^*) = \tilde{\Delta}_z(\rho^*)$  и что все элементы  $\Delta_{z|ik}$  и  $\tilde{\Delta}_{z|ik}$  являются непрерывными функциями на  $U_1$ . Введем также вектор-функцию  $\check{f}(\rho) \equiv I(\Gamma_M^{-1}(\rho)) - Zd$ , с которой связано рассмотрение метода Ньютона для решения SEPE. Уместно записать столбец  $Zd$ , введя квадратную диагональную матрицу  $D$  порядка  $N_M$  с диагональными элементами  $d_1, \dots, d_{N_M}$  как  $Dz$ ,  $Zd = Dz$ . Отметим, что сейчас здесь  $N_M = N$ . Справедлива

**Лемма.** Пусть  $\check{\varphi}'(\rho)$  и  $\check{f}'(\rho)$  матрицы производных вектор-функций  $\check{\varphi}(\cdot)$  и  $\check{f}(\cdot)$ , т. е.  $\forall (i, k)$

$$\check{\varphi}'_{ik} = \frac{\partial \check{\varphi}_i}{\partial \rho_k}, \quad \check{f}'_{ik} = \frac{\partial \check{f}_i}{\partial \rho_k}.$$

Тогда имеем, что

$$\tilde{\varphi}' = A^{-1}\tilde{\Delta}_z, \quad \tilde{f}' = A - \Delta_z$$

и что все элементы  $\tilde{\varphi}'_{ik}$  и  $\tilde{f}'_{ik}$  непрерывны на  $U_1$ .

**Доказательство.** Выражение для  $\tilde{f}'$  получается непосредственным дифференцированием. Для определения же  $\tilde{\varphi}'$  продифференцируем обе части равенства  $A\tilde{\varphi} = c_z$ . Получаем

$$\frac{\partial}{\partial \rho_k} \left( \sum_{l=1}^N a_{il} \tilde{\varphi}_l \right) = \frac{\partial c_{z|i}}{\partial \rho_k},$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{\partial a_{il}}{\partial \rho_k} \tilde{\varphi}_l + \sum_{l=1}^N a_{il} \frac{\partial \tilde{\varphi}_l}{\partial \rho_k} = c'_{z|ik}, \quad (A\tilde{\varphi}')_{ik} = \tilde{\Delta}_{z|ik}, \quad \tilde{\varphi}' = A^{-1}\tilde{\Delta}_z.$$

Непрерывность на  $U_1$  элементов матриц  $\tilde{\varphi}'$  и  $\tilde{f}'$  следует из исходных свойств гладкости  $A$  и  $I^{(0)}, z$ .

Сформулируем теперь утверждение о свойствах  $\tilde{\varphi}'$ .

**Предложение.** Пусть в некоторой области  $U$  такой, что  $U \subset U_1$  и  $\rho^* \in U$ , выполнено неравенство

$$\|A^{-1}\Delta_z\| < 1. \quad (38)$$

Тогда существует область  $U^*$  такая, что

$$U^* \subset U_1, \quad \rho^* \in U^*,$$

$$\tilde{\varphi}(U^*) \subseteq U^*, \quad \sup_{U^*} \|A^{-1}\tilde{\Delta}_z\| < 1, \quad (39)$$

или, иначе, отображение  $\tilde{\varphi}$  является сжимающим на  $U^*$ . Заметим, что в (38), (39) фигурирует какая-либо из векторных норм, в частности  $\|\cdot\|_\infty$ .

Доказательство не приводим, поскольку оно аналогично доказательству соответствующего утверждения в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011].

Условие (38) можно трактовать как условие малости матрицы  $A^{-1}\Delta_z$  в сравнении с единичной матрицей  $E$  или малости  $\Delta_z$  в сравнении с  $A$ . К близкой трактовке приходим, если учесть, что

$$\Delta_z = A - I' + Dz', \quad \Delta_z = A - (I - Dz)'. \quad (40)$$

Последнее следует из равенства  $\tilde{f}' = A - \Delta_z$ , полученного в лемме, и определения  $\tilde{f} \equiv I - Dz$ . Из (40) получаем, что

$$A^{-1}\Delta_z = E - A^{-1}(I - Dz)',$$

т.е. в этой близкой трактовке матрица  $A$  должна быть близка матрице производных  $(I - Dz)'$ . Другая близкая трактовка вытекает из записи

$$A^{-1}\Delta_z = E - A^{-1}(Z(Z^{-1}I - d))' = E - A^{-1}(Z'(Z^{-1}I - d) + Z(Z^{-1}I - d)'),$$

учитывая малость  $Z^{-1}I - d$  вблизи решения. Тогда

$$A^{-1}\Delta_z \approx E - A^{-1}Z(Z^{-1}I - d)'$$

и малость  $A^{-1}\Delta_z$  идентична близости  $(A^{-1}Z)^{-1} = Z^{-1}A$  к матрице  $(Z^{-1}I)' = J'$ .

Чтобы конкретизировать условие (38), детализируем выражение для матрицы  $\Delta_z$ , согласно записи ее в виде (40). Напомним, что элементы матрицы  $A$  являются некоторыми математическими ожиданиями и выражаются через решения уравнений переноса (см. раздел «Предварительные замечания»). Элементы же матрицы  $I'$  были определены в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]. Ограничиваясь здесь случаем проблемы 2 с уравнением (2) и используя формулы из [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], имеем  $\forall(i, j)$ :

$$\Delta_{z|ij} = + \iint \Phi(t, x) \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_j}(x) \psi_i^+(t, x) dt dx - \iint \Phi(t, x) \left[ \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \rho_j} \psi_i^+ \right](t, x) dt dx + Dz', \quad (41)$$

где  $\hat{S}_0$  — интегральный оператор, сопряженный к  $\hat{S}_0^+$ , а  $\psi_i^+$  — решение сопряженного к (2) уравнения, определенного по отношению к функционалу  $I_i$ ,  $i \in 1, N$ . Для случая проблемы 1 с уравнениями (1) име-

ет место соответствующая и аналогичная (41) формула. Выражение (41) будет конкретизировано далее в разделе о восстановлении коэффициента пористости, когда будет доопределена столбец-функция  $z$ .

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОРИСТОСТИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ДВУХЗОНДОВОГО НЕЙТРОН-НЕЙТРОННОГО КАРОТАЖА (ННК)

### Постановка задачи

Различные возможные применения методов ППХВ, в которых измерениям сопоставляются линейные функционалы, уже обсуждались в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]. Задача о восстановлении коэффициента пористости  $k_p$  не относится к ним. Применим метод, построенный в предыдущих параграфах, к данной задаче. Пласт, или формация, образующая область  $(V)$ , считается однородной (гомогенной) смесью двух исходных (прото) однородных сред: флюида, заполняющего поры, и минерального скелета в объемных долях  $k_p$  и  $1 - k_p$ , соответственно,  $0 < k_p < 1$ . Отметим также, сообразуясь с общими обозначениями, что  $n_d = 1$  и что полагаем, никак не умаляя общности,  $(V_G) = R^3$ . Считается, что

$$\forall x \in (G_V) \quad \Sigma(x) = k_p \Sigma_f(x) + (1 - k_p) \Sigma_{m-s}(x) \quad (42)$$

$$\text{и } \forall r \in (V), \quad \forall ((\Omega, E), (\Omega', E')) \in ((S_1) \otimes [0, +\infty))^2$$

$$S(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | r) = k_p S_f(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | r) + (1 - k_p) S_{m-s}(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | r), \quad (43)$$

где в правых частях формул (42) и (43) индексами  $f$  и  $m - s$  помечены соответствующие сечения, полное и макроскопическое дифференциальное, флюида и минерального скелета. Полагаем, что функциональные свойства этих сечений с индексами таковы же, что и у  $\Sigma$  и  $S$ . Для настоящей работы важно, что в состав флюида входит водород, поэтому макроскопические сечения взаимодействий нейтронов с атомами водорода флюида прямо пропорциональны  $k_p$ . Пусть  $\rho_H^{(1)}$  — концентрация атомов водорода во флюиде, тогда  $\rho \equiv \rho_H = k_p \rho_H^{(1)}$  — концентрация (числовая плотность) атомов водорода флюида в  $(V)$ . Именно водород флюида рассматривается как единственный характерный элемент в задаче,  $N = 1$ ; именно взаимодействия нейтронов с атомами водорода флюида называем в данной работе характерными взаимодействиями для ННК. Настоящая задача относится к проблеме 2. Предполагается заданным какой-либо стационарный источник нейтронов, перенос частиц носит стационарный характер. Мы не будем переходить к эквивалентной нестационарной проблеме 2, а примем, и это является справедливым, что временная переменная опускается. В частности, последнее означает, что измерения производят в единичном временном интервале.  $\forall x \in (X)$  стационарное уравнение переноса в интегродифференциальной и интегральной формах соответственно есть

$$(\Omega, \nabla \Phi) + \Sigma \Phi = \hat{S}^+ \Phi + q_0, \quad (44)$$

$$\Phi = \hat{L}^+ \hat{S}^+ \Phi + \hat{L}^+ q_0, \quad (45)$$

где  $\hat{L}^+$  — хорошо известный линейный интегральный оператор, обратный к дифференциальному оператору в левой части уравнения (44). В технологии ННК в качестве данного измерений  $d$  рассматривают отношение показаний ближнего и дальнего детекторов,  $N_M = N = 1$ . Пусть  $I_{near}$  и  $I_{far}$  — линейные функционалы от плотности потока  $\Phi$ , описывающие показания ближнего и дальнего (по отношению к источнику нейтронов) детекторов. Полагая  $I \equiv I_{near}$ ,  $z \equiv I_{far}$  в качестве уравнения измерений (12) на  $(0, \rho_H^{(1)})$  имеем

$$J(\rho) - d = 0 \quad \text{или} \quad I(\rho) - d \cdot z(\rho) = 0. \quad (46)$$

Удобно и естественно вместо размерной переменной  $\rho \equiv \rho_H$  ввести безразмерную переменную  $m$ :  $\rho_H / \rho_H^{(1)} = m$ , хотя  $m = k_p$ , тем не менее используем переменную  $m$  как с целью трактовки, так и для упрощения записи. В практике коэффициент пористости определяют в меньшем интервале, нежели  $(0, 1)$ . Поэтому будем считать заданным замкнутый подинтервал  $[m_{in}, m_{fin}] \subset (0, 1)$ , в котором содержится неизвестная  $m$ , и будем рассматривать его как замыкание  $U$  интервала  $U \equiv (m_{in}, m_{fin})$ . Тем самым упростится и задание итерационного процесса в следующей подсекции. Итак, формулируем задачу определения  $m$  по заданному значению  $d$  отношения показаний двух детекторов как задачу решения уравнения (46), считая при этом в соответствии с условиями в разделе «Предварительные замечания», что

- (i) неизвестное  $m$  принадлежит априори заданному замкнутому подынтервалу  $[m_{in}, m_{fin}]$  из  $(0, 1)$ ;

(ii) функция  $J(m)$  является непрерывной строго монотонно возрастающей на  $[m_{in}, m_{fin}]$ ;

(iii)  $d \in J([m_{in}, m_{fin}])$ ,  $J([m_{in}, m_{fin}]) \subset J((0,1))$ .

В силу свойств функции  $J(\cdot)$  существует единственное решение поставленной задачи.

### Метод решения и об условии сходимости

Адаптируем развитый в работе метод к решению уравнения (46) при ограничениях (i)—(iii) предыдущей подсекции. А именно, речь идет о соответствующей записи уравнений и соотношений (14), (16), (17), (20), (22) и (24). Пусть  $\Omega_T$  — все множество траекторий цепи Маркова, соответствующее уравнениям переноса (44) и (45) [Спанье, Гелбард, 1972; Хисамутдинов и др., 1985]; и пусть  $\xi(\omega)$  — какая-либо несмещенная оценка из «нулевого» класса для вычисления  $I(\cdot)$ ,  $M(\xi(\omega)) = I$ ,  $\omega \in \Omega_T$ ; например,  $\xi(\cdot) = \xi_1(\cdot)$ , где последняя — хорошо известная оценка «по соударениям» [Спанье, Гелбард, 1972; Хисамутдинов и др., 1985]. Разобьем  $\Omega_T$  на два подмножества:  $\Omega_H$  — множество траекторий, содержащих хотя бы одно рассеяние на атомах  $H$  флюида в  $(V)$ ,  $\Omega_0$  — множество всех остальных траекторий. Обозначим, далее

$$I_H = \int_{\Omega_H} P(d\omega)\xi(\omega) \quad \text{и} \quad I^{(0)} = \int_{\Omega_0} P(d\omega)\xi(\omega),$$

где  $P(d\omega)$  — вероятностная мера в пространстве траекторий, индуцированная вышеназванной цепью Маркова. Теперь, согласно свойству аддитивности математических ожиданий, имеем разложение вида (14):

$$I = I^{(0)} + I_H,$$

при этом  $I_H(m)/m = O(1)$  для  $m \rightarrow 0$ . В данной проблеме матрица-функция  $A$  является (скалярной) функцией, которую обозначаем как  $a(m)$ ,  $I_H(m) = a(m) \cdot m$ . Записывая далее, согласно определению  $c_z = d \cdot z - I^{(0)}$ , переписываем уравнение (46) в виде (20):

$$a(m)m - c_z(m) = 0, \quad m \in [m_{in}, m_{fin}], \quad (47)$$

а в качестве вариационной или обобщенной постановки задачи (47) имеем формулировку

$$\min_m [a(m) \cdot m - c_z(m)]^2, \quad m \in [m_{in}, m_{fin}]. \quad (48)$$

Условие (22) в данной задаче означает, что  $a(m) \neq 0$  на  $[m_{in}, m_{fin}] \equiv \bar{U}$

Функции  $a(\cdot)$  и  $c_z(\cdot)$  могут вычисляться по одному набору траекторий вместе с линейными функционалами  $I$  и  $z$ . И этот факт является важной чертой предлагаемого метода ППХВ.

Обсудим условие  $a(m) \neq 0$ . Для его выполнения необходимо, чтобы  $I_H(m) \neq 0$ . Хорошо известны аномальные замедляющие свойства атомов водорода, поэтому  $I_H(m)$  должно составлять существенную часть функционала  $I(m)$ . Для интеграла  $I_H(\cdot)$  может быть получена следующая запись:

$$I_H = \int_{(V) \otimes (S_1) \otimes [0, +\infty)} \hat{S}_H^+ \Phi(x) \Phi^+(x) dx, \quad (49)$$

где  $\hat{S}_H^+$  — (сопряженный) линейный интегральный оператор рассеяния на атомах водорода флюида в  $(V)$ , ядром которого является макроскопическое дифференциальное сечение рассеяния на атомах водорода флюида в  $(V)$ ; оператор  $\hat{S}_H^+$  действует по переменным до рассеяния и является слагаемым оператора  $\hat{S}^+$ ;

$\Phi^+(x)$  — решение сопряженного уравнения переноса, интегральная форма которого на  $X$  есть

$$\Phi^+ = \hat{L} \hat{S} \Phi^+ + \hat{L} E, \quad (50)$$

где  $\hat{L}$  — хорошо известный оператор переноса по лучу, сопряженный к  $\hat{L}^+$ . В условиях, принятых в настоящей работе, решение уравнения (50) существует, единственно и представляется в виде ряда Неймана, сходящегося по норме  $\sup|\cdot|$ . По физическому смыслу функция  $\hat{S}_H^+ \Phi(x)$  может трактоваться как плотность (источника) нейтронов, появляющихся после рассеяния на атомах водорода флюида в  $(V)$ . На основе принципа двойственности функционал  $I$  имеет также представление

$$I = \int q_0(x) \Phi^+(x) dx. \quad (51)$$

Сопоставление (49) и (51) проясняет вопрос о соотношении  $I_H$  и  $I$ . Касаясь справедливости формулы (49), отметим следующее: она получена, исходя из представления, что плотность  $\hat{S}_H^+ \Phi(x)$  является

суммой  $\sum_{j=1}^{\infty} [\hat{S}_H^+ \Phi_j](x)$ , где  $\Phi_j(x)$  — плотность потока частиц, испытавших  $j-1$  рассеяние,  $j \geq 2$ ,  $\Phi_1(x) = \hat{L}^+ q_0(x)$  — плотность потока нерассеянных нейтронов. Итак, условие  $I_H(m) \neq 0$  и далее

$$a(m) \neq 0 \text{ на } (0,1) \quad (52)$$

являются физически адекватными, поэтому для дальнейших математических преобразований условие (52) считается выполненным. Как и в разделе «Определение итерационных процессов», для решения задачи (48) конструируем итерационный процесс, исходя из задачи на условный экстремум:

$$\min_{m_s} [a(m_{|s-1}) \cdot m_s - c_z(m_{|s-1})]^2, \quad m_s \in [m_{in}, m_{fin}], \quad s \geq 1, \quad m_0 \in [m_{in}, m_{fin}]. \quad (53)$$

Конкретизируя выражение итерирующей функции  $\check{\varphi}$ :  $\check{\varphi}(m) = c_z(m)/a(m)$ , выпишем решение последней задачи (53). Итак,

$$m_{|s} = \check{\varphi}(m_{|s-1}), \text{ если } \check{\varphi}(m_{|s-1}) \in [m_{in}, m_{fin}], \quad (54)$$

и

$$m_{|s} = m_{in}, \text{ если } \check{\varphi}(m_{|s-1}) < m_{in}, \quad (55)$$

$$m_{|s} = m_{fin}, \text{ если } \check{\varphi}(m_{|s-1}) > m_{in}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (56)$$

Обобщенная постановка (48) может быть использована также в случае, когда считается, что данное измерений  $d$  представлено с погрешностью какого-либо типа. Мы не касаемся здесь этого случая.

Численные эксперименты, выполненные для несколько упрощенных условий и изложенные в [Хисамутдинов, Шишенина, 2010], показали успешность предложенного метода. В следующем пункте мы приведем часть из этих численных результатов. Здесь же завершим раздел обсуждением некоторых достаточных условий сходимости итерационного процесса (53)—(56), используя анализ и результаты раздела «Об условии сходимости итерационного процесса (35)». Предполагаем при этом, что итерационный процесс не выходит за пределы интервала  $[m_{in}, m_{fin}]$ , а искомое решение  $m_*$  является его внутренней точкой, т.е.  $m_* \in (m_{in}, m_{fin})$ . В данной проблеме о восстановлении коэффициента пористости достаточное условие (38) приобретает вид

$$\sup \left| \frac{\Delta_z(m)}{a(m)} \right| < 1, \quad \Delta_z = a - (I - d \cdot z)', \quad (57)$$

где  $(I - d \cdot z)'$  — производная функции  $(I - d \cdot z)(m)$ . Пусть  $\delta$  — сколь-угодно малая положительная постоянная. Тогда вместо (57) можно записать  $-1 + \delta \leq 1 - \frac{(I - d \cdot z)'(m)}{a(m)} \leq 1 - \delta$  или, преобразуя,

$$2 > 2 - \delta \geq \frac{(I - d \cdot z)'(m)}{a(m)} \geq \delta > 0. \quad (58)$$

Другое близкое достаточное условие, учитывающее малость  $J(m) - d$  вблизи решения, есть  $-1 + \delta \leq 1 - \frac{J'(m)}{a(m)/z(m)} \leq 1 - \delta$  или, преобразуя последнее,

$$2 > 2 - \delta \geq \frac{J'(m)}{a(m)/z(m)} \geq \delta > 0. \quad (59)$$

Аналогично тому, что и в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011], о неравенствах (58) и (59) может быть сказано: характерное взаимодействие должно вносить основной вклад в производную; функция  $a$  должна быть близка  $(I - d \cdot z)'$ , имея в виду рассмотрение в качестве начального уравнения  $I - d \cdot z = 0$ , а отношение  $a/z$  — близко  $J'$ , если подразумевать в качестве стартового уравнение  $J - d = 0$ . Завершим запись формулы (41) для функции  $\Delta_z$  в (57) в применении к задаче о восстановлении  $m = k_p$ , воспользовавшись выражениями для производных из [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]. Обоз-

начая  $\Phi_{near}^+(\cdot)$  и  $\Phi_{far}^+(\cdot)$  для решения стационарных сопряженных задач по отношению к функционалам  $I \equiv I_{near}$  и  $z \equiv I_{far}$  соответственно, получаем

$$\Delta_z = \int \Phi(x) \frac{\partial \Sigma}{\partial m}(x) \Phi_{near}^+(x) dx - \int \Phi(x) \left[ \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial m} \Phi_{near}^+(x) \right] dx +$$

$$+ d \times \left[ - \int \Phi(x) \frac{\partial \Sigma}{\partial m}(x) \Phi_{far}^+(x) dx + \int \Phi(x) \left[ \frac{\partial \hat{S}}{\partial m}(x) \Phi_{far}^+(x) \right] dx \right].$$

Нельзя не отметить, что соответствующие слагаемые производных  $I' \equiv I'_{near}$  и  $z' \equiv I'_{far}$  входят в  $\Delta_z$  с разными знаками, что способствует уменьшению этой функции и тем самым — сходимости итерационного процесса.

### Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились с целью изучения сходимости и свойств построенного итерационного процесса (53)—(56). Изначально фиксировалось произвольное значение параметра пористости  $m_*$ , решалась соответствующая прямая задача по вычислению значений линейных функционалов и их отношения  $d$ . Далее исходное значение параметра  $m_*$  как бы забывалось. Обратная задача по восстановлению  $m_*$  решалась при этом значении отношения функционалов  $d$  для произвольных начальных приближений  $m_0$ , взятых из интервала  $[0.05, 0.5]$ .

В этих численных экспериментах рассматривается двухслойная модель среды: неограниченная горная порода, пересеченная цилиндрической скважиной радиуса  $r_{well} = 9.85$  см. Параллельно оси скважины на расстоянии  $r_{dev} = 6.81$  см от нее располагается ось условного прибора. Последний состоит из точечного источника и двух зондов (ближнего и дальнего по отношению к источнику), представленных цилиндрическими объемами радиуса  $r_{cil} = 1.27$  см и высотами  $H_{near} = 10.16$ ,  $H_{far} = 15.24$  см. Расстояния от оснований цилиндров до источника равны  $L_{near} = 28.73$  и  $L_{far} = 50.47$  см для ближнего и дальнего соответственно. Источник мононаправленный, направление вылета частиц характеризуется косинусами  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , начальная энергия нейтронов равна 14.1 МэВ. Интегральные потоки тепловых нейтронов  $I$  и  $z$  по вышеописанным цилиндрическим объемам рассматриваются как объекты первичных измерений. Отношение этих первичных измерений и дает синтетическое составное данное  $d$ . Скважина считается заполненной водой. Состав пласта представляет однородную смесь минерального скелета и флюида в отношении объемных долей  $(1 - k_p)$  к  $k_p$ ;  $k_p = m$ . В качестве скелета рассматривается кварц ( $\text{SiO}_2$ ); в качестве флюида — вода ( $\text{H}_2\text{O}$ ).

Численные эксперименты были проведены с использованием комплекса программ NskMCNG [Банзаров, Хисамутдинов, 2010]. В качестве сечений взаимодействий использовались данные известной российской 26-групповой библиотеки АББН, пополненной значениями для высоких энергий. Относительная погрешность вычисленных значений линейных функционалов и их слагаемых составляла 1—3 %. Относительная погрешность отношения линейных функционалов, вычисленная по формуле дифференциала частного, составляла 2—5 %. В нижеследующих нескольких строках приводятся значения функций  $I(m)$ ,  $z(m)$  и  $J(m)$  в заданных семи точках. Они дают представление об этих функциях, которое вполне согласуется с характером зависимостей, имеющих место в применениях ННК.

$m$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$I \cdot 10^4$	1.817	1.813	1.803	1.769	1.768	1.746	1.697
$z \cdot 10^5$	3.498	3.252	2.438	2.196	1.844	1.653	1.552
$J$	5.194	5.575	7.395	8.056	9.588	10.563	10.934

Для проверки сходимости итерационного процесса (53)—(56) в качестве  $m_*$  выбиралось 5 значений из интервала  $(0.05, 0.5)$ . В качестве критерия остановки процесса было принято неравенство  $|(m_i - m_{i-1})/m_i| < 0.03$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , что соответствует отклонению полученного результата от точного значения  $m_*$  не более чем на 3 %. Чтобы убедиться, что после выполнения критерия остановки итерационный процесс (53)—(56) не расходится, проводилось несколько дополнительных итерационных шагов. В табл. 1 приведены результаты реализации итерационного процесса для каждого из выбранных значений  $m_*$ . Как видно из результатов, сходимость процесса для рассмотренных случаев является, как правило, монотонной и безоговорочной и достигается в среднем за 5—8 итерационных шагов.

Таблица 1.

Сходимость итерационного процесса (53)—(56)

$m_*$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$
0.06	0.20	0.130	0.107	0.077	0.068	0.062	0.059	0.061	0.060	—	—
0.16	0.50	0.297	0.246	0.215	0.189	0.175	0.167	0.163	0.162	0.161	0.161
0.26	0.20	0.214	0.226	0.237	0.244	0.251	0.257	0.262	0.260	0.259	0.260
0.26	0.50	0.355	0.301	0.292	0.282	0.276	0.267	0.263	0.260	0.259	0.260
0.36	0.20	0.250	0.298	0.330	0.349	0.356	0.358	0.359	0.359	—	—
0.36	0.50	0.418	0.374	0.362	0.361	0.361	—	—	—	—	—
0.46	0.20	0.277	0.359	0.399	0.429	0.438	0.447	0.455	0.461	0.458	0.459
0.46	0.50	0.465	0.460	0.459	0.460	—	—	—	—	—	—

Приведем кратко данные о вычислительных затратах, о времени вычислений. На РС с тактовой частотой 3 ГГц за 30 мин моделировалось  $\sim 25 \cdot 10^6$  траекторий нейтронов и вычислялись соответствующие средние, включая  $I$  и  $z$ . Стандартные относительные погрешности их вычисления, как уже говорилось, не превышали 3 %.

В дополнение к сходимости затрагивался также вопрос о восстановлении  $m$  посредством процесса (53)—(56) для случая «умеренно близких» данных измерений. Значение  $d$ , соответствующее  $m_*$ , как бы «портилось», и итерационный процесс применялся уже к измененному значению  $d_{**}$ . В результате получали новое значение  $m_{**}$ . Значение  $d = 9.0385$ , соответствующее  $m_* = 0.36$ , было изменено (увеличено и уменьшено) на 0.2, что составляет 2.61 % от  $d$ . В этих вычислениях, при решении сопутствующих прямых задач на итерационных шагах, использовалась известная техника «зависимые испытания» [Хисамутдинов и др., 1985] для более точного вычисления малых разностей. Как и следовало ожидать, для приращений  $(m_{**} - m_*)$  и  $(d_{**} - d)$  оказывалось справедливым соотношение  $d_{**} - d \approx \tilde{J}'(m_*) \cdot (m_{**} - m_*)$ , где  $\tilde{J}'(m_*)$  — приближенное значение производной  $J'(m_*)$ , вычисленное по формулам конечных разностей первого порядка от функции  $J(m)$ . Мы еще коснемся вопроса о производных в следующем параграфе.

Формула конечных разностей первого порядка с шагом  $h = 0.1$  применялась также к функции  $\tilde{\varphi}(m)$  итерационного процесса (53)—(56) для вычисления приближенных значений производной функции  $\tilde{\varphi}'(m)$ . В табл. 2 приведены эти сеточные  $\tilde{\varphi}$  и приближенная  $\tilde{\varphi}'$ , соответствующие  $d$  с  $m_* = 0.36$ .

Предполагая, как и для  $I(m)$ ,  $z(m)$ , непрерывную дифференцируемость функции  $\tilde{\varphi}(m)$ , а также дополнительно в соответствии с численными данными ее выпуклость вверх, можно утверждать, что максимальное значение  $\tilde{\varphi}'(m)$ ,  $m \in [0.05, 0.5]$ , будет получено на левом конце интервала  $[0.05, 0.5]$ . Для крайней левой точки рассматриваемого отрезка можем оценить  $\tilde{\varphi}'(0.05) \approx 0.849 < 1$ , тем самым получив оценку сверху для производной  $\tilde{\varphi}'$  во всех остальных точках исследуемого интервала. Эта хорошо известная оценка в определенной мере объясняет сходимость итерационного процесса (53)—(56) на всем отрезке  $[0.05, 0.5]$ .

Результаты, иллюстрирующие выполнение достаточного условия сходимости (59), а также (57), приведены в табл. 3. В ней приводятся также значения отношения  $I/I_H$ , которое является характерным для задачи. В качестве  $J'$  (см. табл. 3), как и чуть ранее, использовалась аппроксимация по формуле конечных разностей первого порядка.

Таблица 2. Сеточная функция  $\tilde{\varphi}(m)$  и ее приближенная производная

$m$	$\tilde{\varphi}(m)$	$\tilde{\varphi}'(m)$
0.05	1.1934E-01	8.4850E-01
0.10	1.6177E-01	7.7029E-01
0.20	2.3879E-01	7.3527E-01
0.30	3.1232E-01	6.3497E-01
0.40	3.7582E-01	5.2950E-01
0.50	4.1820E-01	4.2381E-01

Примечание. Значение  $d$  соответствует  $m_* = 0.36$ .

Таблица 3. Выполнение достаточного условия сходимости

$m$	$\frac{I(m)}{I_H(m)}$	$\frac{J'(m)}{a(m)/z(m)}$	$\frac{\Delta_z(m)}{a(m)} \approx 1 - \frac{J'(m)}{a(m)/z(m)}$
0.05	1.1315E+00	1.3103E-01	8.6897E-01
0.10	1.1321E+00	2.4397E-01	7.5603E-01
0.20	1.1310E+00	3.3387E-01	6.6613E-01
0.30	1.1332E+00	4.2514E-01	5.7486E-01
0.40	1.1337E+00	4.3820E-01	5.6180E-01
0.50	1.1335E+00	4.4870E-01	5.5130E-01



Сравнивая сеточные  $\check{f}'$  и  $\frac{\Delta_z}{a}$  (см. табл. 2, 3), отметим в соответствии с «Предложением» из раздела «Об условии сходимости итерационного процесса (35)» их ожидаемую близость.

### НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ К МЕТОДУ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЮ

В методах ППХВ фигурируют или вычисляются величины, которые являются теми или иными математическими ожиданиями по траекториям имитационного случайного процесса, порождающего уравнение переноса. В противоположность этому заметим, что в хорошо известном итерационном методе Ньютона ситуация иная. Производные линейных функционалов от потока частиц по искомым параметрам, фигурирующие в нем, записываются в форме билинейных функционалов теории возмущений [Марчук и др., 1976; Хисамутдинов и др., 1985; Марчук, 1989]. А вычисление последних сейчас — значительно более сложная проблема в сравнении с вычислением средних по траекториям имитационного процесса.

Одним из следствий того, что можно трактовать восстановление параметров уравнения переноса как некоторый предмет математической статистики, является вывод о погрешности и точности вычислений. Считаем, что погрешности данных измерений задаются *a priori* и предполагаем, что они носят вероятностный характер. Тем самым задается некоторый предел точности восстановления или, говоря иначе, определено — какие два близкие значения параметра можно восстанавливать при заданном уровне доверия. Наличие порога разрешимости делает необходимым согласование точности вычислений с априорной погрешностью.

ППХВ являются методами типа простой итерации, и хорошо известна стандартная форма подобных методов. Ограничимся для простоты задачей о восстановлении коэффициента пористости  $m = k_p$ . Здесь стандартная форма ввода простой итерации — это запись уравнения в виде

$$m = m - \lambda \check{f}(m), \quad m \in (0,1), \quad (60)$$

где обозначено  $\check{f}(m) \equiv I(m) - d \cdot z$ . Предложенный метод вкладывается в эту схему, если рассматривать  $\lambda$  как функцию от  $m$  и полагать  $\lambda(m) = 1/a(m)$  на  $(0,1)$ .

Существенным моментом методов ППХВ является введение матрицы характерных взаимодействий, а в случае с одним параметром — функции характерных взаимодействий. Полагалось, что  $a(m) = I_H(m)/m$ ,  $m \in (0,1)$ . Обобщая, следует определить  $a(\cdot)$  как

$$a(m) = \frac{I_H(m) - I_H(0)}{m - 0}, \quad I_H(0) = 0, \quad m \in (0,1). \quad (61)$$

Данное более общее определение соответствует тому, что кривая  $J(\cdot)$  коэффициента  $k_p$  в НКК является монотонно возрастающей. Опишем, как применить введенный итерационный метод к другой известной проблеме — восстановлению плотности (земного) пласта по данным измерений гамма-гамма каротажа (ГГК). Рассматривают либо однозондовый прибор, либо двухзондовый. В последнем случае, на котором мы и остановимся, в качестве данного измерения фигурирует отношение результатов измерений дальнего и ближнего зондов. Пусть  $I_{far}^{\gamma}(\rho)$  и  $I_{near}^{\gamma}(\rho)$  — две функции, представляющие зависимости указанных зондов от плотности  $\rho$  пласта и задаваемые либо как соответствующие математические ожидания, либо как линейные функционалы от плотности потока гамма-квантов,  $0 < \rho$ ,  $I_{far}^{\gamma} \equiv I$ ,  $I_{near}^{\gamma} \equiv z$ . Для определения  $\rho$  используют ниспадающую ветвь кривой плотности. Предполагаем, что интервал  $(\rho_{inv}, +\infty)$  относится к этой ветви и что кривая плотности  $I(\rho)/z(\rho)$  является непрерывной монотонно убывающей функцией на этом интервале. Разобьем множество  $\Omega_T$  всех траекторий гамма-квантов в проблеме на два подмножества:  $\Omega_e$  — множество (характерных) траекторий, каждая из которых содержит хотя бы одно комптоновское рассеяние на электронах атомов пласта, в  $(V)$ ,  $\Omega_0$  — множество всех остальных траекторий. В соответствии с данным разбиением имеем разложение вида (14):

$$I = I^{(0)} + I_e,$$

при этом предполагаем [Хисамутдинов и др., 1985], что

$$\frac{I_e(\rho) - I_e(\rho^{(0)})}{\rho - \rho^{(0)}} = O(1) \quad \text{при } \rho \rightarrow \rho^{(0)},$$

где  $\rho^{(0)} > \rho_{inv}$ ,  $I_e(\rho^{(0)}) = I_e(\rho)|_{\rho=\rho^{(0)}}$ ;  $\rho^{(0)}$  — некоторое заранее фиксированное значение плотности. В данной задаче характерным взаимодействием является комптоновское рассеяние на электронах атомов в пласте и функцию характерных взаимодействий следует вводить как

$$a(\rho) = \frac{I_e(\rho) - I_e(\rho^{(0)})}{\rho - \rho^{(0)}}, \quad \rho^{(0)} \in (\rho_{inv}, +\infty). \quad (62)$$

Теперь преобразуем уравнение измерений  $I - d \cdot z = 0$  к виду для применения ППХВ. Представляя и обозначая  $I(\rho) = a(\rho) \cdot (\rho - \rho^{(0)}) + I^{(0)}(\rho) + I_e(\rho^{(0)})$ ,  $c_z(\rho) \equiv d \cdot z(\rho) - [I^{(0)}(\rho) + I_e(\rho^{(0)})]$ ,  $\check{\varphi}(\rho) \equiv c_z(\rho) / a(\rho)$  для уравнения измерений имеем:

$$a(\rho) \cdot (\rho - \rho^{(0)}) - c_z(\rho) = 0 \quad \text{или} \quad \rho - \rho^{(0)} = \check{\varphi}(\rho), \quad a(\rho) \neq 0, \quad \rho \in (\rho_{inv}, +\infty). \quad (63)$$

Дополним (63) ограничением  $\rho \in [\rho_{in}, \rho_{fin}]$ , где  $[\rho_{in}, \rho_{fin}]$  — некоторый *a priori* заданный интервал,  $[\rho_{in}, \rho_{fin}] \subset (\rho_{inv}, +\infty)$ . Тогда итерационный процесс для восстановления плотности  $\rho$  по заданному значению измерений  $d$  формулируется полностью аналогично (53)—(56). Предварительные численные эксперименты показывают его сходимости. Нельзя не отметить, что при вычислении разности в числителе правой части формулы в (62), если она мала, уместно применение зависимых испытаний.

Важные технологии определения элементного состава связаны с импульсными нейтрон-гамма методами. Проблема 1 и система уравнений (1) непосредственно связаны с интерпретацией их данных измерений. Восстановление коэффициентов нефте- и водонасыщенности и элементного состава пласта, по данным импульсного нейтрон-гамма каротажа (неупругого рассеяния), уже рассматривалось в [Хисамутдинов и др., 2008; Khisamutdinov, Phedorin, 2009]. Но в названных импульсных методах часто рассматривают составные данные измерений, данные в форме отношения показаний или нормированные измерения. Методы, развитые в настоящей работе, открывают возможность восстановления неизвестных параметров на основе этого широкого типа данных. Представляется также интересным сочетание достоинств предложенных здесь методов и приближенных из [Hertzog, 1980; Grau, Schweitzer, 1989; Gilchrist et al., 1999; Mickael et al., 1999].

Автор благодарен академику М.И. Эпову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Алексеев Ф.А., Головацкая И.В., Гулин Ю.А., Дворкин И.Л., Дядькин И.Г., Сребродольский Д.М.** Ядерная геофизика при исследовании нефтяных месторождений. М., Недра, 1978, 360 с.
- Аллен Л.С., Титтл Ч.В., Миллс В.Р., Колдуэлл Р.Л.** Нейтронный каротаж двумя зондами для определения пористости // Промысловая геофизика. М., Недра, 1970, с. 99—109.
- Антюфеев В.С., Назаралиев М.А.** Обратные задачи атмосферной оптики. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1988, 156 с.
- Банзаров Б.В., Хисамутдинов А.И.** Novosibirsk Monte Carlo methods for Nuclear Geophysics problems. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615224, 13.08.2010.
- Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Оптимизация: теория, примеры, задачи. М., Эдиториал УРСС, 2000, 320 с.
- Гермогенова Т.А.** Об обратных задачах атмосферной оптики // Докл. АН СССР, 1985, т. 285, № 5, с. 1091—1096.
- Де Гроот М.** Оптимальные статистические решения. М., Мир, 1974, 491 с.
- Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., Наука, 1978, 206 с.
- Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сибирское научное изд-во, 2009, 457 с.
- Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.** Линейная теория переноса. М., Мир, 1972, 384 с.
- Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М., Наука, 1980, 286 с.
- Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М., Наука, 1989, 608 с.
- Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С.** Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск, Наука, 1976, 283 с.
- Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М., Наука, 1987, 608 с.
- Резванов Р.А.** Радиоактивные и другие неэлектрические методы исследования скважин. М., Недра, 1982, 368 с.
- Спанье Дж., Гелбард Э.** Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1972, 272 с.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1986, 287 с.

**Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С.** Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УФН, 1970, т. 102, № 3, с. 345—386.

**Филиппов Е.М.** Ядерная геофизика. Новосибирск, Наука, 1973, т. 1, 514 с.; т. 2, 400 с.

**Хисамутдинов А.И.** Характерные взаимодействия и последовательные приближения в двух задачах о восстановлении коэффициентов уравнений переноса (и состава среды). Новосибирск, Академ. изд-во «Гео», 2009, 48 с.

**Хисамутдинов А.И., Бланков Е.Б.** Активационный каротаж на кислород, кремний и алюминий и восстановление флюида в кварц-полевошпатовых коллекторах // Докл. АН СССР, 1989, т. 309, № 3, с. 587—590.

**Хисамутдинов А.И., Минбаев М.Т.** Математическая модель и численный метод идентификации параметров нефтеводонасыщенных пластов по данным нейтронно-активационного каротажа // Геология и геофизика, 1995, т. 36 (7), с. 73—86.

**Хисамутдинов А.И., Федорин М.А.** О численном методе для восстановления состава некоторых горных пород по данным измерений рентгенофлуоресцентного анализа // ДАН, 2003, т. 392, № 1, с. 100—105.

**Хисамутдинов А.И., Шишенина Э.А.** Последовательные приближения по характерным взаимодействиям при восстановлении пористости по данным измерений нейтрон-нейтронного каротажа. Новосибирск, 2010, 15 с. (Препринт/ИНГГ СО РАН).

**Хисамутдинов А.И., Стариков В.Н., Морозов А.А.** Алгоритмы Монте-Карло в ядерной геофизике. Новосибирск, Наука, 1985, 158 с.

**Хисамутдинов А.И., Банзаров Б.В., Федорин М.А.** Математическое моделирование нестационарного переноса частиц в задачах импульсного нейтронного-гамма каротажа. Новосибирск, 2008, 54 с. (Препринт/ИНГГ СО РАН).

**Gilchrist Jr., Prati E.W.A., Pemper R., Mickael M.W., Trcka D.** Introduction of a new through-tubing multifunction pulsed neutron instrument // 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, 1999, Paper SPE 56803.

**Grau J.A., Schweitzer J.S.** Elemental concentrations from thermal neutron capture gamma-ray spectra in geological formations // Nuclear Geophysics, 1989, v. 3, № 1, p. 1—9.

**Hertzog R.C.** Laboratory and field evaluation of an inelastic neutron scattering and capture gamma ray spectroscopy tool // Soc. Petr. Eng. J., 1980, v. 20, p. 327—340.

**Khisamutdinov A.I.** Numerical method of identifying parameters of oil-water saturation by nuclear logging // Appl. Radiation and Isotopes, 1999, v. 50, p. 615—625.

**Khisamutdinov A.I.** Characteristic interactions and successive approximations in problems on evaluating coefficients of transport equation and elemental content of a medium // J. Inverse Problems, 2011, № 2, p. 189—222.

**Khisamutdinov A.I., Phedorin M.A.** Numerical method of evaluating elemental content of oil-water saturated formations based on pulsed neutron-gamma inelastic log data // SPE J., 2009, № 3, p. 51—53.

**McCormick N.J.** Inverse radiative transfer problems: a review // Nuclear Science and Engineering, 1992, № 112, p. 185—198.

**Michael M.W., Trcka D., Pemper R.** Dynamic multi-parameter interpretation of dual-detector carbon/oxygen measurements // 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, 1999, Paper SPE 56649.

*Рекомендована к печати 21 февраля 2013 г.  
М.И. Эповым*

*Поступила в редакцию  
11 июля 2012 г.*